OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

PROVA TEÓRICA P1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Escreva a sua identificação em **TODAS** as folhas de respostas;
2. Escreva o Número de cada Questão na folha de resposta
3. A duração da prova é de 3 (TRÊS) horas;
4. Essa prova é composta por 10 (DEZ) questões (totalizando 150 pontos) e tem peso 3 para a média final;
5. A prova é individual e sem consultas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas;
10. Folhas de rascunho serão disponibilizadas e não precisam ser entregues junto com a prova e as folhas de respostas;
11. Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles devem ser feitos à caneta esferográfica. Utilize para isso o espaço reservado em cada uma das folhas de respostas. Às respostas ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, serão associadas à nota zero.
12. Ao final da prova devolva o caderno de questões e as folhas de respostas.

Questões

1. (Livre caminho médio - 5 pontos)

Dentro de um meio material, o livre caminho médio de um fóton (d_{foton}) é dado por:

$$d_{foton} = \frac{1}{\kappa\rho}$$

onde κ e ρ são, respectivamente, o coeficiente de absorção de massa do fóton e a densidade do meio.

(a) Sabendo que o coeficiente de absorção de massa do fóton no interior do Sol é $\kappa = 10\ \mathrm{m^2\ kg^{-1}}$, faça uma estimativa do livre caminho médio do fóton dentro do Sol.

(b) É possível demonstrar que o caminho total s percorrido por um fóton dentro do Sol é dado por:

$$s_{foton} = \frac{(Raio_{Sol})^2}{d_{foton}}$$

Com esta informação, calcule quanto tempo leva para um fóton gerado no centro do Sol atingir sua superfície.

(c) Em quanto tempo um neutrino faz o percurso do item anterior, do centro do Sol até sua superfície?

Solução:

(a) Como estamos fazendo uma estimativa, podemos usar a densidade média do Sol, que vale:

$$\rho = \frac{3 \cdot M_{\odot}}{4 \cdot \pi \cdot R_{\odot}^3}$$

$$\rho \approx 1{,}42 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

Assim, calculamos $d_{fóton}$:

$$d_{fóton} = \frac{1}{10 \cdot 1{,}42 \cdot 10^3}\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{d_{fóton} \approx 7{,}04 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}}$$

(b) O caminho percorrido pelo fóton é:

$$s_{fóton} = \frac{\left(6{,}96 \cdot 10^8\right)^2}{7{,}04 \cdot 10^{-5}}\ \mathrm{m}$$

$$s_{fóton} \approx 6{,}88 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}$$

O tempo para a luz percorrer essa distância é:

$$t_1 = \frac{s_{fóton}}{c} = \frac{6{,}88 \cdot 10^{21}}{3 \cdot 10^8}\ \mathrm{s} \approx 2{,}29 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}$$

$$\boxed{t_1 \approx 7{,}26 \times 10^5\ \text{anos}}$$

Ou seja, o tempo é na ordem de **um milhão de anos**.

(c) Chances são de que um neutrino atravesse o Sol sem interagir uma única vez, ou seja, em linha reta. Considerando que a velocidade de um neutrino é próxima da velocidade da luz, o tempo é:

$$t_2 = \frac{R_{\odot}}{c} = \frac{6{,}96 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\ \mathrm{s} = \boxed{2{,}3\,\mathrm{s}}$$

Ou seja, o tempo é na ordem de **segundos**.

2. (Relógio de Sol - 5 pontos)

Aqui no Hotel Fazenda Ribeirão foi instalado um Relógio de Sol cujo mostrador indica a hora solar verdadeira com a precisão de 1 min. Calcule o valor da correção que deve aplicada à hora indicada no mostrador para o dia 14 de março de 2023, sabendo que pela Equação do Tempo, para este dia, o Sol estava "atrasado" cerca de 9 min em relação à Hora Oficial Brasileira (ou seja, um relógio de Sol no meridiano 45° marca um tempo nove minutos atrasado em relação ao horário de Brasília). **Dado:** O Relógio tem as seguintes coordenadas: Latitude = $-22°4'0''$ e Longitude = $-43°\ 46'5''$.

Solução:

Seja H_0 a hora marcada pelo relógio de Sol no meridiano de 45°, como Barra do Piraí está $1°13'55$" a Leste desse meridiano, o horário marcado pelo relógio de Sol em Barra é

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + 1°13'55\text{"}$$

Primeiramente, vamos converter essa diferença em horas:

$$\Delta H = 1°13'55\text{"} \cdot \frac{24\,\text{h}}{360°} = 0{,}082\,\text{h} = 5\,\text{min}$$

Sabemos que, no meridiano de 45°, o Sol está atrasado 9 min em relação ao tempo civil TC, ou seja:

$$H_0 = TC - 9\,\text{min}$$

$$H = H_0 + 5\,\text{min} = TC - 9\,\text{min} + 5\,\text{min} = TC - 4\,\text{min}$$

$$TC = H + 4\,\text{min}$$

Portanto, a correção a ser aplicada para o relógio de Sol em Barra do Piraí é $\boxed{+4\,\text{min}}$

3. (Planeta desconhecido - 10 pontos)

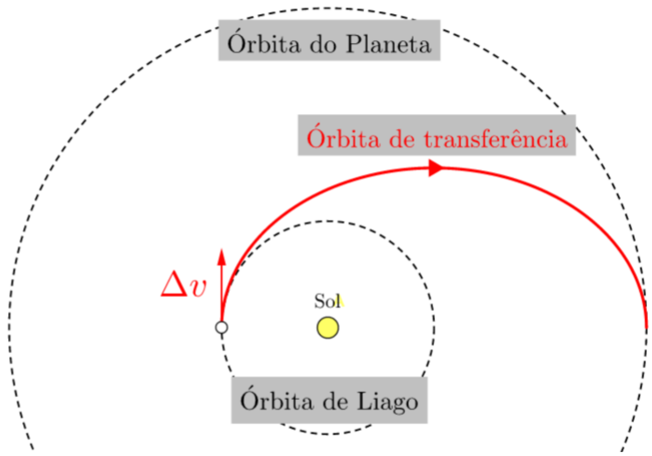
Sitor encontrou um misterioso planeta no Sistema Solar, de órbita circular e período 2,3 anos. Ele então informa seu amigo Liago que está em uma nave em órbita do Sol de raio 1,3 UA da existência do planeta. Liago então decide visitar o planeta através de uma manobra de transferência de Hohmann. Com um impulso no sentido do movimento da nave, esta é posta em uma trajetória elíptica (órbita de transferência) até chegar na órbita final desejada, conforme ilustra a figura abaixo.

(a) Qual é o impulso Δv, em m/s, necessário para colocar a nave de Liago na órbita de transferência?

(b) Quanto tempo levará para completar a manobra?

Solução:

(a) Para encontrar o Δv podemos subtrair a velocidade inicial v_i da velocidade final na elipse v_f.



Sendo r_i o raio da órbita em que a nave se encontra e r_f o raio da órbita em que deseja ir.

Assim, com a sendo o semi-eixo da órbita de transferência:

$$a = \frac{r_i + r_f}{2} \tag{1}$$

Agora, para achar o valor de r_f podemos usar a terceira lei de kepler com o período fornecido:

$$\frac{T^2}{r_f^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \implies r_f = 1{,}742 \text{ UA}$$

Substituindo em (1), temos: $a = 1{,}52$ UA

Assim, temos:

$$v_i = \sqrt{\frac{GM}{r_i}} = 26{,}121\text{m/s}$$

$$v_f = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a}\right)} = 27{,}938\text{m/s}$$

$$\boxed{\Delta v \approx 1{,}8\text{m/s}}$$

(b) Aplicando novamente a terceira lei de kepler, encontramos o período da elipse de transferência:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \implies T = 1{,}87 \text{ anos}$$

Como a nave percorre apenas metade da elipse de transferência, temos:

$$\boxed{T_n \approx 0{,}94 \text{ anos}}$$

4. (Quiz Astronômico - 10 pontos)

Complete as afirmativas abaixo:

(a) O dia sideral é medido em relação ao/às __________________.

(b) O mês sideral possui aproximadamente _____ dias.

(c) Considerando que valores distintos para a porcentagem da Lua iluminada correspondem a fases lunares distintas, a Lua tem ______________ fases.

(d) Ptolomeu introduziu um novo conceito na astronomia, denominado ____________ para tentar explicar o movimento ____________ de alguns planetas.

(e) No modelo geocêntrico a/o ____ era considerada o centro, e tinha em sua volta os astros na ordem que segue: Lua, ____________, ____________, ____________, Marte, ____________, Saturno e as estrelas fixas.

(f) Galileu descobriu através de observações telescópicas ____ luas que orbitam Júpiter bem como que ____________ possuía diferentes fases.

(g) A teoria mais aceita atualmente para a formação da nossa Lua é de que um objeto de tamanho aproximadamente igual ao planeta ____________ colidiu com a Terra e deste modo criou nosso satélite natural.

(h) No sistema solar ____ planetas possuem anéis.

(i) Utilizando a convenção da União Astronômica Internacional, o céu é dividido em ____ constelações.

(j) Existem 7 principais tipos espectrais de estrelas, sendo eles em ordem decrescente de temperatura: __, __, __, __, __, __, __.

(k) Telescópios que usam apenas lentes em sua óptica são chamados de ____________.

(l) A magnitude aparente da estrela Vega (α Lyr) é ____.

(m) A menor constelação do céu chama-se ______________.

Solução:

(a) O dia sideral é medido em relação ao/às **firmamento / estrelas fixas**.

(b) O mês sideral possui aproximadamente **28** dias.

(c) Considerando que valores distintos para a porcentagem da Lua iluminada correspondem a fases lunares distintas, a Lua tem **infinitas** fases.

(d) Ptolomeu introduziu um novo conceito na astronomia, denominado **epiciclos** para tentar explicar o movimento **retrógrado** de alguns planetas.

(e) No modelo geocêntrico a/o **Terra** era considerada o centro, e tinha em sua volta os astros na ordem que segue: Lua, **Mercúrio**, **Vênus**, **Sol**, Marte, **Júpiter**, Saturno e as estrelas fixas.

(f) Galileu descobriu através de observações telescópicas **4** luas que orbitam Júpiter bem como que **Vênus** possuía diferentes fases.

(g) A teoria mais aceita atualmente para a formação da nossa Lua é de que um objeto de tamanho aproximadamente igual ao planeta **Marte** colidiu com a Terra e deste modo criou nosso satélite natural.

(h) No sistema solar **4** planetas possuem anéis.

(i) Utilizando a convenção da União Astronômica Internacional, o céu é dividido em **88** constelações.

(j) Existem 7 principais tipos espectrais de estrelas, sendo eles em ordem decrescente de temperatura: **O**, **B**, **A**, **F**, **G**, **K**, **M**.

(k) Telescópios que usam apenas lentes em sua óptica são chamados de **refratores / lunetas**.

(l) A magnitude aparente da estrela Vega (α Lyr) é **nula**.

(m) A menor constelação do céu chama-se **Cruzeiro do Sul**.

/

5. (Gravidade diferente - 15 pontos)

Considere um universo no qual a força gravitacional possua uma forma diferente. Nesse universo, uma partícula de massa m a uma distância r da origem apresenta uma energia potencial

$$U = mkr^n$$

Em que a constante k e o expoente n são conhecidos.

(a) Determine a intensidade da força $F(r)$ à qual a partícula estaria sujeita nesse universo. Use que:

$$F(r) = -\frac{1}{m}\frac{\Delta U}{\Delta r} = -\frac{1}{m}\frac{U(r+\Delta r) - U(r)}{\Delta r}$$

Em que $\Delta r \ll r$ é uma pequena variação em r. Você pode precisar da aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$. O sinal negativo, nessa situação, indicará que a força aponta para o centro.

(b) Caso a partícula orbite em torno da origem com momento angular fixo l, calcule (i) a sua energia mecânica total na situação em que o movimento é circular e (ii) qual seria o raio do círculo, em função de m, n, l, e k.

Solução:

(a) Usando a fórmula dada no enunciado, podemos calcular a força que gera esse tipo de energia potencial:

$$F = -\frac{1}{m}\frac{mk(r+\Delta r)^n - mkr^n}{\Delta r} = -\frac{kr^n}{\Delta r} \cdot \left[\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^n - 1\right] \tag{2}$$

Como $\Delta r \ll r$, podemos usar a aproximação binominal para obter que:

$$F \approx -\frac{kr^n}{\Delta r} \cdot \frac{n\Delta r}{r} = \boxed{-knr^{n-1}} \tag{3}$$

OBS.: A fórmula dada no enunciado para a força em função da energia potencial está errada por um fator multiplicativo, já que o fator de $1/m$ não deveria estar lá. Portanto, o valor correto da força seria $F = \boxed{-mknr^{n-1}}$. Durante a correção, serão consideradas corretas tanto as soluções que utilizaram a fórmula do enunciado quanto as que utilizaram a fórmula correta, isto é, sem o fator de $1/m$.

(b) Assim, para uma órbita circular, sabemos que essa força central equivale à força centrípeta, o que nos permite achar a velocidade com a qual a partícula orbita. Utilizando o valor correto da força apresentado na observação do item passado:

$$F = F_{cp} \Rightarrow mknr_c^{n-1} = \frac{mv^2}{r_c} \Rightarrow mv_c^2 = mkr_c nr_c^{n-1} \Rightarrow v_c = \sqrt{knr_c^n} \tag{4}$$

Portanto, usando a conservação de momento angular, conseguimos obter o valor do raio:

$$l = mvr_c \Rightarrow mr_c\sqrt{knr_c^n} = l \Rightarrow m^2knr_c^{n+2} = l^2 \Rightarrow \boxed{r_c = \left(\frac{l^2}{m^2kn}\right)^{\frac{1}{n+2}}} \tag{5}$$

Assim, podemos substituir esse valor na fórmula para a energia potencial e na velocidade, obtendo assim a energia total associada a essa órbita:

$$E_c = mkr_c^n + \frac{mv_c^2}{2} = mkr_c^n + \frac{mknr_c^n}{2} = \boxed{\frac{n+2}{2} \cdot mk\left(\frac{l^2}{kmn}\right)^{\frac{n}{n+2}}} \tag{6}$$

Caso utilizemos o valor obtido no item (a) ao se seguir estritamente o enunciado, obtemos $v_c = \sqrt{\frac{knr_c^n}{m}}$, e $\boxed{r_c = \left(\frac{l^2}{mkn}\right)^{\frac{1}{n+2}}}$. Por fim, teremos uma pequena inconsistência na fórmula da energia, mas o raciocínio é o mesmo:

$$E_c = mkr_c^n + \frac{knr_c^n}{2} = \boxed{k\left(m + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{l^2}{mkn}\right)^{\frac{n}{n+2}}}$$

Lembrando que qualquer um dos pares de respostas mostrados serão aceitos.

6. (OVNI 1 - 15 pontos)

André, um grande engenheiro e entusiasta da astronomia, observa o céu durante uma noite sem nuvens e com condições praticamente ideais de observação. Em dado momento, ele nota que um OVNI (objeto voador não identificado) está em aproximação. André observa que o objeto voa extremamente rápido com velocidade constante, de forma paralela ao solo, e habilmente estima a sua altitude $H = 10$ km. Durante essa observação, André usa um cronômetro para obter o intervalo de tempo Δt entre os seguintes eventos:

1. A luz advinda do objeto começa a se tornar visível para André, i.e., entra no limiar da visão humana a olho nu.
2. O objeto começa a ser percebido como um corpo extenso por André, i.e., os olhos do estudante conseguem resolvê-lo.

Ao fim, ele obtém $\Delta t = 2{,}0$ min. Após um certo tempo, o objeto passa pelo zênite de André, momento em que o rapaz estima a sua magnitude $m_0 = +1{,}0$ mag e diâmetro angular $\theta_0 = 0{,}05°$. Com as informações fornecidas, determine o módulo da velocidade v do objeto, em km/h. Considere que a visão de André é saudável e que ele enxerga a luz do objeto na faixa do visível ($\lambda = 550$ nm). Ademais, considere que o objeto emite luz isotropicamente e desconsidere a curvatura do planeta e a refração atmosférica.

Solução:

Primeiramente, vamos analisar o evento 1. Escrevemos a condição para o objeto estar no limiar da visibilidade humana por meio da equação de Pogson, comparando a magnitude do objeto entre o momento do evento 1 e aquele em que o mesmo passa pelo zênite:

$$m_0 - m_{lim} = -2{,}5 \log \left(\frac{F_0}{F_{lim}} \right)$$

Chame de d_1 a distância ao objeto quando ele estiver no limiar de se tornar visível. Como o fluxo cai com o inverso da distância ao quadrado:

$$m_0 - m_{lim} = -2{,}5 \log \left(\frac{d_1^2}{H^2} \right) = -5 \log \left(\frac{d_1}{H} \right)$$

Substituindo os valores numéricos:

$$d_1 = 10 \cdot 10^{\left(\frac{1-6}{-5}\right)} \text{ km} = 100 \text{ km}$$

Agora, estudemos o evento 2. O objeto será percebido como um corpo extenso pelos olhos de André quando a seguinte condição sobre o seu diâmetro angular for satisfeita:

$$\theta_{lim} = 1{,}22 \frac{\lambda}{D_{pupila}} = \frac{l}{d_2}$$

Em que $D_{pupila} = 6$ mm é o diâmetro médio da pupila humana e $\lambda = 550$ nm o comprimento de onda intermediário do espectro visível. Chamamos de d_2 a distância ao objeto nesse momento, e l o seu diâmetro real. Note que $l = H\theta_0$, então:

$$\theta_{lim} = 1{,}22 \frac{\lambda}{D_{pupila}} = \frac{H\theta_0}{d_2}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$d_2 = \frac{10 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{\pi}{180}}{1{,}22 \cdot \frac{550 \times 10^{-6}}{6}} \text{ km} = 78{,}0326 \text{ km}$$

Agora, resta visualizar a geometria do problema. Acompanhe:

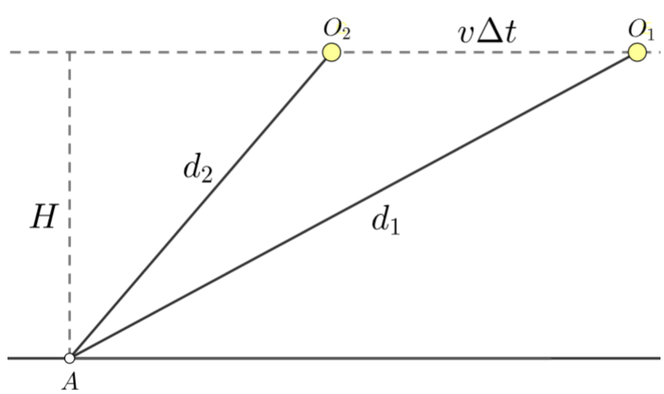


Figura 1: Esquema geométrico do problema. A é o ponto no qual André está localizado, e O_1, O_2 as posições do O.V.N.I. nos momentos correspondentes aos eventos 1 e 2, respectivamente.

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$v\Delta t = \sqrt{d_1^2 - H^2} - \sqrt{d_2^2 - H^2}$$

Substituindo os valores encontrados, obtemos:

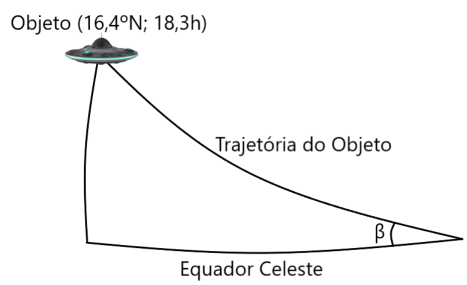
$$v\Delta t = 22{,}1096 \text{ km}$$

Por fim:

$$\boxed{v \approx 663 \text{ km/h}}$$

7. (OVNI 2 - 20 pontos)

Bruno estava observando o céu noturno e avistou um objeto que ele não conseguiu identificar. Apesar de não saber exatamente o que o objeto era, Bruno notou que ele estava em uma declinação de 16,4° N e uma ascensão reta de 18,3 h. Além disso, no instante da observação de Bruno, a sua velocidade angular em declinação (taxa de variação da declinação em relação ao tempo) era igual a $-0{,}124°/s$ e a sua velocidade angular em ascensão reta (taxa de variação da ascensão reta em relação ao tempo) era igual a $0{,}349°/s$. Bruno decidiu assumir que o objeto se movimentava com velocidade angular constante na esfera celeste, sendo a sua trajetória um arco de círculo máximo. Com base nesse modelo, qual seria o ângulo da intersecção da trajetória do objeto com o Equador Celeste? Despreze a refração atmosférica.



Solução:

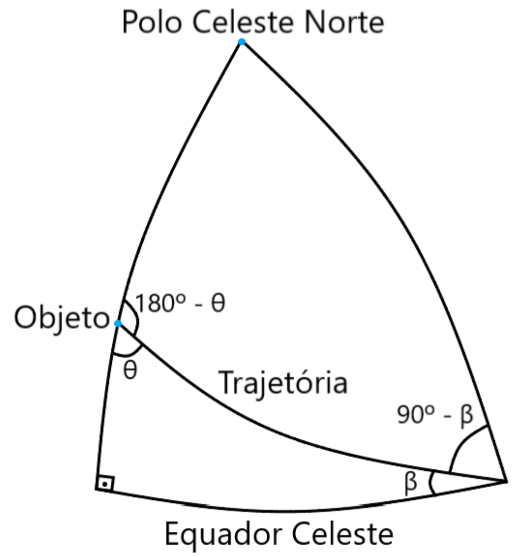
O primeiro passo é calcular o ângulo θ entre os componentes da velocidade do objeto. Para isso, é importante lembrar que a velocidade angular em ascensão reta deve ser corrigida de acordo com a declinação para que seja obtido o valor desse componente em um círculo máximo.

$$\theta = arctan\left(\frac{\omega_\alpha \times cos(\delta)}{|\omega_\delta|}\right)$$

$$\theta = arctan\left(\frac{0{,}349 \times cos(16{,}4°)}{0.124}\right)$$

$$\theta = 69{,}7°$$

Com base no seguinte diagrama, é possível determinar o ângulo β entre a trajetória do objeto e o Equador Celeste:



Utilizando a lei dos senos:

$$\frac{sin(90^\circ - \delta)}{sin(90^\circ - \beta)} = \frac{sin(90^\circ)}{sin(180^\circ - \theta)}$$

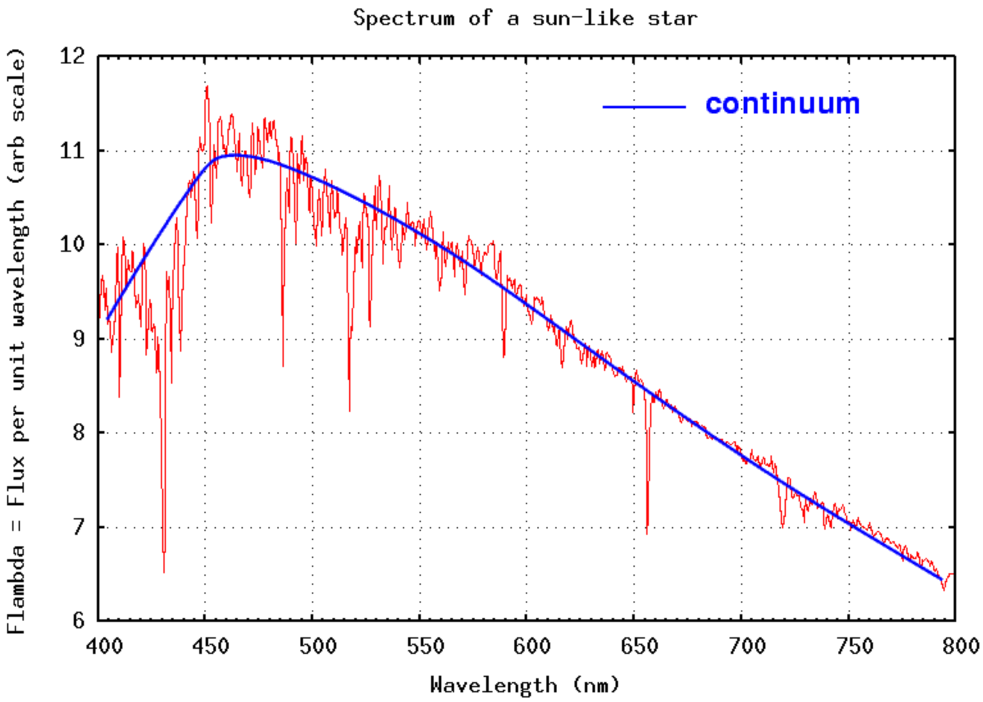
$$cos(\beta) = sin(\theta)cos(\delta)$$

$$\beta = arccos\,(sin(69{,}7^\circ)cos(16{,}4^\circ))$$

$$\boxed{\beta = 25{,}9^\circ}$$

8. (Astrônomo Amador - 20 pontos)

Bakoto é um astronômo amador que planeja observar a estrela Iakose com o seu telescópio de diâmetro 60 mm. Para tal, encontra dados da estrela captados por um telescópio com 10,28 m de diâmetro, razão focal f/6 e acoplado em um CCD com pixels de lado $2{,}49 \cdot 10^{-5}$ mm. A imagem da estrela ocupa 1 pixel inteiro nesse CCD e está a uma distância de 20 pc da Terra. O seu espectro de emissão (fluxo em uma escala arbitrária *versus* comprimento de onda em nm) está representado na imagem a seguir (O gráfico já foi corrigido levando-se em conta a velocidade radial da estrela e a linha azul cheia representa a curva suavizada de seu espectro).



(a) Qual o diâmetro da estrela?

(b) Qual a magnitude absoluta e a magnitude aparente da estrela?

(c) Calcule a magnitude limite do telescópio de Bakoto e diga se essa estrela pode ser observada através dele. Considere que a magnitude limite do olho humano é +6 e que o diâmetro da pupila humana adaptada seja de 6 mm.

Solução:

(a) Podemos encontrar a distância focal do telescópio com CCD f a partir da razão focal e do diâmetro d:

$$6 = \frac{f}{d} \implies f = 6 \cdot d = 61{,}720 \text{ mm}$$

A escala de placa então vale (onde L_p é o lado do pixel):

$$\theta_p = \frac{L_p}{f} = \frac{2{,}49 \cdot 10^{-5}}{61.720} = 4{,}04 \cdot 10^{-10} \text{ rad/px}$$

Assim, o tamanho angular do diâmetro da estrela é:

$$\theta_d = \theta_p \cdot 1 = 4{,}04 \cdot 10^{-10} rad$$

Então, temos:

$$\frac{diam}{dist} = \theta_d \implies diam = \theta_d \cdot dist = \boxed{2{,}50 \cdot 10^8 \text{m}}$$

(b) A partir do espectro, encontramos que o comprimento de onda do pico de emissão $\lambda_p \approx 465$ nm

A partir da lei de Wien, temos:

$$\lambda_p = \frac{b}{T} \implies T = \frac{b}{\lambda_p} = 6{,}23 \cdot 10^3 K$$

Podemos agora aplicar a lei de Stefan-Boltzmann para encontrar a luminosidade:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 1{,}68 \cdot 10^{25}\ \text{W}$$

Agora, aplicando Pogson e comparando com o sol, temos:

$$M - M_\odot = 2{,}5 \cdot \log\left(\frac{L_\odot}{L}\right) \implies \boxed{M = 8{,}22}$$

$$m = M + 5 \cdot \log(d) - 5 \implies \boxed{m = 9{,}73}$$

(c) A fórmula para magnitude limite do telescópio é:

$$m_{lim} - m_{olho} = -5 \log\left(\frac{d_{olho}}{d_{tel}}\right)$$

$$\boxed{m_{lim} = 11}$$

Portanto, $\boxed{\textbf{sim, Bakoto consegue observar essa estrela}}$ com o seu telescópio.

9. (Aumento útil - 25 pontos)

Ualypinho, um estudante muito serelepe, se empolgou na compra de seu primeiro telescópio. Ansioso por observar Júpiter, nosso astrônomo favorito não tardou em acoplar a lente de maior aumento possível na ocular. Para sua surpresa, a observação foi de baixa qualidade. Decidindo, então, ir aos poucos, acoplou sua lente de menor aumento para observar o mesmo astro, obtendo novamente uma imagem ruim. Na terceira tentativa, ele utilizou uma lente com aumento intermediário, finalmente obtendo uma imagem de qualidade satisfatória.

Inicialmente, Ualypinho propôs a seguinte explicação: como o limite de resolução do olho humano é de um minuto de arco, se dois raios chegam à pupila com separação angular maior ou igual a esse valor, ativam regiões distintas da retina. Caso esses dois raios tenham sido mesclados pela difração na abertura do telescópio, isto é, caso não obedeçam ao critério de resolução de Rayleigh, enxergamos uma imagem borrada, em que cada ponto é uma mistura da cor e do brilho superficial de sua vizinhança.

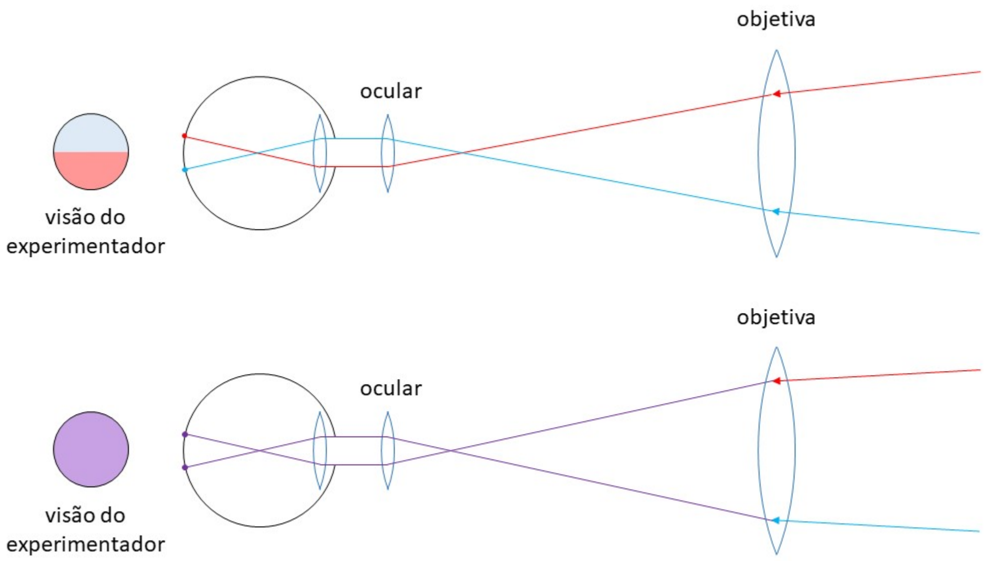


Figura 2: Esquema do primeiro modelo proposto por Ualypinho

Já sua segunda explicação se baseava no brilho superficial B do corpo celeste. Consoante essa abordagem, a razão entre a potência P de um astro (energia incidente no olho por intervalo de tempo) e o quadrado de seu diâmetro angular θ (como se fosse sua "área angular") deveria estar dentro de uma faixa de conforto para que a luz não fique nem muito concentrada, nem muito dissipada. O brilho superficial pode ser calculado da seguinte forma:

$$B = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot \theta^2}$$

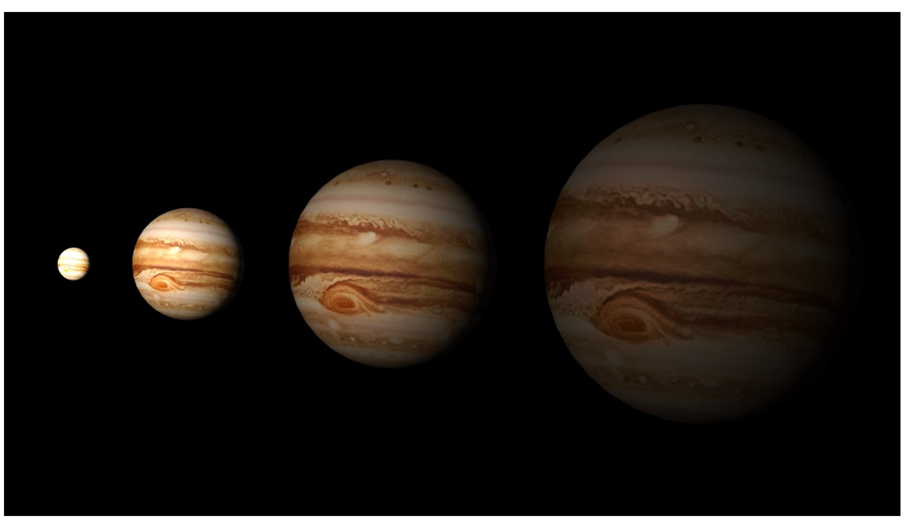


Figura 3: Esquema do segundo modelo proposto por Ualypinho

(a) **(i)** Seguindo o primeiro modelo, encontre a faixa de aumento A em função do diâmetro do telescópio D e do comprimento de onda λ, em que D está em milímetros e λ em microns, para que a qualidade da imagem seja satisfatória. **(ii)** Considerar apenas o primeiro modelo como correto é consistente com as constatações experimentais de Ualypinho?

(b) **(i)** Seguindo o segundo modelo, encontre a faixa de aumento A em função do diâmetro do telescópio D, medido em milímetros, para que a qualidade da imagem seja satisfatória. Considere que a observação seja feita na máxima aproximação entre Júpiter e Terra. **(ii)** Considerar apenas o segundo modelo como correto é consistente com as constatações experimentais de Ualypinho? **(iii)** E considerar ambos os modelos como corretos, é consistente?

(c) **Baseando-se nas ideias desenvolvidas,** responda: qual tipo de razão focal (alta ou baixa) melhor se adequa à observação de objetos com alto brilho superficial?

Dados:

- semi-eixo maior da órbita joviana: $a_J = 5{,}2\,\mathrm{UA}$
- diâmetro joviano: $d_J = 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
- magnitude aparente joviana (máxima aproximação): $m_J = -2{,}9$
- faixa de conforto do brilho superficial: $0{,}8\,\mu\mathrm{W\,rad^{-2}} \leqslant B \leqslant 3\,\mu\mathrm{W\,rad^{-2}}$
- espectro visível: radiação eletromagnética com comprimento de onda entre 0,4 e 0,8 μm

Solução:

(a) **(i)** O critério de resolução de Rayleigh, em radianos, para λ em micrômetros e D em milímetros, é:

$$\theta_{tel} = 1{,}22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Ao passar pelo sistema óptico, o ângulo na pupila corresponderá a:

$$\theta = A \cdot \theta_{tel} = 1{,}22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\lambda \cdot A}{D}$$

Pelo modelo proposto, esse valor deve ser menor que um minuto de arco:

$$1{,}22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\lambda \cdot A}{D} < 1'$$

$$1{,}22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\lambda \cdot A}{D} < 2{,}9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

$$\boxed{A < 0{,}24 \cdot \frac{D}{\lambda}}$$

(ii) A priori, são três as constatações de Ualypinho: a existência de limites superior e inferior de aumento e de uma faixa intermediária satisfatória. Ainda foram consideradas inferências válidas que, tendo ele proposto modelos que explicam a falta de nitidez e os extremos de brilho superficial, esses dois efeitos teriam sido observados.

Perceba que o comando da questão não pergunta se o modelo é consistente, mas se é consistente **com as constatações de Ualypinho**. Sendo assim, uma justificativa válida deveria pautar-se em pelo menos uma do total de cinco constatações. Mais detalhes sobre o que foi ou não considerado e os possíveis descontos aplicados estão disponíveis na rúbrica de correção.

Visto isso, o resultado é **inconsistente** com as constatações. Primeiro, o limite inferior de aumento, atestado pela segunda observação de Ualypinho, não é previsto. Segundo, inferindo que Ualyinho observou os extremos de brilho superficial, já que tentou explicá-los em seu segundo modelo, esses eventos também não estão previstos no primeiro modelo.

(b) O fluxo joviano é obtido pela equação de Pogson:

$$F_J = F_\odot \cdot 10^{(m_\odot - m_J)/2{,}5}$$

$$F_J = 4{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

Para D em milímetros, a potência, em watts, é calculada por:

$$P = 4{,}0 \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot \frac{D^2 \cdot 10^{-6}}{4}$$

$$P = 3{,}1 \cdot 10^{-13} \cdot D^2$$

Já a distância Terra-Júpiter é:

$$r = 5{,}2\,\mathrm{UA} - 1\,\mathrm{UA} = 4{,}2\,\mathrm{UA} = 6{,}3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

O diâmetro angular que chega , portanto:

$$\theta_{tel} = \frac{d_J}{r} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{6{,}3 \cdot 10^{11}} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

Após passar pelo sistema óptico, o tamanho angular que chega à pupila:

$$\theta = A \cdot \theta_{tel} = 2{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot A$$

O brilho superficial, em watts por radiano quadrado, é:

$$B = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot \theta^2} = \frac{4 \cdot 3{,}1 \cdot 10^{-13} \cdot D^2}{\pi \cdot (2{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot A)^2} = 7{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{D^2}{A^2}$$

A condição de conforto é:

$$0{,}8 \cdot 10^{-6} \leqslant 7{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{D^2}{A^2} \leqslant 3 \cdot 10^{-6}$$

$$0{,}11 \leqslant \frac{D^2}{A^2} \leqslant 0{,}42$$

$$0{,}34 \leqslant \frac{D}{A} \leqslant 0{,}65$$

$$1{,}5 \leqslant \frac{A}{D} \leqslant 3$$

$$\boxed{1{,}5 \cdot D \leqslant A \leqslant 3 \cdot D}$$

(ii) O comentário do subitem (a-II) também é aplicável a este.

Se não inferirmos que Ualypinho observou a falta de nitidez (solução original), o resultado é **consistente** com as constatações, pois prevê a existência de limites superior (primeira observação de Ualypinho) e inferior (segunda observação de Ualypinho) para o aumento, bem como uma faixa intermediária na qual a imagem é satisfatória (terceira observação de Ualypinho). O modelo também prevê os possivelmente inferidos extremos de brilho superficial.

Inferindo que Ualyinho observou a falta de nitidez, já que propôs um modelo para tentar explicá-la, o resultado é **inconsistente** com as constatações, pois não explica a supracitada.

Por ser uma pergunta binária em que qualquer uma das duas respostas é válida, o subitem (b-II) foi anulado.

(iii) O comentário do subitem (a-II) não é aplicável a este, pois a elipse de "com as constatações de Ualypinho"criou uma ambiguidade. São válidas justificativas que se baseiem nas constatações de Ualypinho ou em informações fora do enunciado, desde que corretas.

Segundo o desenvolvimento do item (a), o limite superior de magnificação para o primeiro modelo é inversamente proporcional ao comprimento de onda utilizado. A cota superior de aumento para esse modelo, portanto:

$$A_{máx,1} = 0{,}24 \cdot \frac{D}{0{,}4} = 0{,}6 \cdot D$$

Observamos que esse valor é menor que a cota inferior de aumento para o segundo modelo: $A_{mín,2} = 1{,}5 \cdot D$. Sendo assim, assumir ambos os modelos como corretos prevê a inexistência de uma faixa de aumento que suporte observações de boa qualidade, o que contradiz a última observação de Ualypinho. Portanto, considerar ambos os modelos é **inconsistente**.

Muitos estudantes argumentaram que, existindo ambos a variação de brilho superficial e o critério de resolução de Rayleigh, a sobreposição dos modelos deveria estar certa. Todavia, perceba que a inconsistência da sobreposição dos modelos não significa a inconsistência de nenhum dos efeitos. Na verdade, há duas interpretações logicamente aceitáveis:

1) O primeiro modelo está errado, e o segundo talvez esteja certo.

2) O segundo modelo está errado, e o primeiro talvez esteja certo.

A falha de um modelo não necessariamente significa a falha de todos os seus pressupostos. O primeiro modelo, por exemplo, supõe a existência do critério de resolução de Rayleigh. Contudo, também supõe que outros efeitos da óptica física no interior do sistema são desprezíveis, bem como que incidir na pupila dois raios luminosos mesclados com abertura igual ou superior a um minuto de arco é suficiente para que a imagem vista seja ruim. Se o primeiro modelo for falso, pelo menos uma de suas suposições é falsa, mas, de modo algum, a veracidade de uma delas implica a veracidade do modelo como um todo. Um comentário similar pode ser feito para o segundo modelo. Perceba que, sendo falso um dos modelos, o outro **talvez** esteja certo. O qualificador é necessário dado que não estar em contradição com os dados experimentais disponíveis não implica estar correto.

(c) A magnificação é diretamente proporcional à distância focal do telescópio, enquanto o brilho superficial é diretamente proporcional ao quadrado da razão entre o diâmetro e o aumento. Seja f a razão focal, podemos escrever:

$$B = k \cdot \frac{D^2}{F^2} = k \cdot \frac{1}{f^2}$$

Se o astro for muito brilhante, como a Lua ou os planetas, precisamos de grandes comprimentos angulares e baixa coleta de luz a fim de tornar seu brilho superficial mais dissipado, ou seja, **para objetos brilhantes, precisamos de uma razão focal maior.**

Já se o astro for muito escuro, como uma nebulosa, precisamos de baixos comprimentos angulares e grandes coletas de luz a fim de tornar seu brilho superficial mais concentrado, ou seja, **para objetos escuros, precisamos de uma razão focal menor.**

10. (Binário - 25 pontos)

Em uma noite de observação, o astrônomo Bismarck observou um sistema binário que o deixou curioso. Após fazer algumas medidas e pesquisar alguns dados, ele acabou pegando no sono, então você decidiu ajudá-lo obtendo o resto das informações.

Dados obtidos por Bismarck:

- Magnitude aparente da estrela 1: 3,80
- Magnitude aparente total do sistema (estrelas 1 e 2): 3,50
- Magnitude absoluta da estrela 2: 5,04
- Separação angular máxima entre as estrelas: $\theta = 10{,}0$ mas (millisegundos de arco)
- Período do sistema: 1 mês

Baseado nesses dados, responda:

(a) Qual a magnitude aparente da estrela 2?
(b) Qual a distância da Terra até o sistema em pc?
(c) Qual a distância máxima entre as estrelas em U A ?
(d) Qual a massa total do sistema em massas solares?

Solução:

(a) Primeiramente, comparamos a magnitude aparente total do sistema (m_t) com a da estrela 1 por meio da equação de Pogson:

$$m_t - m_1 = -2{,}5log\left(\frac{f_1 + f_2}{f_1}\right)$$

$$3{,}5 - 3{,}8 = -2{,}5log\left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right)$$

Assim, obtemos a razão entre os fluxos das estrelas:

$$\frac{f_2}{f_1} = 0{,}318$$

Agora, comparando as suas magnitudes, encontramos a magnitude aparente da estrela 2:

$$m_2 - m_1 = -2{,}5log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

$$m_2 - 3{,}8 = -2{,}5log(0{,}318)$$

$$\boxed{m_2 = 5{,}0}$$

(b) Usando a fórmula para a magnitude absoluta:

$$M - m = 5log(d) - 5$$

$$5{,}04 - 5{,}0 \approx 0 = 5log(d) - 5$$

$$\boxed{d \approx 10 \text{ pc}}$$

(c) A distância entre as estrelas projetada no plano do céu (a), em UA, no momento de máxima separação angular é:

$$a = d\theta = 10 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ UA} = \boxed{0{,}10 \text{ UA}}$$

(d) Pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{a^3(UA)}{P^2(anos)} = M$$

$$\frac{0{,}10^3}{(1/12)^2} = \boxed{0{,}144 \text{ M}_\odot}$$