PROVA TEÓRICA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **5 questões**, com 2 valendo 10 pontos, 2 valendo 15 pontos e 1 valendo 20 pontos.
   - Questões Médias - **3 questões**, com 1 valendo 25 pontos, 1 valendo 30 pontos e 1 valendo 45 pontos.
   - Questões Longas - **2 questões**, com 2 valendo 65 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	

Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	

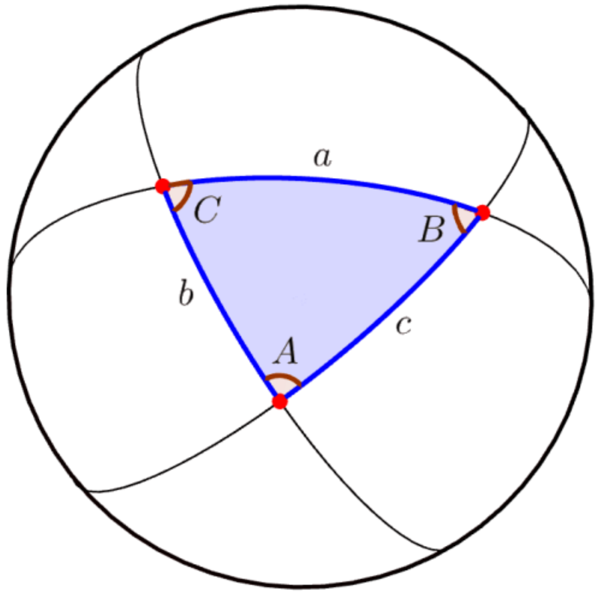
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	

Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	

Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-2}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = \epsilon \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4$$

em que a emissividade vale $\epsilon = 1$ para um emissor perfeito.

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Pressão de radiação (reflexão perfeita e ângulo de incidência nulo):

$$P = \frac{2F}{c}$$

em que F é o fluxo de radiação e c a velocidade da luz.

Questões Curtas

1. **CCD (10 pontos)**

Juventino possui uma placa CCD e a utiliza para observar uma estrela de magnitude 18,5 mag que cobre completamente 5 pixels do CCD. Nessa noite, os ruídos valem, em unidade de contagens, $\sigma_1 = 10 \cdot px$ e $\sigma_2 = \sqrt{5 \cdot px \cdot t}$ (em que px é o número de pixels, t o tempo de integração, em segundos). Considerando que foi detectada uma taxa de 1 contagem/s para uma outra estrela de magnitude 21 mag, encontre qual deve ser o tempo de integração para, nessa observação, obter uma razão sinal-ruído de 5.

Dica: o ruido total é dado por

$$\sigma_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2}$$

Solução:

Primeiro, podemos encontrar qual o fluxo, em contagens/s, que chega no CCD da estrela sendo observada:

$$m_1 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_0} + m_0$$

Onde $m_1 = 18{,}5$ e F_1 é a magnitude da estrela que observamos e seu fluxo, respectivamente, e $m_0 = 21$ e F_0 é a magnitude da estrela que usamos como referência e seu fluxo. Assim:

$$F_1 = 10^{\frac{-(18{,}5-21)}{2.5}} \cdot F_0 = 10\, contagens/s$$

Agora, sabendo que a estrela cobre 5 pixels e que a razão sinal-ruído é dada por $SNR = \dfrac{F \cdot t}{\sigma_t}$, teremos:

$$5 = \frac{10t}{\sqrt{(10 \cdot 5)^2 + (5t \cdot 5)}}$$

Rearranjando e elevando ambos os lados ao quadrado:

$$10^2 t^2 = 6{,}25 \cdot 10^4 + 6{,}25 \cdot 10^2 t$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos que $t \approx 28.3s$ ou $t \approx -22.1s$, mas como o tempo é sempre positivo, encontramos que a resposta é $\boxed{t \approx 28.3s}$

2. **Poluição Atmosférica (10 pontos)**

Sulistinha, um infeliz astrônomo do ano 3000, observava o céu de seu apartamento de 5m^2. As únicas estrelas visíveis eram Canopus, próxima ao zênite, e Sírius, a uma altura de 60°. Devido à poluição, Canopus estava duas vezes mais brilhante que Sírius. Sabendo disso, qual a fração aproximada da energia solar que chega à superfície, em relação à energia total que incide na alta atmosfera, quando o Sol está a pino?

Dados: Magnitudes de Canopus e Sírius, corrigidas pela absorção atmosférica, são, respectivamente, $m_{C,0} = -0{,}74$ e $m_{S,0} = -1{,}46$.

Solução:

A drástica diminuição do brilho dessas estrelas se dá pela absorção atmosférica somada a diferença de altura dos astros. Dessa forma, podemos escrever que

$$m_C = m_{C,0} + k \sec z_C$$

$$m_S = m_{S,0} + k \sec z_S$$

Subtraindo as equações temos

$$m_C - m_S = m_{C,0} - m_{S,0} + k(\sec z_C - \sec z_S)$$

Pelo que foi dado no enunciado, podemos calcular a diferença entre as magnitudes observadas de Canopus e Sírius

$$m_C - m_S = -2{,}5 \log \frac{F_C}{F_S} \Rightarrow m_C - m_S = -2{,}5 \log \frac{2\cancel{F_S}}{\cancel{F_S}}$$

Com isso,

$$-2{,}5 \log 2 = m_{C,0} - m_{S,0} + k(\sec z_C - \sec z_S)$$

Resolvendo, encontramos $k = 9{,}52$. Calculando a magnitude observada do Sol quando $z_\odot \approx 0°$, obtemos

$$m_\odot = m_{\odot,0} + k \sec 0° \Rightarrow m_\odot = -17{,}18$$

Portanto, a fração de energia solar que de fato chega até a superfície é

$$m_\odot - m_{\odot,0} = -2{,}5 \log \frac{F_\odot}{F_{\odot,0}}$$

$$\boxed{\frac{F_\odot}{F_{\odot,0}} = 1{,}56 \cdot 10^{-4}}$$

3. Telescópio Misterioso (15 pontos)

Um dia, Bruno estava caminhando pelas ruas de Munique e encontrou um telescópio muito interessante. Fascinado, ele quis saber a razão focal do telescópio. Contudo, não havia nenhuma marcação, e os únicos objetos disponíveis eram um cronômetro e uma ocular de 25 mm com campo de visão de 45°. Bruno decidiu colocar sua ocular no telescópio e realizar os seguintes testes:

I. Bruno apontou o telescópio para Enif ($\delta = 9{,}87° N$; $\alpha = 21h44min$) e determinou que a estrela demorava 4min20s para cruzar o campo de visão.

II. Após apontar para vários objetos do céu profundo, Bruno concluiu que a maior magnitude que podia ser vista pelo telescópio era $+12{,}15$. Bruno optou por assumir que a eficiência de transmissão era de 100%.

Qual foi a razão focal obtida por Bruno? Considere que a magnitude limite do olho humano é igual a $+6{,}0$ e o diâmetro da pupila é igual a 6,0 mm.

Solução:

Com base no primeiro teste deve ser utilizado para determinar o campo de visão do telescópio:

$$FOV_{\text{telescópio}} = \frac{t_{\text{trânsito}}}{\text{dia sideral}} \times cos(\delta) \times 360^\circ$$

$$FOV_{\text{telescópio}} = \frac{4min20s}{23h56min} \times cos(9.87^\circ) \times 360^\circ$$

$$FOV_{\text{telescópio}} = 1.07^\circ$$

Utilizando o campo de visão da ocular, é possível calcular o aumento:

$$m = \frac{FOV_{\text{ocular}}}{FOV_{\text{telescópio}}}$$

$$m = \frac{45^\circ}{1.07^\circ}$$

$$m = 42.0$$

O próximo passo é determinar a distância focal da objetiva:

$$m = \frac{f_{\text{objetiva}}}{f_{\text{ocular}}}$$

$$f_{\text{objetiva}} = m \times f_{\text{ocular}}$$

$$f_{\text{objetiva}} = 42.0 \times 25 \times 10^{-3}$$

$$f_{\text{objetiva}} = 42.0 \times 25 \times 10^{-3}$$

$$f_{\text{objetiva}} = 1.05 \text{ m}$$

Com base na magnitude limite, é possível determinar o diâmetro da objetiva:

$$m_{\text{olho}} - m_{\text{objetiva}} = -2.5 \times log\left(\frac{d^2_{\text{objetiva}}}{d^2_{\text{olho}}}\right)$$

$$m_{\text{olho}} - m_{\text{objetiva}} = -5 \times log\left(\frac{d_{\text{objetiva}}}{d_{\text{olho}}}\right)$$

$$d_{\text{objetiva}} = d_{\text{olho}} \times 10^{\frac{m_{\text{objetiva}} - m_{\text{olho}}}{5}}$$

$$d_{\text{objetiva}} = 6 \times 10^{-3} \times 10^{\frac{12.15-6.0}{5}}$$

$$d_{\text{objetiva}} = 0.102 \text{ m}$$

Razão focal:

$$\frac{f}{D} = \frac{1.05}{0.102}$$

$$\boxed{\frac{f}{D} \approx 10}$$

4. Moonfall (15 pontos)

Considere um cenário (felizmente fictício) no qual um imenso asteroide colide frontalmente com a Lua de forma perfeitamente inelástica. Considere o asteroide uma esfera de diâmetro $D = 750$ km composto por rocha de densidade $\rho = 2{,}70$ g/cm^3. Despreze a atração gravitacional que a Terra e a Lua exercem no asteroide, considere que ambas as órbitas da Lua ao redor da Terra e da Terra ao redor do Sol são circulares e se dão no mesmo sentido; negligencie as massas da Lua e do asteroide em comparação com a massa da Terra.

(a) **(10 pontos)** Seja V o módulo da velocidade do asteroide em relação ao Sol. Determine o intervalo $[V_{min}, V_{max}]$ para V de modo que, logo após a colisão, a Lua pare em relação à Terra. Considere que o raio orbital da Lua em torno da Terra é negligenciável em relação ao raio orbital da Terra em torno do Sol.

(b) **(5 pontos)** Assumindo $V_{min} \leqslant V \leqslant V_{max}$, estime o tempo necessário, em dias, para a Lua se chocar com a Terra, contado a partir do impacto.

Solução:

(a) Denote por V_L a velocidade da lua em sua órbita ao redor do nosso planeta, e M_L a sua massa, e seja $V_{rel} = |\vec{V}_{rel}|$ o módulo da velocidade do asteroide em relação à Terra. Conservando o momento linear do sistema lua+asteroide logo antes e logo após a colisão, no referencial da Terra, vale que:

$$p_{antes} = p_{depois}$$

Como a lua deve parar em relação à Terra após a colisão, $p_{depois} = 0$. Logo:

$$mV_{rel} - M_l V_L = 0$$

$$mV_{rel} = M_l V_L$$

$$V_{rel} = \frac{M_L V_L}{m} = \frac{M_L V_L}{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3} = \frac{6 M_L V_L}{\pi \rho D^3}$$

Sabemos que $V_L = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_L}}$. Substituindo os valores:

$$V_{rel} = \frac{6 \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{\pi \cdot 2{,}70 \cdot 10^3 \cdot (750 \cdot 10^3)^3} \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{3{,}84 \cdot 10^8}} \text{ m/s} \approx 125{,}6 \text{ km/s} \tag{1}$$

Como estamos interessados apenas no módulo V_{rel}, já assumimos que as velocidades da lua e do asteroide tem sentidos contrários ao escrever a conservação do momento.

Sabemos, então, que o sentido de V_{rel} é contrário ao de V_L. No entanto, a orientação exata da velocidade do asteroide em relação ao sol pode variar, dependendo do ponto na órbita da lua onde o impacto ocorre. Acompanhe o seguinte esquema:

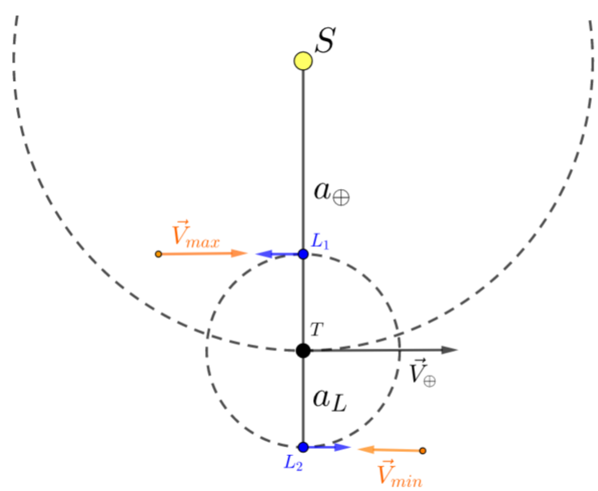


Figura 1: No esquema, S é o sol, T a terra e L a lua, e de laranja, o asteroide. sendo a posição L_1 associada à configuração em que a lua está entre o sol e a terra, e a posição L_2 para a terra entre o sol e a lua. O sentido da velocidade angular da terra em torno do sol, ω, também está indicado na figura. Os vetores em azul correspondem às velocidades da lua no referencial da terra, enquanto os vetores laranja se referem às velocidades máxima e mínima do asteroide no referencial do sol. A velocidade orbital da terra também está mostrada em preto.

Considerando o raio orbital da lua muito menor do que o da terra, na mudança de referencial, temos que

$$\vec{V}_{asteroide,Sol} = \vec{V}_{asteroide,Terra} + \vec{V}_{\oplus} \quad (2)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{\oplus}$$

Veja que, para V_{max}, $\vec{V}_{rel}$ deve estar no mesmo sentido de $\vec{V}_{\oplus}$, e portanto o sentido de $\vec{V}_L$ deve ser contrário ao de $\vec{V}_{\oplus}$, o que corresponde à colisão ocorrendo em L_1. Sendo assim, vale que:

$$V_{max} = V_{rel} + V_{\oplus}$$

Para V_{min}, $\vec{V}_{rel}$ deve estar no sentido oposto de $\vec{V}_{\oplus}$, e portanto o sentido de $\vec{V}_L$ deve ser o mesmo de $\vec{V}_{\oplus}$, o que corresponde à colisão ocorrendo em L_2. Sendo assim, vale que:

$$V_{min} = V_{rel} - V_{\oplus}$$

Sabemos que $V_{\oplus} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}} = 29{,}787$ km/s. Por fim, substituindo V_{rel} de 1, temos:

$$\boxed{V_{max} \approx 155 \text{ km/s}} \qquad \boxed{V_{min} \approx 95{,}8 \text{ km/s}}$$

(b) Uma vez que $R_{\oplus}, R_L \ll a_L$, podemos considerar a trajetória em linha reta da Lua (mais precisamente, da Lua + asteroide) em sua queda como sendo uma elipse degenerada de eixo maior $2a = a_L$, com um dos focos na Terra (pois $M_{\oplus} \gg M_L + M_{asteroide}$). Sendo T o período de uma volta completa na elipse, temos, pela terceira lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{a_L^3}{2GM_{\oplus}}}$$

Mas o tempo de queda equivale a meio período, logo:

$$\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_L^3}{8GM_{\oplus}}}}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{(3{,}84 \cdot 10^8)^3}{8 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = 4{,}18493 \cdot 10^5 \text{ s} \approx \boxed{4{,}86 \text{ dias}}$$

OBS: Conforme vimos, é apenas válido escrever a equação 2 em nosso caso, pois desprezamos a_L em relação à $a_{\oplus}$. O certo seria efetuar a troca de referencial considerando que o referencial da Terra gira com velocidade angular ω no referencial do sol. Na prática, isso consiste em trocar $V_{\oplus}$ por ωr nas equações, sendo r a distância do asteroide ao sol e $\omega = V_{\oplus}/a_{\oplus}$ a velocidade angular orbital da terra. Note que, em L_2, $r = a_{\oplus} + a_L$, e em L_1 temos $r = a_{\oplus} - a_L$. Desta forma, as expressões para V_{max} e V_{min} seriam:

$$V_{max} = V_{rel} + \omega\,(a_{\oplus} - a_L)$$

$$V_{min} = V_{rel} - \omega\,(a_{\oplus} + a_L)$$

Como $a_L \ll a_{\oplus}$, você pode verificar que a diferença será, de fato, extremamente sutil.

5. Gigante Bismarck (20 pontos)

Durante sua visita ao Telescópio do Polo Sul, a astrônoma reptiliana Giulia decidiu ir ao Polo Sul geográfico para observar o céu noturno. Ao chegar lá, se deparou com um pequeno gigante chamado Bismarck, que dizia ter centenas de milhares de anos e já ter visto todas as estrelas do céu, tanto do norte quanto do sul, apesar de nunca ter deixado o Polo Sul geográfico. Curiosa para saber se o gigante falava a verdade, Giulia calculou a menor altura que possibilitaria tal feito (enxergar todas as estrelas do céu sem sair do Polo Sul). Considere que a Terra é aproximadamente esférica.

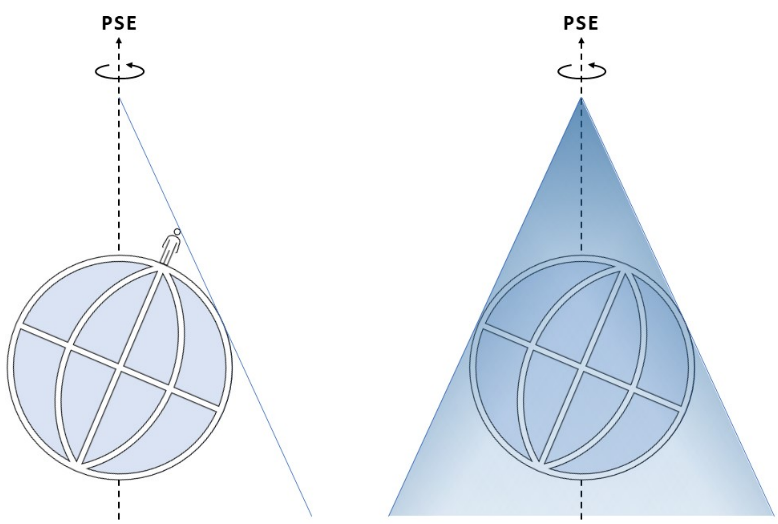
(a) **(7 pontos)** Qual foi a altura mínima h_{min} que ela encontrou?

Giulia fica maravilhada com as redondezas, e, por ter uma vida muito mais longa que a de um terráqueo, decide ficar lá por centenas de milhares de anos. No entanto, ela faz questão de ver seu satélite favorito, Shojiro. Para essa questão, assuma que Shojiro orbita com inclinação orbital de $\theta = 10°00'$ (em relação ao equador terrestre atual) e altura de $h = 40000\,\text{km}$ (em relação à superfície), e que a órbita de Shojiro é invariante com o tempo.

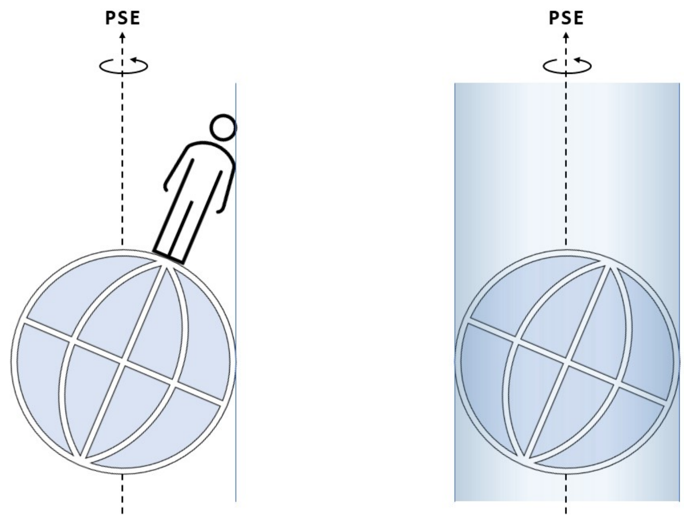
(b) **(13 pontos)** Qual a altura angular máxima com que Giula observará Shojiro?

Solução:

(a) Conforme o Polo Sul Geográfico (consequentemente Bismarck) gira entorno do Polo Sul Eclíptico, a linha do horizonte norte descreverá um cone de revolução:



Perceba que todas as direções internas ao ângulo sólido do vértice do cone não poderão ser enxergadas por Bismarck. O caso limite para que o gigante enxergue todas as estrelas do céu, incluindo aquelas no Polo Eclíptico Norte, é quando o cone se degenera em um cilindro:



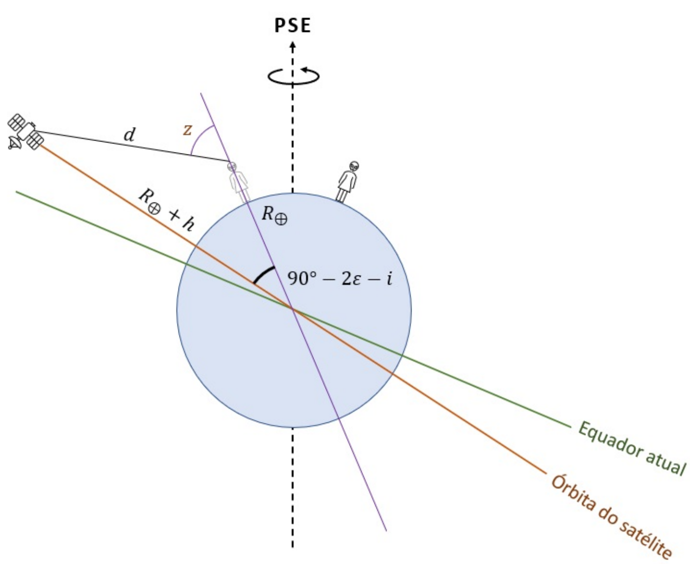
A altura H dele, portanto, pode ser calculada por:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}$$

$$H = R_\oplus\left(\frac{1}{\sin(\varepsilon) - 1}\right)$$

$$\boxed{H = 9{,}65 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}$$

(b) A situação de maximização da altura é a seguinte:



Aplicando duas leis dos cossenos:

$$d = \sqrt{R_\oplus^2 + (R_\oplus + h)^2 - 2 \cdot R_\oplus \cdot (R_\oplus + h) \cdot \cos(90^\circ - 2\varepsilon - i)}$$

$$d = 4{,}1 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

$$\cos(z) = \frac{(R_\oplus + h)^2 - R_\oplus^2 - d^2}{2 \cdot R_\oplus \cdot d}$$

$$\cos(z) = 0{,}7885$$

$$z = 38^\circ$$

A altura máxima, portanto, é $\boxed{52^\circ}$.

Questões Médias

6. **Trajetória da EEI (25 pontos)**

Por volta das 19h00min do dia 12/04/2023, a Estação Espacial Internacional (EEI) passará próximo à cidade de Barra do Piraí (latitude $\phi_B = 22^\circ 28'$S e longitude $\lambda_B = 43^\circ 50'$O), atingindo uma magnitude de até -3.2 mag. Quando observadores em Barra do Piraí veem a EEI em sua máxima altura angular, a estação estará sobrevoando um ponto P de coordenadas geográficas $\phi_P = 20^\circ 28'$S, $\lambda_P = 41^\circ 41'$O.

Para os itens a seguir, despreze a rotação da Terra e considere que a órbita da EEI seja circular e de altitude constante igual a $H = 408\,\mathrm{km}$.

(a) **(4 pontos)** Qual é a distância angular θ, ao longo da superfície da Terra, entre a cidade de Barra do Piraí e o ponto P?

(b) **(6 pontos)** Calcule a máxima altura angular h atingida nessa passagem pela EEI para os observadores em Barra do Piraí.

(c) **(15 pontos)** Calcule a separação angular ΔA entre o ponto do nascer e do ocaso da EEI nessa passagem vista por observadores em Barra do Piraí.

Solução:

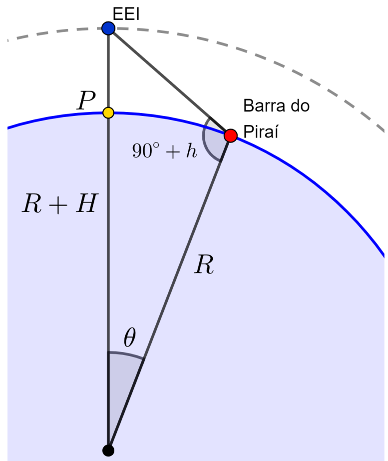
a) Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo esférico cujos vértices são o ponto P, a cidade de Barra do Piraí e o Polo Norte, obtemos:

$$\cos(\theta) = \sin(\phi_B)\sin(\phi_P) + \cos(\phi_B)\cos(\phi_P)\cos(\Delta\lambda)$$

Portanto:

$$\boxed{\theta = 2{,}83^\circ}$$

b) A seguir está um esquema da situação de máxima altura:



Aplicando a lei dos cossenos nesse triângulo:

$$s^2 = (R+H)^2 + R^2 - 2R(R+H)\cos(\theta) \Rightarrow s = 521{,}6\,\text{km}$$

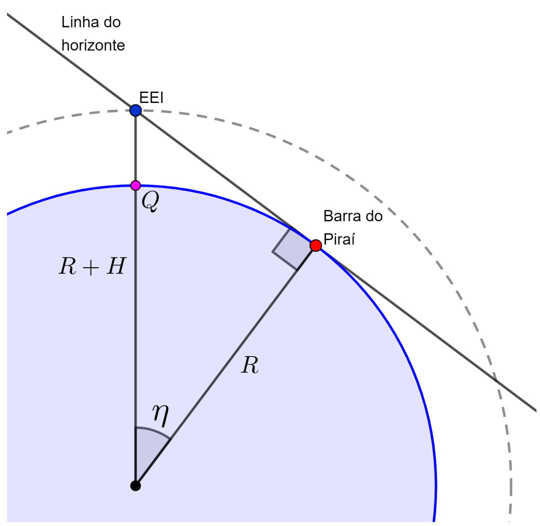
Agora, pela lei dos senos:

$$\frac{s}{\sin(\theta)} = \frac{R+H}{\sin(90° + h)} = \frac{R+H}{\cos(h)} \Rightarrow h = \arccos\left(\frac{R+H}{s}\sin(\theta)\right)$$

Logo:

$$\boxed{h = 50{,}0°}$$

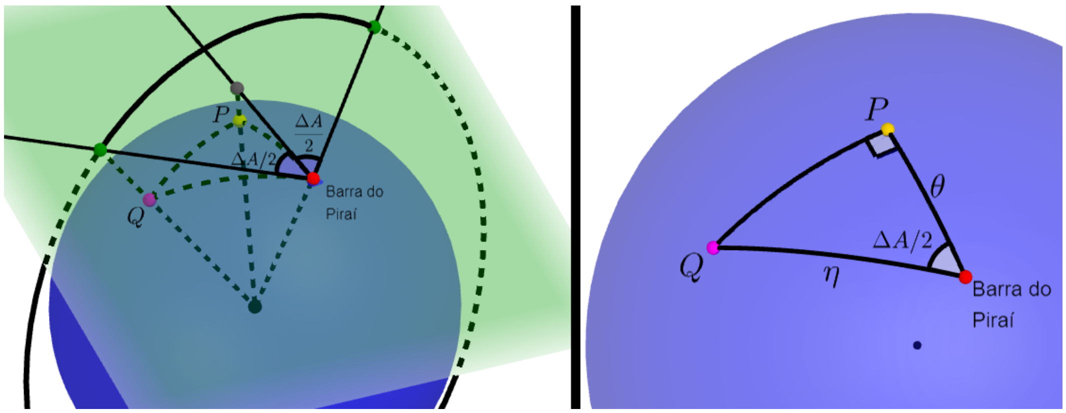
c) Primeiramente, calcularemos a separação angular η entre Barra do Piraí e o ponto Q sobre o qual a EEI estará sobrevoando quando um observador em Barra ver a estação em seu horizonte.



Por trigonometria básica, temos:

$$\cos(\eta) = \frac{R}{R+H} \Rightarrow \eta = 19{,}97^\circ$$

Com esse ângulo, podemos encontrar a separação ΔA através do triângulo esférico abaixo:



(O plano verde acima é o plano do horizonte de Barra do Piraí). Pela lei dos quatro elementos, temos:

$$\cot(\eta)\sin(\theta) = \cot(90^\circ)\sin\left(\frac{\Delta A}{2}\right) + \cos\left(\frac{\Delta A}{2}\right)\cos(\theta)$$

Portanto:

$$\Delta A = 2\arccos\left(\frac{\tan\theta}{\tan\eta}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta A = 164{,}4^\circ}$$

7. Boa janta! (30 pontos)

Após se irritar com questionamentos sobre um uso diferenciado de anzóis, Jânio Bojânio decide tirar férias jantando no planeta KLFK. O planeta em questão possui uma lua que o orbita no mesmo plano de seu equador celeste e tem uma atmosfera muito espessa e densa, que funciona como uma grande casca esférica que envolve o planeta. Como Jânio achou a lua absurdamente bonita, a janta só será boa se ele puder observar o satélite natural durante toda a refeição, assim ajude Jânio a desfrutar de uma janta sem cálculos ou anzóis!

(a) **(4 pontos)** Chegando no sistema de KLFK, Jânio nota que uma estrela de que gosta muito, Uapyle, tem magnitude aparente igual a 0 quando vista do espaço próximo do planeta. Entretanto, ao pousar no planeta, a estrela, a qual estava no zênite, teve sua magnitude aumentada para 4,34. Calcule a profundidade óptica no zênite da atmosfera de KLFK.

(b) **(14 pontos)**Jânio obteve a informação de um habitante de KLFK, Bpizza, de que a lua tem magnitude igual a $m_z = 2$ quando vista no zênite. Sabendo que a atmosfera de KLFK é homogênea e tem altura de $H = 500$ km, e que KLFK tem raio $R_p = 5100$ km, calcule qual a distância zenital máxima que ainda permite a observação lunar, tendo em vista que a atmosfera não apresenta refração atmosférica por alguma razão desconhecida. Considere que os olhos de Jânio funcionam em KLFK do mesmo jeito que na Terra; como Jânio gosta de precisão, nem pense em aproximar a atmosfera para um plano!
Dica: a profundidade óptica é proporcional a distância percorrida pelos raios de luz em um meio com opacidade constante.

(c) **(12 pontos)** O jantar está acontecendo no Pnamá, localizado no equador do planeta. Calcule qual é o intervalo de tempo em que Jânio consegue ver a lua nessas condições. Saiba que o planeta tem raio de $R_p = 5100$ km e um dia sideral de 10 h; o raio da órbita circular da lua é $R_L = 2.10^8$ m, o período orbital da lua é de 175 h, e que a lua gira no mesmo sentido de rotação de KLFK. Lembre-se de que Jânio não está no centro da esfera celeste dada a proximidade da lua com o planeta.

Solução:

(a) Se o fluxo da estrela no espaço perto de KLFK é F_0, então o fluxo visto no zênite na superfície do planeta é $F = F_0 e^{-\tau_z}$. Por pogson temos:

$$m - m_0 = -2{,}5 \log \frac{F_0 e^{-\tau_z}}{F_0}$$

$$m - m_0 = -2{,}5 \log e^{-\tau_z}$$

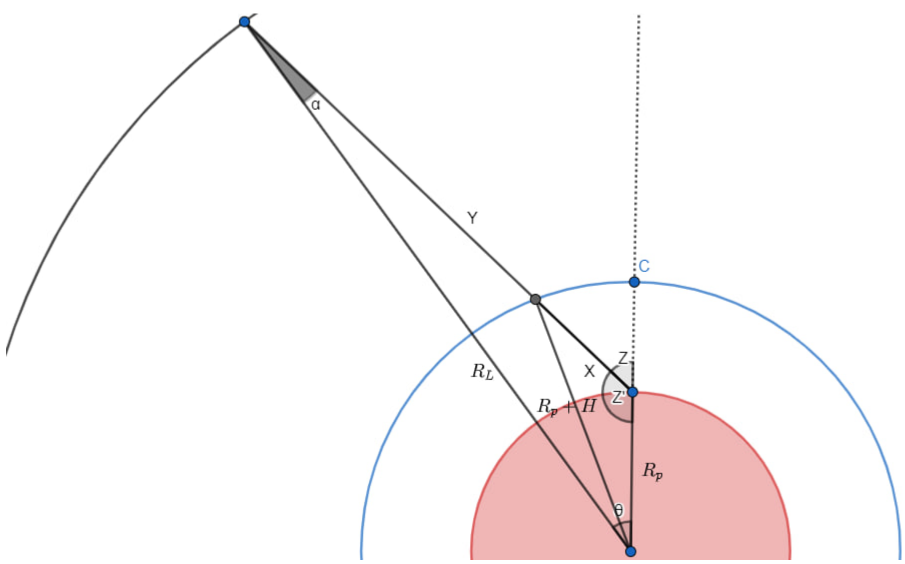
$$m - m_0 = 2{,}5 \tau_z \log e$$

$$\frac{m - m_0}{2{,}5 \log e} = \tau_z$$

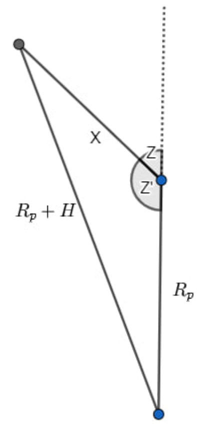
Em que m é a magnitude de Uapyle vista do planeta e m_0 é a magnitude de Uapyle vista do espaço.
Daí concluímos que:

$$\boxed{\tau_z = 4}$$

(b) Vamos começar analisando a situação por um esquema:



Para alguns ângulos ou distâncias demos nomes arbitrários, apenas note que $z' = 180^o - z$. Agora, vamos isolar apenas um triângulo dessa figura:



O fluxo vindo da lua no zênite é $F_z = F_0 e^{-\tau_z}$. Já o fluxo que Jânio recebe é $F_{lim} = F_0 e^{-\tau_{lim}}$. Por pogson temos:

$$m_z - m_{lim} = -2{,}5 \log \frac{F_z}{F_{lim}}$$

$$m_z - m_{lim} = -2{,}5 \log \frac{F_0 e^{-\tau_z}}{F_0 e^{-\tau_{lim}}}$$

$$m_z - m_{lim} = -2{,}5 \log e^{\tau_{lim} - \tau_z}$$

$$m_z - m_{lim} = -2{,}5 \left(\tau_{lim} - \tau_z\right) \log e$$

$$\frac{m_z - m_{lim}}{-2{,}5 \log e} = \tau_{lim} - \tau_z$$

$$\tau_z - \frac{m_z - m_{lim}}{2{,}5 \log e} = \tau_{lim}$$

$$\tau_{lim} = 7{,}68$$

Usando o fato de que a profundidade ótica é proporcional a distância que a luz percorre se estivermos em um meio com opacidade constante podemos utilizar a seguinte relação (chamamos de x a distância que queremos encontrar):

$$\frac{\tau_z}{\tau_{lim}} = \frac{H}{x}$$

Daí concluimos que $x \approx 960km$, que é a distância que os raios de luz da lua percorrem dentro da atmosfera de KLFK.

Aplicando a lei dos cossenos temos:

$$\left(R_p + H\right)^2 = R_p^2 + x^2 - 2R_p x \cos z'$$

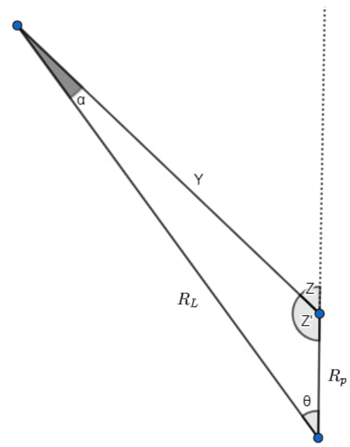
$$\cos z' = \frac{R_p^2 + x^2 - (R_p + H)^2}{2R_p x}$$

$$z' = 116{,}9^o$$

Logo,

$$\boxed{z = 63{,}1^o}$$

(c) Agora vamos usar o outro triângulo do esquema do item anterior:



Aplicando a lei dos senos temos:

$$\frac{\sin z'}{R_L} = \frac{\sin \alpha}{R_p}$$

$$\alpha = 1{,}3^o$$

Pela soma dos ângulos internos do triângulo:

$$180^o - z' - \alpha = \theta$$

$$\theta = 61{,}8^o$$

Perceba que o ângulo que encontramos é justamente o ângulo que a lua percorre na metade do tempo total de visibilidade dela, assim basta sabermos qual é a velocidade angular aparente dela no céu e poderemos encontrar o tempo procurado usando $t = \frac{2\theta}{\omega_{ap}}$. Como KLFK rotaciona no mesmo sentido que a lua, podemos encontrar ω_{ap} subtraindo a velocidade angular da lua da velocidade angular de KLFK, assim:

$$\omega_{ap} = \frac{2\pi}{P_{rot}} - \frac{2\pi}{P_{lua}}$$

$$t = \frac{2\theta}{\omega_{ap}}$$

$$\boxed{t = 3{,}64\ \text{h}}$$

Assim, encontramos que Jãnio pode ter uma boa janta durante 3,64 h!

8. Da Terra ao Sol (45 pontos)

Com o objetivo de estudar mais a fundo a fotosfera do Sol, um certo grupo de cientistas decide construir uma vela solar que ficaria estacionária, no espaço, 6,30 milhões de quilômetros acima da **superfície** da estrela. Como essa vela ficará submetida a uma temperatura de 4430 K em sua posição final, ela é feita de um material com alto ponto de fusão, coeficiente de dilatação superficial $\beta = 9{,}00 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ e superfície perfeitamente refletora. Além disso, ela ficará sempre voltada para a estrela, de forma que a luz chegue perpendicularmente à sua superfície. Por fim, a maior parte da massa da vela está concentrada em um computador de 8 kg em seu centro. Para os cálculos abaixo, desconsidere o arrasto e a atração gravitacional dos planetas.

(a) **(10 pontos)** Ajude esses cientistas e calcule com qual área essa vela precisa ser fabricada, considerando que a confecção será feita em um laboratório na Terra, a uma temperatura de 15° C.

Devido a um erro em sua construção, a vela foi fabricada com aproximadamente 95% da área calculada no item anterior.

(b) **(15 pontos)** Suponha que a vela parta do repouso na posição em que fora inicialmente projetada para se manter em equilíbrio. Considerando, a priori, que a temperatura não varia em função da distância à estrela, estime quanto tempo demoraria para que a vela chegue à fotosfera.

Na verdade, uma análise mais detalhada deve considerar que a temperatura, de fato, varia em função da distância à estrela. Podemos considerar que, dentro de uma faixa, essa relação segue a função:

$$T = T' - q \cdot r^2 \cdot (r - r_0)$$

Em que T', q e r_0 são constantes, e r é a distância até o **centro** da estrela.

(c) **(13 pontos)** Sabe-se que o movimento, nessa faixa, é um M.H.S. entorno da distância de $6{,}82 \cdot 10^9$ m até o **centro** da estrela. Também é sabido que o ponto no qual a vela fora inicialmente projetada para repousar pertence a essa faixa. Visto isso, calcule T', q e r_0.

(d) **(7 pontos)** Qual é o período desse M.H.S.?

Solução:

(a) A pressão de radiação que age na vela e a força proveniente desta, dada que esta reflete toda a luz incidente, podem ser, respectivamente, calculadas por:

$$P_r = \frac{2 \cdot f}{c} = \frac{2 \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2}$$

$$P_r = \frac{F_r}{A} \Longrightarrow F_r = \frac{L \cdot A}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2}$$

Para que a vela fique estacionária no espaço, essa força deve se igual, em modulo, à força gravitacional exercida pelo Sol:

$$F_r = F_g \Longrightarrow \frac{L \cdot A}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

$$A = \frac{2 \cdot \pi \cdot c \cdot G \cdot M \cdot m}{L}$$

$$\Longrightarrow A \approx 5{,}23 \cdot 10^3 \ m^2$$

Entretanto, devido à dilatação térmica, a vela deve ser fabricada com uma área $A_0 < A$:

$$\Delta A = A - A_0 = A_0 \cdot \beta \cdot \Delta T$$

$$A = A_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T) \Longrightarrow A_0 = \frac{A}{1 + \beta \cdot \Delta T}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_0 \approx 5{,}04 \cdot 10^3 \ m^2}$$

(b) Sabe-se que:

$$A_0' = 0{,}95 \cdot A_0' = 4{,}79 \cdot 10^3 \ m^2$$

$$A' = A_0' \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T) \Longrightarrow A' = 4{,}96 \cdot 10^3 \ m^2$$

Como $A' < A$ a força da pressão de radiação será menor que a gravitacional ($F_r < F_g$), portanto a resultante, F, pode ser calculada por:

$$F = F_g - F_r = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} - \frac{L \cdot A'}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2} = \frac{m}{r^2} \cdot \left(G \cdot M - \frac{L \cdot A'}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot c} \right)$$

$$F = \frac{k \cdot m}{r^2}$$

Como k é uma constante, chegamos em uma fórmula análoga à da força gravitacional. Portanto, são válidas as leis de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{k} \Longrightarrow P = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{k}}$$

A trajetória da vela pode ser considerada com uma elipse degenerada de excentricidade $e = 1$, semi-eixo maior $a = (R_\odot + h)/2$, e foco no centro do Sol, como na figura abaixo:

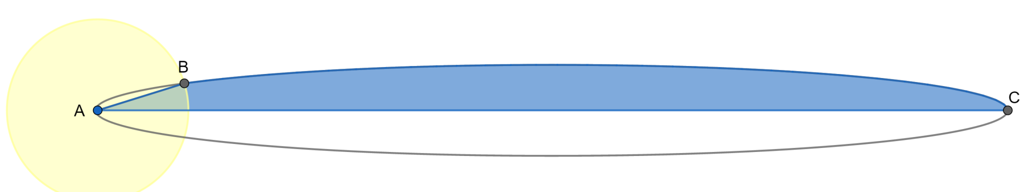


Figura 2: A, B e C representem, respectivamente, o centro do sol, o ponto de impacto e a posição inicial da vela.

Durante o trajeto, a vela vai percorrer a área azul, que pode ser aproximada para metade da área da elipse, já que a distância da vela ao foco é muito maior que o raio do Sol (o calculo exato dessa área pode ser encontrado no final dessa resolução). Assim, podemos utilizar a segunda lei de Kepler para encontrar quanto tempo vai demorar para a vela chegar em B.

$$\frac{\Delta t}{P} = \frac{A_{\text{azul}}}{A_T} \Longrightarrow \Delta t = \frac{P}{2}$$

Substituindo P, a e k na fórmula acima, obtemos:

$$\Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{(R_\odot + h)^3}{2 \cdot G \cdot M - \frac{L \cdot A'}{\pi \cdot m \cdot c}}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta t \approx 2{,}53 \cdot 10^5\,\text{s} = 2\,\text{dias}\,22\,\text{h}}$$

(c) A partir da força resultante calculada no item (b), temos:

$$m \cdot \ddot{r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} + \frac{L \cdot A}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2}$$

Em que $A = A_0 \cdot (1 + \beta \cdot (T - T_0)) = A_0 \cdot (1 + \beta \cdot [T' - T_0 - q \cdot r^2 \cdot (r - r_0)])$.

$$m \cdot \ddot{r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} + \frac{L \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2} \cdot (1 + \beta \cdot [T' - T_0]) - \frac{L \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2} \cdot \beta \cdot q \cdot r^2 \cdot (r - r_0)$$

Seja $x = r - r_0$, temos que $\ddot{x} = \ddot{r}$

$$m \cdot \ddot{x} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} + \frac{L \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2} \cdot (1 + \beta \cdot [T' - T_0]) - \frac{L \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot c} \cdot \beta \cdot q \cdot x$$

Para que essa seja a equação de um oscilador harmônico:

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} + \frac{L \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot r^2} \cdot (1 + \beta \cdot [T' - T_0]) = 0$$

$$T' = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot c \cdot G \cdot M \cdot m}{L \cdot A_0} - 1\right) + T_0$$

$$\boxed{T' = 10.495\ K}$$

A equação do M.H.S. fica:

$$m \cdot \ddot{x} = -\frac{L \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot c} \cdot \beta \cdot q \cdot x$$

Percebe-se que o ponto de equilíbrio ($x = 0$) equivale a $r = r_0$. Sendo assim:

$$\boxed{r_0 = 6{,}82 \cdot 10^9\ m}$$

Substituindo, por fim, a temperatura no outro ponto fornecido:

$$4430\ K = 10.495\ K - q \cdot \left(7 \cdot 10^9\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot \left(7 \cdot 10^9\,\mathrm{m} - 6{,}82 \cdot 10^9\,\mathrm{m}\right)$$

$$\boxed{q = 6{,}9 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{K\,m^{-3}}}$$

(d) Um M.H.S. pode ser escrito na forma:

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$$

Em que ω é a frequência angular. Para o caso estudado:

$$\omega^2 = \frac{L \cdot A_0 \cdot \beta \cdot q}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot m}$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{L \cdot A_0 \cdot \beta \cdot q}{2 \cdot \pi \cdot c \cdot m}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot c \cdot m}{L \cdot A_0 \cdot \beta \cdot q}}$$

$$\boxed{T = 2{,}29 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{dias}\,15\,\mathrm{h}}$$

Apêndice: resolução do item (b) utilizando cálculo

A área azul pode ser dividida em três:

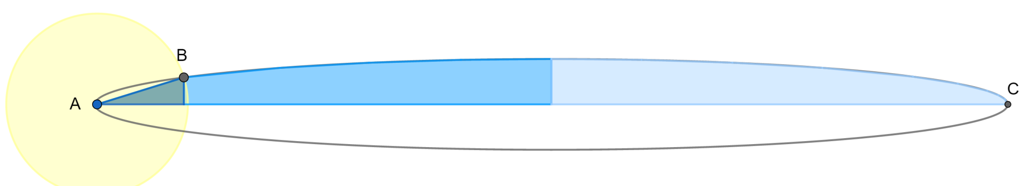


Figura 3: A_1: área mais clara, A_2: área central e A_3: área mais escura

$$A_1 = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4}$$

Para calcular as outras áreas precisamos da função da elipse. Colocando o centro do plano cartesiano em A e o eixo x sobre a reta AC:

$$\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\Longrightarrow y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2\right)$$

Assim, a altura do triângulo de área A_3 vale:

$$y_2 = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R_\odot - a}{a}\right)^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot R_\odot \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R_\odot - a}{a}\right)^2}$$

Já para calcular A_2 temos que encontrar a área em baixo da elipse de $x_1 = R_\odot$ até $x_2 = a$:

$$A_2 = \int_{R_\odot}^{a} y\ dx = b \cdot \int_{R_\odot}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2}\ dx = \frac{b}{a} \cdot \int_{R_\odot}^{a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2}\ dx$$

Com $x - a = a \cdot \sin u \implies dx = a \cdot \cos u\ du$:

$$u_1 = \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot - a}{a}\right), \qquad u_2 = 0$$

$$A_2 = a \cdot b \cdot \int_{u_1}^{0} \cos u \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u}\ du = a \cdot b \cdot \int_{u_1}^{0} \cos^2 u\ du$$

Como $\cos 2u = 2 \cdot \cos^2 u - 1 \implies \cos^2 u = \dfrac{\cos 2u}{2} + \dfrac{1}{2}$:

$$A_2 = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \left[\int_{u_1}^{0} \cos 2u\ du + \int_{u_1}^{0}\ du\right] = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \left[\frac{\sin 2u}{2} + u\right]_{u_1}^{0}$$

$$A_2 = -\frac{a \cdot b}{2}\left(u_1 + \sin u_1 \cdot \cos u_1\right) = -\frac{a \cdot b}{2}\left(\sin^{-1}\left(\frac{R_\odot - a}{a}\right) + \frac{R_\odot - a}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R_\odot - a}{a}\right)^2}\right)$$

Agora, na Segunda Lei de Kepler:

$$\implies \frac{A_{\text{azul}}}{A_T} \approx 0.493$$

$$\implies \Delta t \approx 0{,}493 \cdot \pi \cdot \frac{(R_\odot + h)^3}{2GM - \dfrac{L \cdot A'}{\pi \cdot m \cdot c}}\ s$$

$$\implies \boxed{\Delta t \approx 2{,}48 \cdot 10^5\ s}$$

Como podemos ver, a aproximação utilizada na primeira resolução é muito precisa.

Questões Longas

9. A guerra das mecânicas (65 pontos)

Durante os séculos XVII e XVIII, duas formas de enxergar a realidade física travaram uma verdadeira guerra por adeptos na comunidade científica, tratam-se das mecânicas cartesiana e newtoniana. Esta dispensa apresentações; aquela foi um modelo proposto por Descartes que visava, entre outras coisas, entender os fenômenos a partir de forças de contato. Por exemplo, ao girar uma colher em um copo d'água com partículas não solubilizadas, o movimento de rotação cria um vórtice, cujo fluxo arrasta as partículas, fazendo-as girar entorno da colher; similarmente, a rotação do Sol provocaria, no *éter*, um vórtice responsável pela translação dos planetas.

Uma das alternativas para comparar as mecânicas é deduzir os raios equatorial e polar da Terra. Segundo o modelo cartesiano, o vórtice gerado pela rotação terrestre reduziria o raio equatorial, como se estivesse sugando o Equador, enquanto a física de Newton prevê o contrário: o Equador, como se fosse empurrado pela força centrífuga, seria expandido. Outra alternativa é explorar como as mecânicas se relacionam com as leis do movimento planetário.

(a) **(3 pontos)** Para um vórtice que gira entorno de um único ponto, é válida a conservação de momento angular específico ao longo de todo o fluido. Ou seja, se uma partícula acompanha o fluxo do fluido, a razão entre seu momento angular e sua massa depende apenas do vórtice a que está submetida. Visto isso, prove que a mecânica cartesiana não respeita a lei harmônica de Kepler.

(b) **(2 pontos)** Prove que, para órbitas circulares, a mecânica newtoniana está de acordo com a lei harmônica de Kepler.

(c) **(15 pontos)** Determine a latitude geocêntrica φ_G em função da latitude astronômica φ para um planeta de raio equatorial R_e e raio polar R_p. Assuma que a secção transversal da Terra seja elíptica.

Dado: Latitude geocêntrica é o ângulo entre o Equador e o observador, com vértice no centro do planeta. Já latitude astronômica é a altura do polo elevado (considerando um horizonte idealmente plano)

(d) **(20 pontos)** Encontre a distância R de um ponto ao centro da Terra em função da latitude astronômica φ, do raio equatorial R_e e do raio polar R_p.

(e) **(8 pontos)** Suponha que, na tentativa de comparar os raios, Jânio e Chefia fizeram algumas expedições. Em um dado instante, ambos observavam as estrelas Dubhe (ascensão reta: $11\,\text{h}\,05\,\text{min}\,08{,}9\,\text{s}$; declinação: $61^\circ\,37'\,40{,}2"$) e Merak (ascensão reta: $11\,\text{h}\,03\,\text{min}\,13{,}9\,\text{s}$; declinação: $56^\circ\,15'\,31{,}3"$). Jânio media distâncias zenitais iguais a $8^\circ\,22{,}3'$ e $13^\circ\,44{,}5'$, respectivamente, enquanto Chefia, acampando a uma distância $d = 55{,}5\,\text{km}$ do primeiro, media as distâncias zenitais $8^\circ\,52{,}3'$ e $14^\circ\,14{,}5'$, respectivamente. Sabendo disso, estime as latitudes astronômicas dos dois.

(f) **(8 pontos)** Em outra expedição, em um dado momento, os dois observaram Mintaka (Ascensão reta: $5\,\text{h}\,32\,\text{min}\,00{,}4\,\text{s}$; declinação: $-0^\circ\,17'\,56{,}7"$) no zênite. Eles então iniciaram imediatamente um deslocamento rumo ao Sul com velocidade de 100km/h. Uma hora depois, a distância zenital de Mintaka era $15^\circ\,01{,}58'$. Sabendo disso, calcule os raios Equatorial e Polar da Terra. Utilize algarismos significativos até a casa da unidade de quilômetro.

(g) **(9 pontos)** Em realidade, o raio equatorial da Terra é 6.371km. A partir da mecânica newtoniana, encontre o raio polar do planeta.

Solução:

(a) Seja u a velocidade em um ponto do fluxo distando a do vórtice, o momento angular pode ser escrito como:

$$h = u \cdot a$$

Já u pode ser escrito em função do raio de órbita a e do período de órbita T:

$$u = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{T}$$

Assim:

$$\frac{a^2}{T} = \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

$$\frac{a^4}{T^2} = \frac{h^2}{4 \cdot \pi^2}$$

O termo $h^2/4\pi^2$ é constante. Portanto, o quadrado do período é proporcional à quarta potência do raio nesse modelo, o que contradiz a lei harmônica, a qual afirma que essa proporção devia se dar com o cubo do raio.

(b) Igualando a aceleração gravitacional e a aceleração centrípeta, temos:

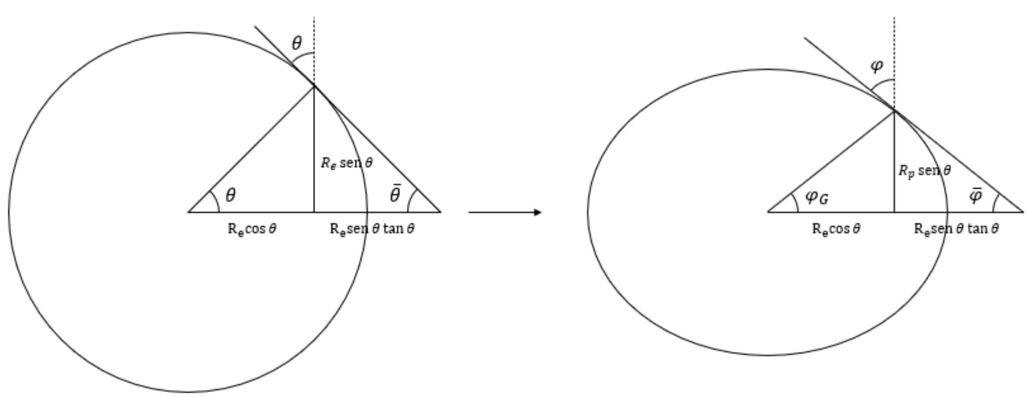
$$\frac{GM}{a^2} = \frac{u^2}{a}$$

$$\frac{GM}{a^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^2}{T^2 \cdot a}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4 \cdot \pi^2}$$

O termo $GM/4\pi^2$ é constante. Portanto, o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio nesse modelo, assim como diz a lei harmônica.

(c) Vamos partir de uma circunferência de raio R_e, na qual marcaremos o ângulo θ. Para transformá-la em uma elipse, basta aplicar a transformação linear, conforme mostrado:



Percebe-se que:

$$\tan(\varphi_G) = \frac{R_p \cdot \sin(\theta)}{R_e \cdot \cos(\theta)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{R_e}{R_p} \cdot \tan(\varphi_G)$$

Também se conclui:

$$\tan(\bar{\varphi}) = \frac{R_p \cdot \sin(\theta)}{R_e \cdot \sin(\theta) \cdot \tan(\theta)}$$

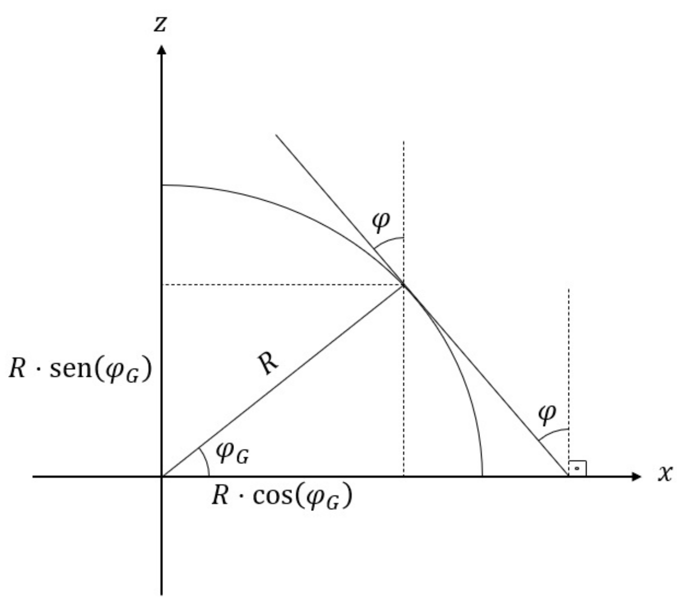
$$\tan(\theta) = \frac{R_p}{R_e} \cdot \tan(\varphi)$$

Logo:

$$\boxed{\tan(\varphi_G) = \frac{R_p^2}{R_e^2} \cdot \tan(\varphi)}$$

Solução por cálculo:

Vamos definir um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro da elipse, cujo eixo z aponta para o Polo Celeste Norte. Por simetria, a secção transversal do planeta é igual para qualquer plano que contenha o eixo z. Sendo assim, vamos arbitrariamente optar por analisar o plano xz:



O lugar geométrico dos pontos pertencentes à superfície da secção terrestre é dado por:

$$\left(\frac{x}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{z}{R_p}\right)^2 = 1$$

Derivando implicitamente a equação:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{R_e}\right) \cdot \frac{1}{R_e} + 2 \cdot \left(\frac{z}{R_p}\right) \cdot \frac{1}{R_p} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} \cdot \frac{R_p^2}{R_e^2}$$

Pela imagem:

$$\frac{x}{z} = \cot\left(\varphi_G\right)$$

Como a derivada é a tangente do ângulo que a abscissa faz com a reta:

$$\frac{dz}{dx} = \tan\left(\varphi + 90^\circ\right) = -\cot\left(\varphi\right)$$

Realizando-se as substituições:

$$-\cot\left(\varphi\right) = -\cot\left(\varphi_G\right) \cdot \frac{R_p^2}{R_e^2}$$

$$\tan\left(\varphi_G\right) = \frac{R_p^2}{R_e^2} \cdot \tan\left(\varphi\right)$$

(d) No item anterior, encontramos que:

$$\tan\left(\theta\right) = \frac{R_p}{R_e} \cdot \tan\left(\varphi\right)$$

De onde tiramos:

$$\sin\left(\theta\right) = \frac{R_p/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)}{\sqrt{1 + \left[R_p/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)\right]^2}}$$

$$R_p \cdot \sin\left(\theta\right) = \frac{R_p^2/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)}{\sqrt{1 + \left[R_p/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)\right]^2}}$$

E

$$R_e \cdot \cos\left(\theta\right) = \frac{R_e}{\sqrt{1 + \left[R_p/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)\right]^2}}$$

Logo:

$$R^2 = \left[\frac{R_p^2/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)}{\sqrt{1 + \left[R_p/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)\right]^2}}\right]^2 + \left[\frac{R_e}{\sqrt{1 + \left[R_p/R_e \cdot \tan\left(\varphi\right)\right]^2}}\right]^2$$

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{R_e^4 + R_p^4 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)}{R_e^2 + R_p^2 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)}}}$$

Solução por geometria analítica:

O lugar geométrico dos pontos pertencentes à superfície da secção terrestre é dado por:

$$\left(\frac{x}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{z}{R_p}\right)^2 = 1$$

Percebe-se que:

$$x = R \cdot \cos\left(\varphi_G\right)$$

$$z = R \cdot \sin\left(\varphi_G\right)$$

Assim:

$$R^2 \cdot \left[\left(\frac{\cos\left(\varphi_G\right)}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left(\varphi_G\right)}{R_p}\right)^2\right] = 1$$

Os quadrados do seno e do cosseno se relacionam com a tangente a partir das seguintes identidades:

$$\cos^2\left(x\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(x\right)}$$

$$\sin^2\left(x\right) = \frac{\tan^2\left(x\right)}{1 + \tan^2\left(x\right)}$$

Logo:

$$R^2 \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \tan^2\left(\varphi_G\right)\right) \cdot R_e^2} + \frac{\tan^2\left(\varphi_G\right)}{\left(1 + \tan^2\left(\varphi_G\right)\right) \cdot R_p^2}\right] = 1$$

Substituindo-se $\tan^2\left(\varphi_G\right) = \tan^2\left(\varphi\right) \cdot R_p^4/R_e^4$:

$$R^2 \cdot \left[\frac{R_e^2}{R_e^4 + R_p^4 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)} + \frac{R_p^2 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)}{R_e^4 + R_p^4 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)}\right] = 1$$

$$R = \sqrt{\frac{R_e^4 + R_p^4 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)}{R_e^2 + R_p^2 \cdot \tan^2\left(\varphi\right)}}$$

(e) Percebe-se que as ascensões retas das duas estrelas são muito próximas. A distância entre as estrelas, portanto, é aproximadamente

$$\theta_{Dubhe\text{-}Merak} = \delta_{Dubhe} - \delta_{Merak} = 5^\circ\, 22{,}1'$$

Já as diferenças de distância zenital são:

$$\Delta z_J = z_{Merak,J} - z_{Dubhe,J} = 5^\circ\, 22{,}2'$$

$$\Delta z_C = z_{Merak,C} - z_{Dubhe,C} = 5^\circ\, 22{,}2'$$

Sendo assim, podemos concluir que os dois observadores estão no mesmo meridiano das duas estrelas, mais próximos de Dubhe do que de Merak (ou seja, mais ao norte), e suas latitutes são:

$$\varphi_J = \delta_{Dubhe} + z_{Dubhe,\ J} = \delta_{Merak} + z_{Merak,\ J}$$

$$\boxed{\varphi_J = 70^\circ\, 00'}$$

$$\varphi_C = \delta_{Dubhe} + z_{Dubhe,\ C} = \delta_{Merak} + z_{Merak,\ C}$$

$$\boxed{\varphi_C = 70^\circ\, 30'}$$

Solução por transformação de coordenadas:

Dado que as estrelas apresentam mesma ascensão reta, elas também apresentam mesmo ângulo horário:

$$H_D = H_M$$

$$\cos(H_D) = \cos(H_M)$$

Pela fórmula de transformações de coordenadas:

$$\cos(z) = \sin(\varphi)\cdot\sin(\delta) + \cos(\varphi)\cdot\cos(\delta)\cdot\cos(H)$$

$$\cos(H) = \frac{\cos(z) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\delta)}{\cos(\varphi)\cdot\cos(\delta)}$$

Logo:

$$\frac{\cos(z_D) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\delta_D)}{\cos(\varphi)\cdot\cos(\delta_D)} = \frac{\cos(z_M) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\delta_M)}{\cos(\varphi)\cdot\cos(\delta_M)}$$

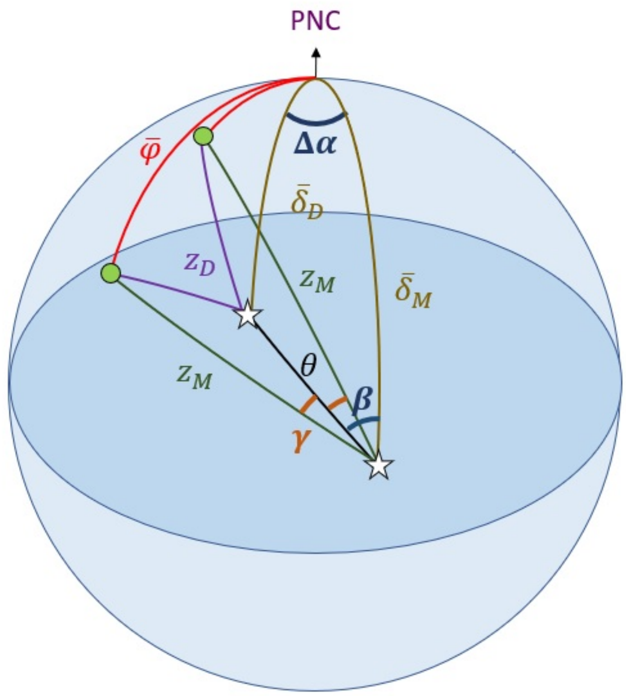
$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\tan(\delta_D) - \tan(\delta_M)}\cdot\left(\frac{\cos(z_D)}{\cos(\delta_D)} - \frac{\cos(z_M)}{\cos(\delta_M)}\right)$$

$$\varphi_J = 70^\circ\, 00{,}1'$$

$$\varphi_C = 70^\circ\, 30{,}2'$$

Solução por triangulação:

Observe a seguinte construção:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(\theta) = \cos(\bar{\delta}_D) \cdot \cos(\bar{\delta}_M) + \sin(\bar{\delta}_D) \cdot \sin(\bar{\delta}_M) \cdot \cos(\Delta\alpha)$$

$$\cos(\theta) = 0{,}99560$$

$$\theta = 5^\circ\, 22{,}5'$$

Pela lei dos cossenos, encontramos o cosseno de β:

$$\cos(\bar{\delta}_D) = \cos(\theta) \cdot \cos(\bar{\delta}_M) + \sin(\theta) \cdot \sin(\bar{\delta}_M) \cdot \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = 0{,}99910$$

Como os senos de $\bar{\delta}_D$, θ e $\Delta\alpha$ são todos positivos, o seno de β também deve ser, pela lei dos senos. Assim:

$$\beta = 2^\circ\, 25{,}9'$$

Pela lei dos cossenos, encontramos o cosseno de γ:

$$\cos(z_D) = \cos(\theta) \cdot \cos(z_M) + \sin(\theta) \cdot \sin(z_M) \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma_J) = 0{,}99945$$

$$\gamma_J = 1^\circ\, 53{,}7'$$

$$\cos(\gamma_C) = 0{,}99944$$

$$\gamma_C = 1^\circ\, 55{,}0'$$

Por fim, encontramos a latitude dos observadores a partir da lei dos cossenos:

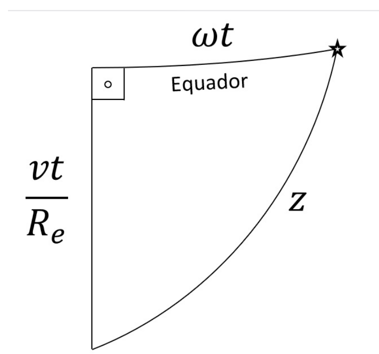
$$\cos(\bar{\varphi}) = \cos(z_M) \cdot \cos(\bar{\delta}_M) + \sin(z_M) \cdot \sin(\bar{\delta}_M) \cdot \cos(\beta \pm \gamma)$$

Assim:

$$\varphi_J = 70^\circ\, 00{,}0' \,\text{ou}\, 69^\circ\, 56{,}2'$$

$$\varphi_C = 70^\circ\, 30{,}0' \,\text{ou}\, 70^\circ\, 26{,}0'$$

(f) Como a declinação de Mintaka é quase nula, o observador encontra-se no equador. A partir dos dados fornecidos, podemos montar o seguinte triângulo esférico:



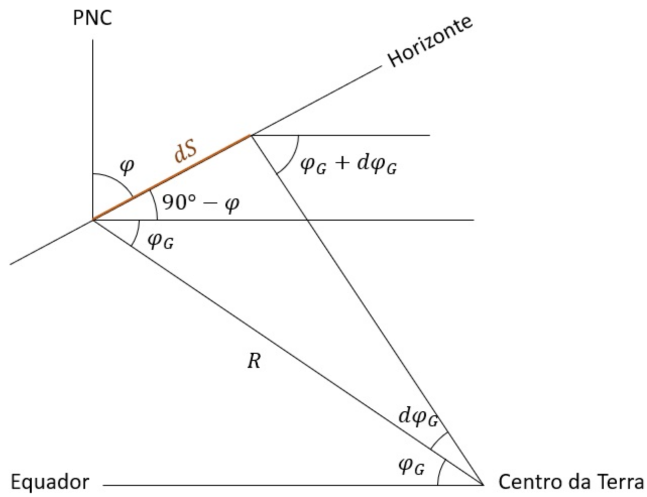
Em que ω é a frequência angular de rotação da Terra, isto é, 15°/h. Pela lei dos cossenos:

$$\cos(z) = \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(v \cdot t / R_e)$$

$$R_e = \frac{v \cdot t}{\cos^{-1}\left[\cos(z)/\cos(\omega \cdot t)\right]}$$

$$\boxed{R_e = 6.369\text{km}}$$

Vamos agora avaliar o raio terrestre na latitude do acampamento do item anterior:



Pela lei dos senos:

$$\frac{R}{\sin(90° - \varphi + \varphi_G + d\varphi_G)} = \frac{dS}{\sin(d\varphi_G)}$$

$$R = \frac{dS \cdot \cos(\varphi - \varphi_G)}{d\varphi_G}$$

Para latitudes próximas, em módulo, de 45°, o erro que cometemos ao aproximar $\varphi_G \approx \varphi$ é máximo. Já para aquelas muito altas ou muito baixas, essa aproximação é válida. Assim:

$$R \approx \frac{dS}{d\varphi}$$

$$R = 6.360\,\text{km}$$

Pela equação desenvolvida no item (b):

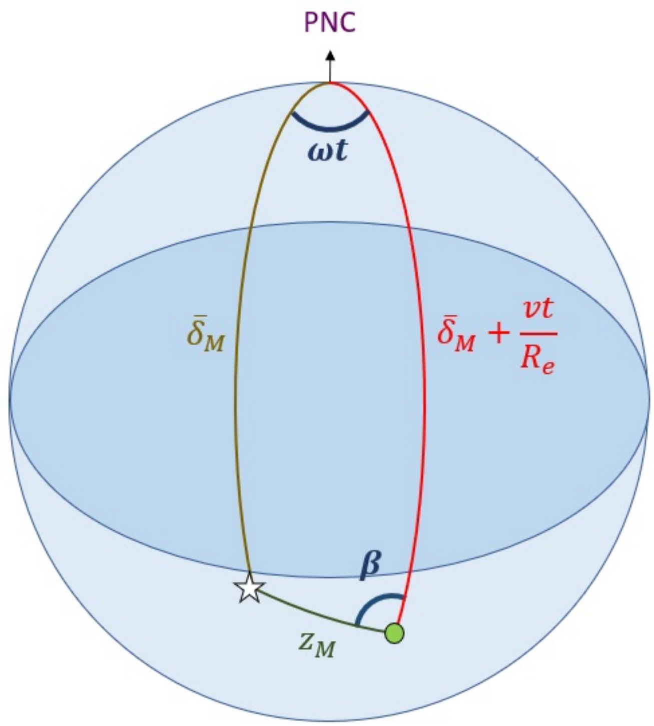
$$R^2 = \frac{R_e^4 + R_p^4 \cdot \tan^2(\varphi)}{R_e^2 + R_p^2 \cdot \tan^2(\varphi)}$$

Substituindo-se φ por 70° ou por 70,5° e resolvendo a equação biquadrada, encontramos:

$$\boxed{R_p = 6.359\text{km}}$$

Solução sem aproximação:

Observe o seguinte triângulo esférico:



Pela lei dos senos:

$$\sin(\beta) = \sin(\bar{\delta}_M) \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\sin(z_M)}$$

$$\sin(\beta) = 0{,}99827$$

Como o deslocamento é para o Sul, a geometria da situação garante β agudo:

$$\beta = 86^\circ\, 38{,}0'$$

Aplicaremos duas leis dos cossenos:

$$\cos(z_M) = \cos(\bar{\delta}_M) \cdot \cos(\bar{\delta}_M + vt/R_e) + \sin(\bar{\delta}_M) \cdot \sin(\bar{\delta}_M + vt/R_e) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\cos(\bar{\delta}_M) = \cos(z_M) \cdot \cos(\bar{\delta}_M + vt/R_e) + \sin(z_M) \cdot \sin(\bar{\delta}_M + vt/R_e) \cdot \cos(\beta)$$

Como o cosseno de uma distância angular é suficiente para defini-la, combinamos as duas equações para encontrar o cosseno de $\bar{\delta}_M + vt/R_e$:

$$\frac{\cos(z_M) - \cos(\bar{\delta}_M) \cdot \cos(\bar{\delta}_M + vt/R_e)}{\sin(\bar{\delta}_M) \cdot \cos(\omega \cdot t)} = \frac{\cos(\bar{\delta}_M) - \cos(z_M) \cdot \cos(\bar{\delta}_M + vt/R_e)}{\sin(z_M) \cdot \cos(\beta)}$$

$$\cos(\bar{\delta}_M + vt/R_e) = -0{,}02117$$

$$\bar{\delta}_M + \frac{v \cdot t}{R_e} = 91^\circ\, 12{,}8'$$

$$\frac{v \cdot t}{R_e} = 0{,}01594\,\text{rad}$$

$$R_e = 6.271\,\text{km}$$

Por procedimento análogo a da solução anterior, a equação biquadrada resulta em:

$$R_p = 6371\,\text{km}$$

Perceba que os erros atrelados fizeram com que a Terra parecesse seguir a mecânica cartesiana. Esse é um demonstrativo da sensibilidade das medidas da variação do raio terrestre.

(g) No Equador, o potencial é igual ao potencial gravitacional mais o potencial centrífugo:

$$U = -\frac{GM}{R_e} - \frac{\omega^2 \cdot R_e^2}{2}$$

$$U = -62{,}6\,\text{MJ/kg}$$

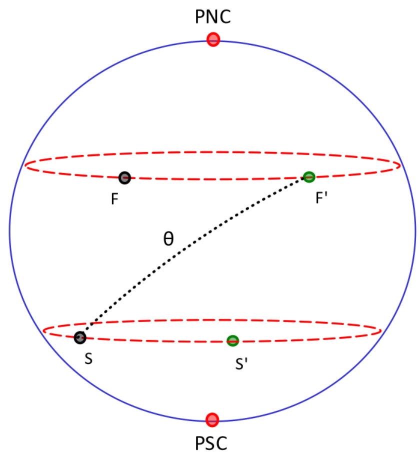
Para que a Terra esteja em equilíbrio, o potencial deve ser o mesmo nos polos:

$$U = -\frac{GM}{R_p}$$

$$\boxed{R_p = 6.360\text{km}}$$

10. Lançando um míssil (65 pontos)

Bismarck, em seu projeto de finalização de curso para se tornar um engenheiro, decide construir um míssil e lançá-lo de presente a um de seus grandes amigos: Ualype, que passava suas férias tranquilamente em Fortaleza/CE. Em sua construção, o míssil é adaptado para possuir uma órbita de semi-eixo maior igual ao raio da Terra. Como objetivo da missão, o míssil sai de São José dos Campos (ϕ_S, λ_S) com destino à Fortaleza (ϕ_F, λ_F). Na imagem abaixo, temos a posição inicial (F, S) e final (F', S') das cidades, representando, respectivamente, o momento de lançamento e o momento de chegada do míssil, cuja trajetória, por sua vez, é representada pelo arco esférico θ.



Trajetória do míssil; {F, F'} e {S, S'} são, respectivamente, Fortaleza e São José dos Campos.

De modo a ajudar Bismarck em seu projeto, responda os itens a seguir. Desconsidere efeitos atmosféricos e lembre-se de considerar a rotação da Terra.

(a) **(6 pontos)** Encontre uma expressão para a excentricidade e da órbita do míssil como função do ângulo θ.

(b) **(12 pontos)** Encontre uma expressão para a duração da viagem do míssil t_m como função do ângulo θ, da massa M_T e do raio R_T da Terra e da constante gravitacional G.

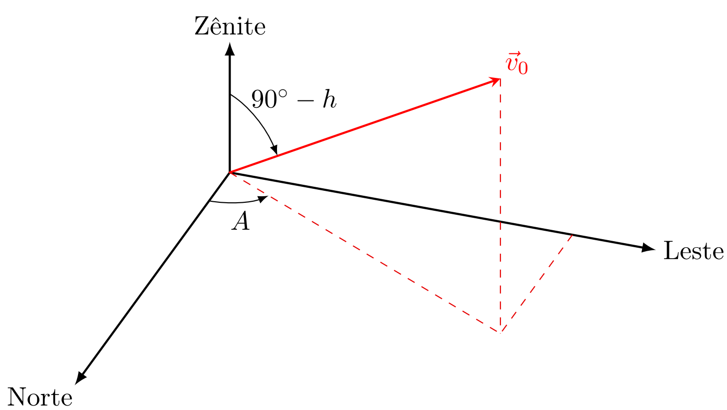
(c) **(6 pontos)** Encontre uma expressão para o ângulo θ em funções das coordenadas de São José dos Campos (ϕ_S, λ_S), das coordenadas de Fortaleza (ϕ_F, λ_F), da duração da viagem t_m e da velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo, ω.

(d) **(15 pontos)** Sabendo que $(\phi_F, \lambda_F) = (-3^\circ\,44', -38^\circ 32'\,O)$ e $(\phi_S, \lambda_S) = (-23^\circ 11'\,S, -45^\circ 53'\,O)$, encontre um valor numérico para o tempo de viagem do míssil t_m, em segundos.

(e) **(20 pontos)** Encontre a intensidade da velocidade v_0, em km/s, com a qual o míssil deve ser lançado, com relação à superfície da Terra, de modo a cumprir seu trajeto.

(f) **(6 pontos)** Por fim, ajude Bismarck a determinar o azimute A_0, e a altura h_0, em graus, com que ele deve lançar seu míssil.

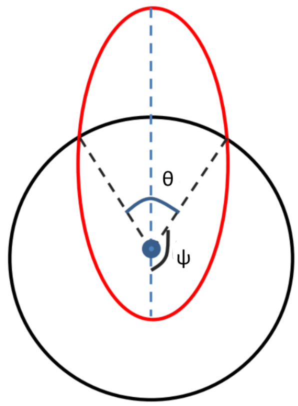
OBS: Pode ser útil utilizar a representação esquemática abaixo para se orientar com relação ao sistema de coordenadas utilizado:



Representação esquemática do sistema de coordenadas.

Solução:

(a) Primeiramente, pode-se construir a figura abaixo da órbita do míssil:



Representação da órbita do míssil.

Temos, a partir da figura:

$$2\psi + \theta = 2\pi$$

$$\psi = \pi - \frac{\theta}{2}$$

Utilizando coordenadas polares para a elipse da trajetória, podemos correlacionar a coordenada de lançamento (ou chegada) $(R, \theta/2)$ com a excentricidade e semi-eixo maior da órbita. Assim, utilizando

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot cos\psi} \rightarrow R = \frac{R(1-e^2)}{1 + e \cdot cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)}$$

Isolando e na equação acima, temos:

$$\boxed{e = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(b) Nesse item, basta utilizarmos lei das áreas. Pela figura abaixo:

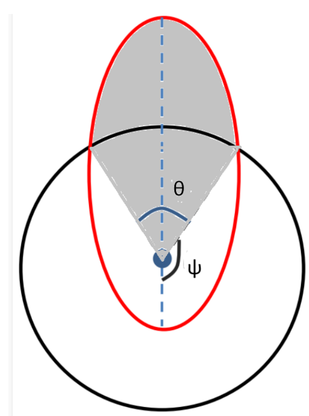


Figura 4: Representação da área percorrida pelo vetor posição do míssil.

$$\frac{A_{hachurada}}{A_{elipse}} = \frac{t_m}{T}$$

$$\frac{\frac{A_{elipse}}{2} + R^2 \cdot sen\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2}}{A_{elipse}} = \frac{t_m}{T}$$

Utilizando que $A_{elipse} = \pi a \cdot b = \pi R^2\sqrt{1-e^2}$, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{sen\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2}}{\pi\sqrt{1-e^2}} = \frac{t_m}{T}$$

Do item anterior, temos que $\sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-cos^2\frac{\theta}{2}} = |sen\frac{\theta}{2}| = sen\frac{\theta}{2}$. Assim:

$$t_m = \left(\frac{1}{2} + \frac{cos\frac{\theta}{2}}{\pi}\right)T$$

Pela Terceira Lei de Kepler, podemos encontrar o período da órbita:

$$\frac{R_T^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \rightarrow T = 2\pi R_T\sqrt{\frac{R_T}{GM_T}}$$

Assim, substituindo na expressão para o tempo de duração da viagem, teremos a seguinte expresão final:

$$\boxed{t_m = \left(\pi + 2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}}$$

(c) Podemos, primeiramente, construir a seguinte figura representando o triângulo esférico da situação:

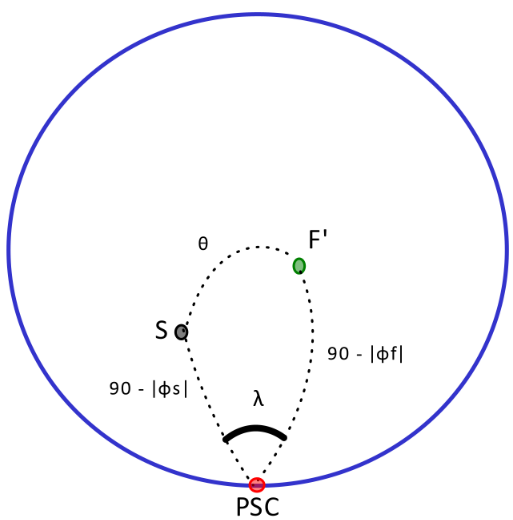


Figura 5: Triângulo esférico da situação

Podemos como a Terra rotaciona em sentido anti-horário com velocidade angular ω, podemos representar o ângulo λ da figura acima da seguinte forma:

$$\lambda = (\lambda_{final} - \lambda_{inicial}) + \omega \cdot t_m = (\lambda_F - \lambda_S) + \omega \cdot t_m$$

Assim, da lei dos cossenos para o ângulo θ, teremos:

$$cos(\theta) = cos(90 - |\phi_f|)cos(90 - |\phi_S|) + sen(90 - |\phi_f|)sen(90 - |\phi_S|)cos\lambda$$

$$\boxed{cos(\theta) = sen(|\phi_f|)sen(|\phi_S|) + cos(|\phi_f|)cos(|\phi_S|)cos((\lambda_F - \lambda_S + \omega \cdot t_m)}$$

(d) Utilizando que $sen^2\frac{\theta}{2} + cos^2\frac{\theta}{2} = 1$ e $cos(\theta) = cos^2\frac{\theta}{2} - sen^2\frac{\theta}{2}$, podemos escrever:

$$cos(\theta) = cos^2\frac{\theta}{2} - \left(1 - cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 2cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{cos\theta + 1}{2}}$$

Assim, do item b), teremos:

$$\boxed{t_m = \left(\pi + 2\sqrt{\frac{cos\theta + 1}{2}}\right)\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}}$$

Assim, substituindo a expressão de $cos\theta$ encontrada no item c), teremos:

$$\boxed{\frac{t_m}{\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}} = \left(\pi + 2\sqrt{\frac{sen(\phi_f)sen(\phi_S) + cos(\phi_f)cos(\phi_S)cos((\lambda_F - \lambda_S + \omega \cdot t_m) + 1}{2}}\right)}$$

Substituindo os dados numéricos, teremos a seguinte equação:

$$t_m = 806{,}9\left(\pi + \sqrt{1{,}835 \cdot cos\left(7{,}35^\circ + \frac{t_m}{239{,}3\text{ s}}^\circ\right) + 2{,}051}\right)$$

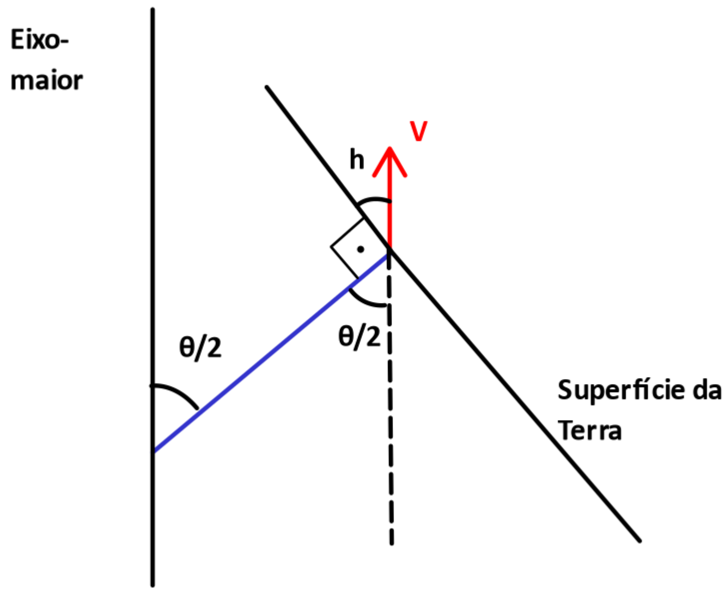
Supondo $t_0 = 2000$ s e utilizando a iteração dada no enunciado, temos, após cinco iterações, $\boxed{t_m \approx 4092s}$

(e) Primeiramente, podemos começar definindo o vetor de velocidade orbital do cometa ainda no referencial do centro da Terra. Assim, utilizando a imagem utilizada, pode-se escrever:

$$\vec{v} = v\begin{bmatrix} cos(h_f)cos(A_f) \\ cos(h_f)sen(A_f) \\ sen(h_f) \end{bmatrix}$$

Onde A_f e h_f são ainda as coordenadas considerando a velocidade de rotação da Terra. Para encontrarmos h_f, basta sabermos que na posição do lançamento, o vetor velocidade é paralelo ao eixo maior da órbita. Isso ocorre pois a distância entre o corpo e o CM da

Terra é R - o semi-eixo maior da órbita. Assim, o corpo se encontra no eixo-menor da órbita, que é normal ao eixo maior.



Assim, de acordo com a figura acima, podemos escrever:

$$\frac{\theta}{2} + 90 + h_f = 180 \rightarrow h_f = 90 - \frac{\theta}{2}$$

Calculando o valor de $\theta = 30{,}5°$, temos $h = 74{,}8°$. Ainda, para encontrar o azimute de lançamento A, pode-se escrever a seguinte lei dos senos:

$$\frac{sen(180 - A)}{sin(90 - |\phi_F|)} = \frac{sen\lambda}{sen\theta}$$

Substituindo os dados, temos $A = 54{,}5°$. Ainda, precisamos encontrar a intensidade da velocidade v, que pode ser obtida a partir da equação vis-visa:

$$v = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7{,}91\ km/s$$

Para a velocidade da superfície terrestre no ponto de lançamento, teremos:

$$\vec{v_T} = \omega \cdot R_T \begin{bmatrix} 0 \\ cos(|\phi_S|) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos, para a troca de referencial:

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v_T}$$

$$\vec{v_0} = 7{,}91 \begin{bmatrix} 0{,}152 \\ 0{,}213 \\ 0{,}965 \end{bmatrix} - 0{,}464 \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}919 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}26 \\ 7{,}63 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, pelo teorema de Pitágoras, $\boxed{|v_0| \approx 7{,}83\ km/s}$

(f) Afim de encontrar as novas coordenadas no referencial da superfície, basta utilizarmos a mesma equação deduzida no item anterior:

$$\vec{v_0} = v_0 \begin{bmatrix} cos(h_0)cos(A_0) \\ cos(h_0)sen(A_0) \\ sen(h_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}26 \\ 7{,}63 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos:

$$\boxed{h_0 \approx 77^\circ} \text{ e } \boxed{A_0 \approx 46^\circ}$$