PROVA TEÓRICA P2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Escreva a sua identificação em **TODAS** as folhas de respostas;
2. Escreva o Número de cada Questão na folha de resposta
3. A duração da prova é de 3 (TRÊS) horas;
4. Essa prova é composta por 4 (QUATRO) questões (totalizando 150 pontos) e tem peso 4 para a média final;
5. A prova é individual e sem consultas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas;
10. Folhas de rascunho serão disponibilizadas e não precisam ser entregues junto com a prova e as folhas de respostas;
11. Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles podem ser feitos a lápis, mas a resposta final deverá ser a caneta. Utilize para isso o espaço reservado em cada uma das folhas de respostas. Às respostas ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, serão associadas à nota zero.
12. Ao final da prova devolva o caderno de questões e as folhas de respostas.

Questões

1. **(Sistema Exoplanetário - 20 pontos)**

Um sistema exoplanetário possui um planeta orbitando sua estrela hospedeira em uma órbita circular, realizando trânsitos com período de 205 dias. A estrela emite a maior quantidade de energia no comprimento de onda $\lambda = 651$ nm, e seu raio é $0{,}75R_{Sol}$. Sabe-se que esta estrela está na Sequência Principal e obedece a uma razão massa-luminosidade tipo $L \propto M^{3,5}$.

(a) Encontre a temperatura T efetiva da estrela;

(b) Encontre sua Luminosidade L_* em termos de Luminosidade do Sol;

(c) Encontre o raio R_p do planeta, sabendo que a profundidade máxima da curva de luz no trânsito equivale a uma diferença de $2{,}1 \times 10^{-4}$ mag. Despreze qualquer emissão proveniente do planeta.

(d) Encontre a distância d entre a estrela e o planeta, em Unidades Astronômicas. Considere que a massa do planeta é muito menor que a da estrela.

(e) Observações espectroscópicas revelaram que o exoplaneta não possui atmosfera, possui rotação rápida e seu albedo é de $a = 0{,}36$. Encontre sua temperatura de equilíbrio T_p. Considere que o exoplaneta é um emissor perfeito.

Solução:

(a) A temperatura efetiva é obtida a partir da lei de deslocamento de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{b}{T}$$

Em que $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$

Substituindo-se os valores, temos:

$$T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{651 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}$$

$$\boxed{T \approx 4{,}4 \cdot 10^{3}\,\mathrm{K}}$$

(b) A luminosidade da estrela é dada por:

$$L_* = 4 \cdot \pi \cdot R_*^2 \cdot \sigma \cdot T^4$$

$$L_* = 4 \cdot \pi \cdot \left(0{,}75 \cdot 6{,}96 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 4.400^4 = 9 \cdot 10^{25}\,\mathrm{W}$$

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \frac{9 \cdot 10^{25}}{3{,}9 \cdot 10^{26}}$$

$$\boxed{L_* \approx 0{,}23 \cdot L_\odot}$$

(c) A luminosidade observada na estrela durante o trânsito é:

$$L_T = 4 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \left(R_*^2 - R_P^2\right) \cdot T^4$$

A diferença de magnitudes observada é:

$$m - m_T = \Delta m = -2{,}5 \cdot \log\left(\frac{L_*}{L_T}\right)$$

$$L_T = 4 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot R_*^2 \cdot T^4 \cdot 10^{\Delta m/2{,}5}$$

Igualando as equações, temos:

$$4 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \left(R_*^2 - R_P^2\right) \cdot T^4 = 4 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot R_*^2 \cdot T^4 \cdot 10^{\Delta m/2{,}5}$$

$$R_*^2 - R_P^2 = R_*^2 \cdot 10^{\Delta m/2{,}5}$$

$$R_P^2 = R_*^2 \cdot \left(1 - 10^{\Delta m/2{,}5}\right)$$

Substituindo-se os valores:

$$\boxed{R_P \approx 7{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}$$

(d) Pela relação Massa-Luminosidade:

$$\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) = \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)^{1/3{,}5}$$

$$M_* = 0{,}66 \cdot M_\odot$$

Como $P = 205\,\mathrm{dias} = 0{,}562\,\mathrm{anos}$, temos que:

$$\frac{P^2\,[\mathrm{anos}]}{d^3\,[\mathrm{UA}]} = \frac{1}{M_*\,[M_\odot]}$$

$$d = \left(P^2 \cdot M_*\right)^{1/3}$$

$$\boxed{d \approx 0{,}59\,\mathrm{UA}}$$

(e) A potência recebida pelo planeta é:

$$P_r = \frac{L_*}{4\pi d^2} \cdot (1-a)\pi R_P^2$$

E a emitida:

$$P_e = \varepsilon \cdot 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4$$

Em que a é o albedo, e ε, a emissividade.

No equilíbrio:

$$\frac{L_*}{4\pi d^2} \cdot (1-a)\pi R_P^2 = \varepsilon \cdot 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4$$

$$T_P = \left(\frac{L_* \cdot (1-a)}{16\pi d^2 \varepsilon \sigma}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{T_P \approx 216\,\mathrm{K}}$$

2. (Nuvem de Oort - 25 pontos)

A Nuvem de Oort, nomeada em homenagem ao astrônomo holandês Jan Oort, é um conceito teórico de uma nuvem de planetesimais que supostamente cerca o Sol a distâncias que variam de $r_1 = 2\,000\,\text{UA}$ a $r_2 = 200\,000\,\text{UA}$.

Suponha que uma missão pretende enviar uma sonda nas redondezas da Nuvem de Oort em uma órbita elíptica, para que ela retorne à Terra. Para isso, ela será lançada, a partir do repouso, a uma distância $R = 1{,}0\,\text{UA}$ do Sol com uma velocidade $v = v_{esc} - \delta v$, em que $0 < \delta v \ll v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Essa velocidade de lançamento será direcionada perpendicularmente ao vetor posição da sonda com origem no Sol.

Para os itens abaixo, mantenha em sua resposta apenas os termos de primeira ordem da razão $q \equiv \delta v / v_{esc}$.

(a) Encontre uma expressão para o semieixo maior da órbita em função de R e da razão $q = \delta v / v_{esc}$.

(b) Encontre uma expressão para a excentricidade da órbita em função da razão q.

(c) Encontre os respectivos valores de δv, em m/s, para que o afélio da órbita seja igual a r_1 e a r_2. Para cada um desses afélios, calcule a precisão necessária, em m/s, na velocidade de lançamento v para que o afélio da sonda seja atingido com uma precisão de $100\,\text{UA}$. **Dica:** Para encontrar a precisão da velocidade, substitua o afélio por $r_a \pm 100\,\text{UA}$ (em que r_a é o raio do afélio), desenvolva e utilize, se necessário, a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para $x \ll 1$.

Solução:

a) Igualando a energia de uma órbita elíptica com a energia da sonda no instante do lançamento:

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{m}{2}(v_{esc} - \delta v)^2 - \frac{GMm}{R}$$

Simplificando e desprezando termos de segunda ordem:

$$\frac{-GM}{a} \approx \left(v_{esc}^2 - 2v_{esc}\delta v\right) - \frac{2GM}{R} = -2v_{esc}\delta v$$

Portanto:

$$a \approx \frac{GM}{2v_{esc}\delta v} \Rightarrow \boxed{a \approx \frac{R}{4q}}$$

b) Como a velocidade é perpendicular ao vetor posição, a sonda se encontrará inicialmente no periélio. Portanto:

$$R = a(1 - e) \Rightarrow e = 1 - \frac{R}{a}$$

Substituindo o resultado do item anterior:

$$e \approx 1 - \frac{R4q}{R} \Rightarrow \boxed{e \approx 1 - 4q}$$

c) Sendo r_a o afélio da órbita, temos:

$$r_a = a(1+e) = \frac{R}{4q}(2-4q) = R\left(\frac{1}{2q}-1\right) \Rightarrow q = \frac{1}{2(1+r_a/R)}$$

Como $r_a/R \gg 1$, então:

$$q \approx \frac{R}{2r_a} \Rightarrow \boxed{\delta v \approx \frac{Rv_{esc}}{2r_a}}$$

Também é possível chegar no mesmo resultado sem necessidade de encontrar a excentricidade. Basta notar que como $r_a/R \gg 1$, então $r_a \approx 2a \approx R/2q$.

Para $r_a = r_1 = 2.000\,\text{UA}$, obtemos $\boxed{\delta v_1 = 10\,\text{m/s}}$ e para $r_a = r_2 = 200.000\,\text{UA}$, temos $\boxed{\delta v_2 = 0{,}1\,\text{m/s}}$.

A velocidade v é:

$$v = v_{esc} - \delta v \Rightarrow v = v_{esc}\left(1 - \frac{R}{2r_a}\right)$$

Agora, para obtermos a precisão da velocidade tomaremos $v = v \pm \Delta v$ e $r_a = r_a \pm \Delta r_a$, em que Δv e Δr_a são as respectivas precisões de v e r_a (neste caso, $\Delta r_a = 100\,\text{UA}$).

$$v \pm \Delta v = v_{esc}\left(1 - \frac{R}{2r_a(1 \pm \Delta r_a/r_a)}\right)$$

Utilizando-se $(1+x)^n \approx 1 + nx$ para $|x| \ll 1$:

$$v \pm \Delta v \approx v_{esc}\left(1 - \frac{R}{2r_a}\left(1 \pm \frac{\Delta r_a}{r_a}\right)\right) = \underbrace{v_{esc} - \frac{Rv_{esc}}{2r_a}}_{v} \pm \underbrace{\frac{Rv_{esc}}{2r_a}}_{\delta v}\frac{\Delta r_a}{r_a}$$

$$v \pm \Delta v \approx v \pm \delta v \frac{\Delta r_a}{r_a} \Rightarrow \boxed{\Delta v \approx \delta v \frac{\Delta r_a}{r_a}}$$

Logo, as respectivas precisões necessárias são de:

$$\boxed{\Delta v_1 \approx 5 \cdot 10^{-1}\,\text{m/s}} \quad \text{e} \quad \boxed{\Delta v_2 \approx 5 \cdot 10^{-5}\,\text{m/s}}$$

Obs.: a equação relacionando Δv e Δr_a poderia ser obtida muito mais rapidamente diferenciando a equação de v com respeito a r_a, mas omitimos essa solução pois não era esperado que o aluno utilizasse cálculo diferencial.

3. (DART - 45 pontos)

Em novembro de 2021, a NASA lançou o veículo espacial da missão DART (*Double Asteroid Redirection Test*, da sigla em inglês), cujo objetivo era testar um método de defesa planetária contra os denominados “NEOs” (*Near-Earth Objects* ou Objetos Próximos da Terra). O veículo foi desenvolvido de modo a se mensurar o quanto ele conseguiria alterar a órbita de um asteroide diante de uma colisão.

Para tanto, o alvo escolhido foi Dimorphos, satélite natural do asteroide 65803 Didymos, com o qual forma um sistema binário. Com uma órbita ao redor do Sol de excentricidade $e = 0{,}384$

e semi-eixo maior $a = 1{,}644$ UA, o sistema não oferecia risco ao nosso planeta. No dia 26 de setembro de 2022, a missão foi concluída com sucesso! De acordo com a NASA, a colisão foi capaz de reduzir em 33 minutos o período sideral de translação de Dimorphos ao redor de Didymos.

Considere, para efeitos de aproximação, que todas as órbitas em questão são coplanares à Eclíptica. Ademais, pode-se aproximar que a excentricidade da órbita de Dimorphos ao redor de Didymos vale $e_D \approx 0$.

Dados:

- Massa de Dimorphos: $1{,}33 \cdot 10^9$ kg
- Massa de Didymos: $5{,}40 \cdot 10^{11}$ kg
- Massa de DART: 535 kg
- Período sideral de translação de Dimorphos ao redor de Didymos (antes da colisão): 11h55min
- Distância entre Didymos e o Sol no momento da colisão: 1,046 UA
- Longitude eclíptica geocêntrica do sistema no momento da colisão: $36°11'$

(a) Calcule a distância, em unidades astronômicas, entre o sistema binário e a Terra no momento em que DART atinge o sistema.

(b) Determine o diâmetro mínimo, em metros, que um telescópio deveria ter para resolver a separação angular entre Dimorphos e Didymos, quando vistos da Terra, no instante imediatamente anterior à colisão. Considere que as observações seriam feitas na banda da luz visível ($\lambda = 550$ nm).

(c) Com base nos dados fornecidos, calcule a velocidade, em km/s, do veículo espacial DART em um momento imediatamente anterior à colisão, com relação à 65803 Didymos. Considere que esta velocidade é paralela e de sentido oposto à velocidade de Dimorphos com relação à Didymos. Conisdere a colisão totalmente inelástica.

(d) Calcule a nova excentricidade de Dymorphos - em sua órbita ao redor de 65803 Didymos - após a colisão.

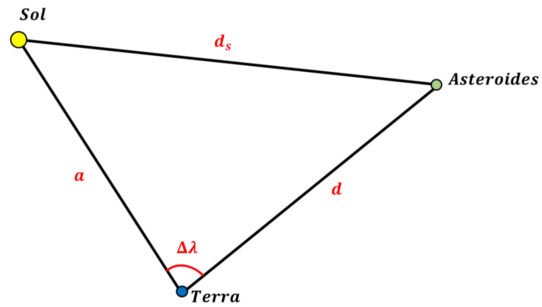
(e) Nas proximidades de sua oposição no dia 16 de junho de 2020, Didymos possuia uma magnitude visual de +19,01, quando o mesmo se encontrava a uma distância de 1,72 UA do Sol. Sabendo de tal fato, calcule a magnitude visual de Didymos no dia da colisão - antes da mesma ocorrer. Desconsidere quaisquer fontes de extinção e possíveis influências do satélite de Dydimos. A magnitude visual de um asteroide sólido de rocha pode ser definida como:

$$m = g + 5 \log\ d_T\,(\mathrm{UA}) + 5 \log\ d_s\,(\mathrm{UA}) - 2{,}5 \log\ p$$

Onde d_T é sua distância até a Terra, d_s, sua distância até o Sol, p, a fração da metade visível do objeto sendo iluminada pelo Sol, e g uma constante.

Solução:

(a) Considerando-se a geometria do sistema,



Sabe-se, primeiramente, que se trata de uma data muito próxima ao Equinócio de Setembro, que ocorre no dia 23. Assim, com boa aproximação, pode-se dizer que a longitude eclíptica do Sol no momento da colisão

$$\lambda_{\odot} = 180^\circ$$

Desse modo, o ângulo de elongação $\Delta\lambda$ do sistema de asteroides é

$$\Delta\lambda = \lambda_{\odot} - \lambda_s = 180^\circ - 36^\circ 11' = 143^\circ 49'$$

Utilizando-se lei dos cossenos,

$$d_s^2 = a^2 + d^2 - 2\ a\ d\ \cos\Delta\lambda \implies$$
$$d^2 - (2\ a\ \cos\Delta\lambda)\ d + (a^2 - d_s^2) = 0 \implies$$
$$d = \frac{(2\ a\ \cos\Delta\lambda) \pm \sqrt{(2\ a\ \cos\Delta\lambda)^2 - 4(a^2 - d_s^2)}}{2} \implies$$
$$d = 0{,}056\ UA\ \textbf{ou}\ d = -1{,}67\ UA$$

Logo, conclui-se que

$$\boxed{d = 0{,}056\ UA}$$

(b) Utilizando-se o critério de Rayleigh, a resolução angular de um telescópio é

$$\theta = 1{,}22\ \frac{\lambda}{D}$$

A separação angular entre os asteroides, quando vista da Terra, é expressa pela razão

$$\theta_{sep} = \frac{a_s}{d}$$

em que a_s é o semi-eixo maior da órbita de Dimorphos ao redor de Didymos; e d é a distância do sistema à Terra no instante de observação, calculada no item anterior.

Usando-se a Terceira Lei de Kepler,

$$\frac{T^2}{a_s^3} = \frac{4\pi^2}{G(m+M)} \implies a_s = \left[T^2 \cdot \frac{G(m+M)}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

Substituindo-se os valores, tem-se

$$a_s = \left[(11{,}9167 \cdot 3600)^2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}(1{,}33 \cdot 10^9 + 5{,}40 \cdot 10^{11})}{4\pi^2}\right]^{1/3} = 1189{,}5\ m$$

Logo, no caso limite, para um telescópio com diâmetro mínimo necessário,

$$\theta_{sep} = \theta \implies$$

$$1{,}22\ \frac{\lambda}{D} = \frac{a_s}{d} \implies$$

$$D = 1{,}22\ \lambda\ \frac{d}{a_s} = 1{,}22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{0{,}056 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{1189{,}5} = \boxed{4{,}72\ m}$$

(c) Sendo v_d a velocidade do veículo espacial (de massa m_d) e v_i, a velocidade inicial do satélite Dimorphos (de massa m_{di}) - ambas com relação à Didymos - temos, por conservação de momento linear:

$$m_{di} \cdot v_i - m_d \cdot v_d = (m_{di} + m_d)v_f \quad \text{(colisão inelástica)}$$

$$v_f = \frac{m_{di} \cdot v_i - m_d \cdot v_d}{m_{di} + m_d} \approx \frac{m_{di} \cdot v_i - m_d \cdot v_d}{m_{di}}$$

Assim, precisamos relacionar o período final do sistema T_f com a velocidade v_f de Dimorphos após a colisão. Para tal, é necessário encontrar o novo semi-eixo maior do sistema Dimorphos - Didymos. Pela equação de energia em um momento após a colisão:

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{GM}{a_i} = -\frac{GM}{2 \cdot a_f}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{a_i} - \frac{GM}{a_f}}$$

Assim, pela Terceira de Newton, é possível relacionar o novo semi-eixo maior com o novo período:

$$\frac{a_f^3}{T_f^2} = \frac{G(M + m_{di})}{4\pi^2}$$

$$T_f = 2\pi a_f \sqrt{\frac{a_f}{G(M + m_{di})}}$$

Assim, temos que $T_f - T_i = \Delta t = -33\ min$. Portanto:

$$2\pi a_f \sqrt{\frac{a_f}{G(M + m_{di})}} - 2\pi a_i \sqrt{\frac{a_i}{G(M + m_{di})}} = \Delta t$$

$$\sqrt{a_f^3} = \frac{\Delta t \sqrt{G(M + m_{di})}}{2\pi} + \sqrt{a_i^3}$$

Substituindo os valores numéricos na equação acima, encontramos $a_f = 1153\ m$. Assim, substituindo a_f na expressão para v_f, teremos $v_f = 0{,}171\ m/s$. Por fim, utilizando a equação de momento linear:

$$v_d = \frac{m_{di}(v_i - v_f)}{m_d}$$

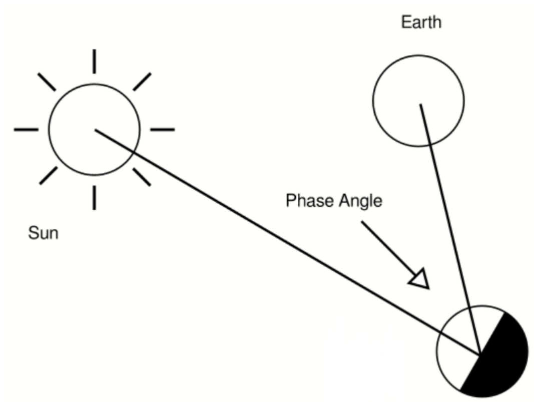
Como o movimento inicial era circular, temos que $v_i = \sqrt{\frac{GM}{a_i}} \approx 0{,}174\ m/s$. Substituindo na expressão acima, em conjunto com as outras variáveis, teremos:

$$\boxed{v_d \approx 6{,}98\ km/s}$$

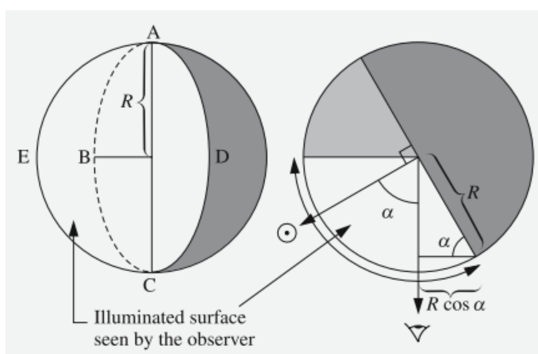
(d) Para o cálculo da nova excentricidade, basta notar que, após a colisão, a posição de Dimorphos se torna o periélio de sua nova órbita já que o vetor velocidade continua perpendicular ao vetor posição e $a_f < a_i$. Sendo assim:

$$a_f = a_i(1-e) \rightarrow \boxed{e = 1 - \frac{a_f}{a_i} = 0{,}031}$$

(e) Primeiramente, definiremos o ângulo de fase do asteroide como mostrado na figura abaixo:



Assim, como desejamos o valor de p, podemos desenhar a seguinte figura abaixo:



Temos que p representa a fração iluminada do disco. A porção iluminada, por sua vez, é composta de meio círculo ($A_c = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$) em conjunto com meia elipse de semi-eixo menor $Rcos(\alpha)$ e semi-eixo maior R ($A_e = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{2}$). Assim, calculando a fração p:

$$p = \frac{A_c + A_e}{\pi R^2} = \frac{\frac{\pi \cdot R^2}{2} + \frac{\pi \cdot a \cdot b}{2}}{\pi R^2}$$

$$p = \frac{\frac{\pi \cdot R^2}{2} + \frac{\pi R^2 \cdot cos(\alpha)}{2}}{\pi R^2}$$

$$p = \frac{1 + cos\alpha}{2}$$

Assim, comparando o momento de oposição com o momento da colisão, temos:

$$M - M_{op} = 5log\left(\frac{d_T}{d_{T_{op}}}\right) + 5log\left(\frac{d_s}{d_{s_{op}}}\right) - 2{,}5log\left(\frac{1 + cos\alpha}{1 + cos\alpha_{op}}\right)$$

Da configuração de oposição, temos um ângulo de fase $\alpha_{op} = 0$ e $d_{T_{op}} = d_{s_{op}} - 1$. Ainda, podemos encontrar o ângulo de fase α na situação de colisão utilizando o triângulo do item a). Por lei dos senos:

$$\frac{sen\Delta\lambda}{d_s} = \frac{sen\alpha}{1}$$
$$\alpha = 34{,}36^{\circ}$$

Assim, substituindo os dados relevantes na fórmula de magnitude acima:

$$M - 19{,}01 = 5log\left(\frac{0{,}056}{0{,}72}\right) + 5log\left(\frac{1{,}046}{1{,}72}\right) - 2{,}5log\left(\frac{1 + cos(34{,}36^{\circ})}{2}\right)$$

$$\boxed{M = +12{,}5}$$

4. (Tully-Fisher - 60 pontos)

Aviso: Para essa questão, pode ser útil saber que, pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A + Bx$ ajustada a um conjunto de pontos (x,y) é:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$
$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Em que:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$$

Na década de 70, cientistas como Rogstag (1972), Shostak (1972, 1975) e Balkowski (1974) perceberam uma correlação entre a luminosidade de uma galáxia (ou equivalentemente, sua magnitude absoluta) e a espessura de suas faixas espectrais de hidrogênio (ou equivalentemente, sua velocidade de rotação terminal). Em 1976, R. Brent Tully e J. Richard Fisher publicaram um artigo (uma versão digital do artigo será disponibilizada posteriormente no gabarito da prova) pioneiro em utilizar dessa relação para calcular distâncias. O caminho seguido pelos autores foi **(i)** calibrar uma correlação entre magnitude absoluta e velocidade terminal (relação de Tully-Fisher) e **(ii)** testar se a distância aos aglomerados de Virgem e da Ursa Maior (obtidos pela comparação entre magnitudes absoluta e aparente) está de acordo com as previsões da época. Na folha original, também é abordado um método similar que compara diâmetros físico e aparente.

(a) A seguinte tabela correlaciona a magnitude absoluta, M_{pg}, a velocidade aparente de rotação terminal, ΔV (isto é, o redshift vezes a velocidade da luz, sem correção pela inclinação do disco galáctico, em km/s), e a inclinação do disco galáctico, ξ, para galáxias com propriedades bem conhecidas.

Figura 1: Representação esquemática do ângulo de inclinação de um disco galático. Galáxias com $\xi = 0°$ são chamadas *face-on*, e com $\xi = 90°$, *edge-on*

Galáxia	M_{pg}	ΔV	ξ
M31	-20,96	535	78°
M33	-18,66	198	55°
M81	-20,01	450	58°
NGC 2403	-19,17	265	60°
NGC 4236	-17,53	195	75°
IC 2574	-16,69	117	68°
NGC 2366	-16,34	115	63°
NGC 5585	-18,05	166	51°
NGC 5204	-17,68	127	57°
Ho IV	-16,35	103	70°

Tabela 1: Transcrição de parte da tabela utilizada originalmente por Tully e Fisher para calibrar a relação de Tully-Fisher. Nela, relacionam-se a magnitude absoluta, a velocidade aparente de rotação terminal e a inclinação do disco galático de algumas galáxias espirais

A partir desses dados, crie uma nova tabela que correlacione a magnitude absoluta, M_{pg}, e o logaritmo (na base 10) da velocidade de rotação terminal (em km/s) corrigida pela inclinação, $\log(\Delta V_o)$

(b) Em folha milimetrada, **(i)** construa o gráfico M_{pg} *versus* $\log(\Delta V_o)$, e **(ii)** trace a reta que melhor se ajusta aos pontos.

(c) Estime os coeficientes da reta que melhor se ajusta aos pontos para o gráfico do item anterior, em outras palavras, calibre a relação de Tully-Fisher.

Dica: Muitas das calculadoras científicas têm funções específicas para estimar os coeficientes da reta que melhor se ajusta aos pontos. Se não for seu caso, você pode estimá-los a partir das equações fornecidas no início da questão ou do método geométrico que considerar mais adequado.

(d) A seguinte tabela correlaciona a magnitude aparente corrigida pela extinção, $m_{pg,o}$, e o logaritmo (na base 10) da velocidade terminal corrigida pela inclinação, $\log(\Delta V_o)$ para galáxias do aglomerado de Virgem.

NGC	$m_{pg,o}$	$\log(\Delta V_o)$
4178	11,28	2,467
4192	10,27	2,667
4206	11,64	2,479
4501	9,84	2,772
4532	12,17	2,468
4535	10,25	2,639
4651	11,08	2,643
4654	10,82	2,566

Tabela 2: Relacionam-se magnitude aparente corrigida pela extinção e o logaritmo, na base dez, da velocidade de rotação terminal, corrigida pela inclinação do disco galáctico, em km/s. As galáxias tabeladas são aquelas utilizadas originalmente por Tully e Fisher para determinar a distância ao aglomerado de Virgem

Em folha milimetrada, **(i)** construa o gráfico $m_{pg,o}$ *versus* $\log(\Delta V_o)$, e **(ii)** trace a reta que melhor se ajusta aos pontos. **(iii)** O coeficiente angular dessa reta é condizente com os resultados obtidos no item anterior?

(e) **(i)** A partir dos coeficientes da reta que melhor se ajusta aos pontos, estime a distância até o aglomerado. **(ii)** As estimativas da época apontavam uma distância de 19,5 MPc (Sandage e Tammann, 1974); isso necessariamente derruba a relação de Tully-Fisher? Justifique em até oito linhas.

(f) A distância até o aglomerado de Virgem era uma ferramenta importante no cálculo da constante de Hubble. A velocidade radial de afastamento do aglomerado é cerca de 1100 km/s. Assumindo desprezível o movimento próprio, calcule os valores da constante de Hubble encontrados **(i)** por Sandage e Tammann, e **(ii)** pelo desenvolvimento da sua questão.

Solução:

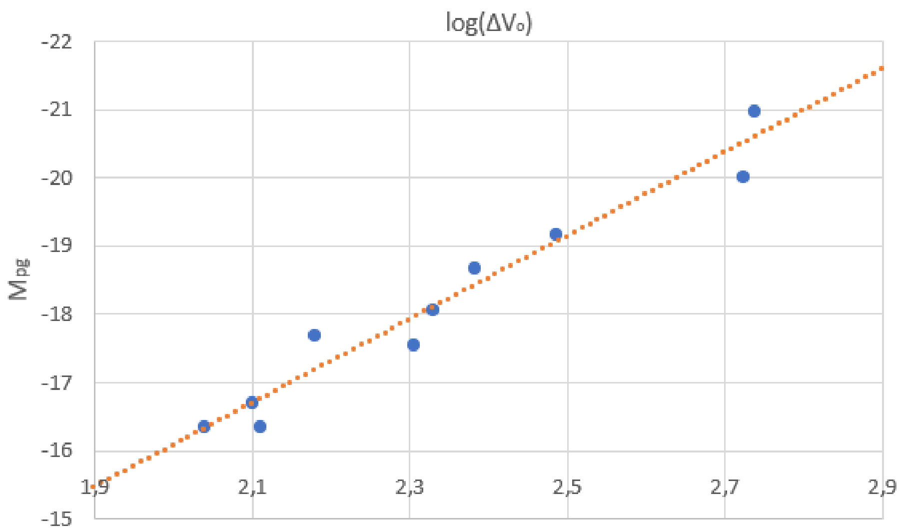
(a) A relação entre $\log(\Delta V_o)$ e ΔV é:

$$\log(\Delta V_o) = \log\left(\frac{\Delta V}{\sin\xi}\right)$$

Sendo assim, criamos a referida tabela:

Galáxia	M_{pg}	$\log(\Delta V_o)$
M31	-20,96	2,738
M33	-18,66	2,383
M81	-20,01	2,725
NGC 2403	-19,17	2,486
NGC 4236	-17,53	2,305
IC 2574	-16,69	2,101
NGC 2366	-16,34	2,111
NGC 5585	-18,05	2,330
NGC 5204	-17,68	2,180
Ho IV	-16,35	2,040

(b) Segue o gráfico com os pontos da tabela e a reta que melhor se ajusta:

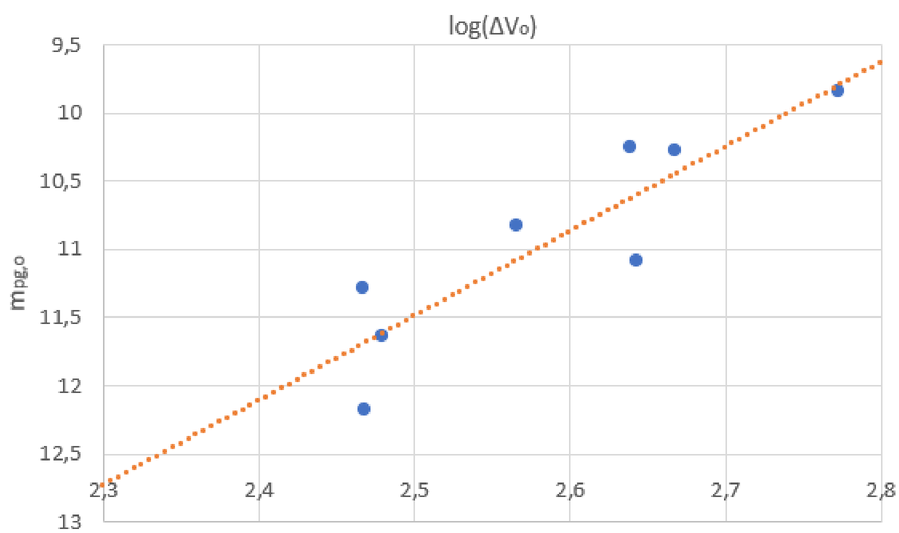


(c) Se $M_{pg} = A + B \cdot \log(\Delta V_0)$, então, utilizando as equações fornecidas,

$$A = \frac{\Sigma(x^2) \cdot \Sigma(y) - \Sigma(x) \cdot \Sigma(x \cdot y)}{N \cdot \Sigma(x^2) - [\Sigma(x)]^2} = \boxed{-3{,}8}$$

$$B = \frac{N \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma(x) \cdot \Sigma(y)}{N \cdot \Sigma(x^2) - [\Sigma(x)]^2} = \boxed{-6{,}1}$$

(d) **(i)** e **(ii)**:



(iii) Sabemos que:

$$m_{pg,o} = M_{pg} + 5 \cdot \log(d) - 5$$

$$m_{pg,o} = A + B \cdot \log(\Delta V_0) + 5 \cdot \log(d) - 5$$

$$m_{pg,o} = B \cdot \log(\Delta V_0) + C$$

O valor de B, calculado no item anterior, também pode ser calculado a partir da reta recém-construída:

$$B = \frac{N \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma(x) \cdot \Sigma(y)}{N \cdot \Sigma(x^2) - [\Sigma(x)]^2} = -6{,}2$$

Como podemos observar, as duas medições realizadas para o valor de B são muito próximas. Sendo assim, os resultados são condizentes.

(e) **(i)** Sabemos que:

$$m_{pg,o} = M_{pg} + 5 \cdot \log(d) - 5$$

$$m_{pg,o} = A + B \cdot \log(\Delta V_0) + 5 \cdot \log(d) - 5$$

$$m_{pg,o} = B \cdot \log(\Delta V_0) + C$$

Percebemos, portanto, a relação entre os coeficientes lineares dos dois gráficos:

$$C = A + 5 \cdot \log(d) - 5$$

$$d = 10^{(5+C-A)/5}$$

O coeficiente C pode ser calculado:

$$C = \frac{\Sigma\left(x^2\right) \cdot \Sigma(y) - \Sigma(x) \cdot \Sigma(x \cdot y)}{N \cdot \Sigma(x^2) - [\Sigma(x)]^2} = 27{,}0$$

Substituindo:

$$\boxed{d = 15\,\mathrm{MPc}}$$

(ii) A discrepância entre os resultados não necessariamente derruba a relação de Tully-Fisher. Primeiro, a estimativa de Sandage e Tammann pode estar errada. Segundo, os dados utilizados por Tully e Fisher podem ser imprecisos. Terceiro, a quantidade de galáxias estudadas não foi em número significativo. Quarto, não foram consideradas as possíveis variações da relação de Tully-Fisher a depender da morfologia da galáxia. Quinto, essa questão é uma simplificação do trabalho original; a distância obtida pelos autores, inclusive, foi de 13 MPc, embora isso não seja exigido como conhecimento prévio do aluno. Uma justificativa aceitável deve citar, pelo menos, um desses fatores.

(f) Sandage e Tamman:

$$H_0 = \frac{1100\,\text{km/s}}{19{,}5\,\text{MPc}} = \boxed{56\,\text{km/s/MPc}}$$

Desenvolvimento da questão:

$$H_0 = \frac{1100\,\text{km/s}}{15\,\text{MPc}} = \boxed{73\,\text{km/s/MPc}}$$

Artigo original: `https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1977A%26A....54..661T`