

## Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 9 questões (totalizando 250 pontos), divididas nas seguintes categorias:
  - Questões Curtas - **4 questões**, com 2 valendo 10 pontos, 1 valendo 12 pontos e 1 valendo 13 pontos.
  - Questões Médias - **3 questões**, com 1 valendo 20 pontos, 1 valendo 30 pontos e 1 valendo 40 pontos.
  - Questões Longas - **2 questões**, com 1 valendo 50 pontos e 1 valendo 65 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

## Instruções Específicas

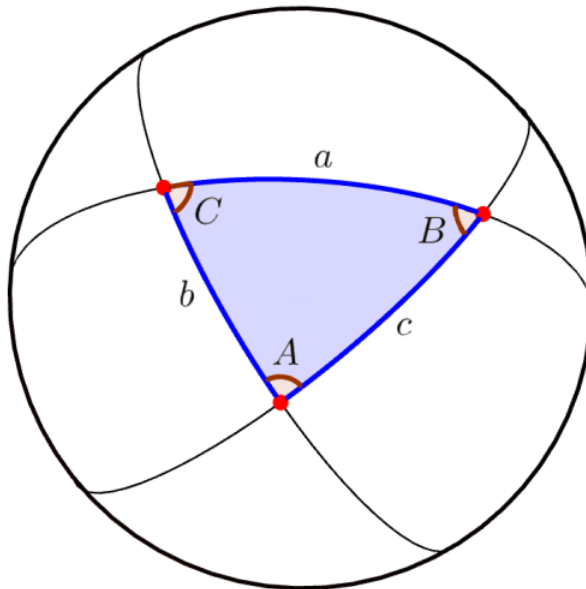
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Lei de Gauss para a Gravitação:

$$\sum \vec{g} \cdot \Delta \vec{A} = -4\pi G M_{in}$$

em que  $M_{in}$  é a massa interna à superfície fechada dita “gaussiana”.

- Regras básicas de derivação e integração para uma função do tipo  $y(x) = x^n$ :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

em que  $C$  é uma constante.

## Questões Curtas (45 pontos)

### 1. Fulano Astronomias (10 pontos)

Observações de uma estrela hipotética da classe M, pertencente à sequência principal e localizada a  $d = 1,3$  pc de distância mostram que seu fluxo tem quedas periódicas regulares a cada 11 dias, o que indicaria a possibilidade de um exoplaneta em órbita da estrela. Sabendo que a magnitude aparente dessa estrela vista da Terra é  $m = 7,87$  e que estrelas da sequência principal obedecem à relação  $L \propto M^3$  de massa-luminosidade, encontre o semi-eixo maior da órbita do possível exoplaneta. Despreze quaisquer efeitos de extinção.

**Solução:** A razão dos fluxos de duas estrelas pode ser escrita como:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

Com esse resultado, podemos comparar a estrela do exercício com o Sol à distância de 10 pc usando Pogson para encontrar a luminosidade da estrela:

$$m - M_{\odot} = -2,5 \log \left( \frac{L}{L_{\odot}} \cdot \left(\frac{10 \text{ pc}}{d}\right)^2 \right)$$

$$L = \left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)^2 10^{\frac{M_{\odot} - m}{2,5}} \cdot L_{\odot}$$

Logo,  $L = 10^{-3} L_{\odot}$ .

Pela relação massa-luminosidade do enunciado encontramos a massa da estrela:

$$\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^3 = \frac{L}{L_{\odot}}$$

$$M = \sqrt[3]{\frac{L}{L_{\odot}}} \cdot M_{\odot}$$

Logo,  $M = 0,1 M_{\odot}$ .

As quedas periódicas do fluxo da estrela indicam momentos de trânsito. O tempo entre dois trânsitos sucessivos nessas condições equivale ao período orbital do exoplaneta, assim  $P = 11$  dias. Pela 3ª lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM P^2}{4\pi^2}}$$

Assim, encontramos finalmente que:

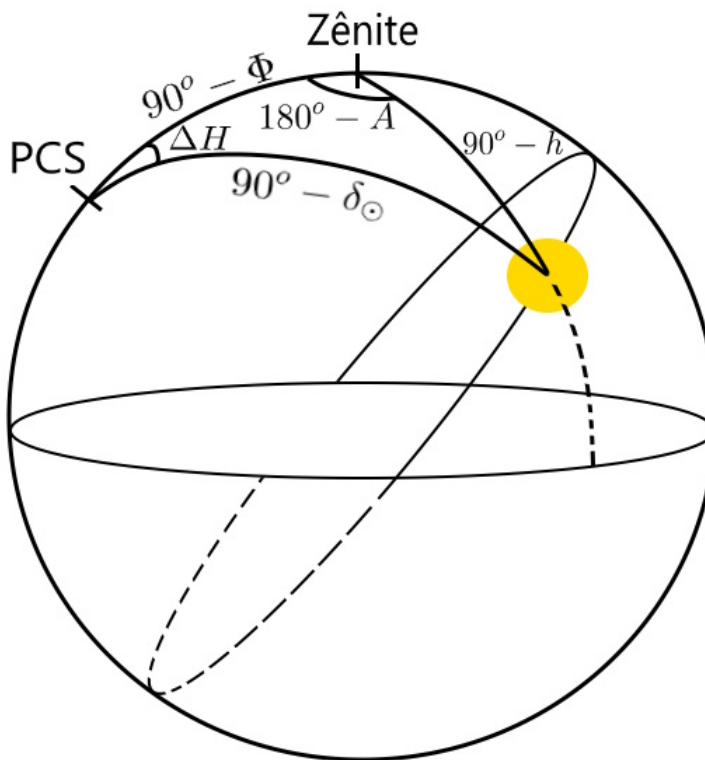
$$a = 0,045 \text{ UA}$$

### 2. Encontrando Penang (10 pontos)

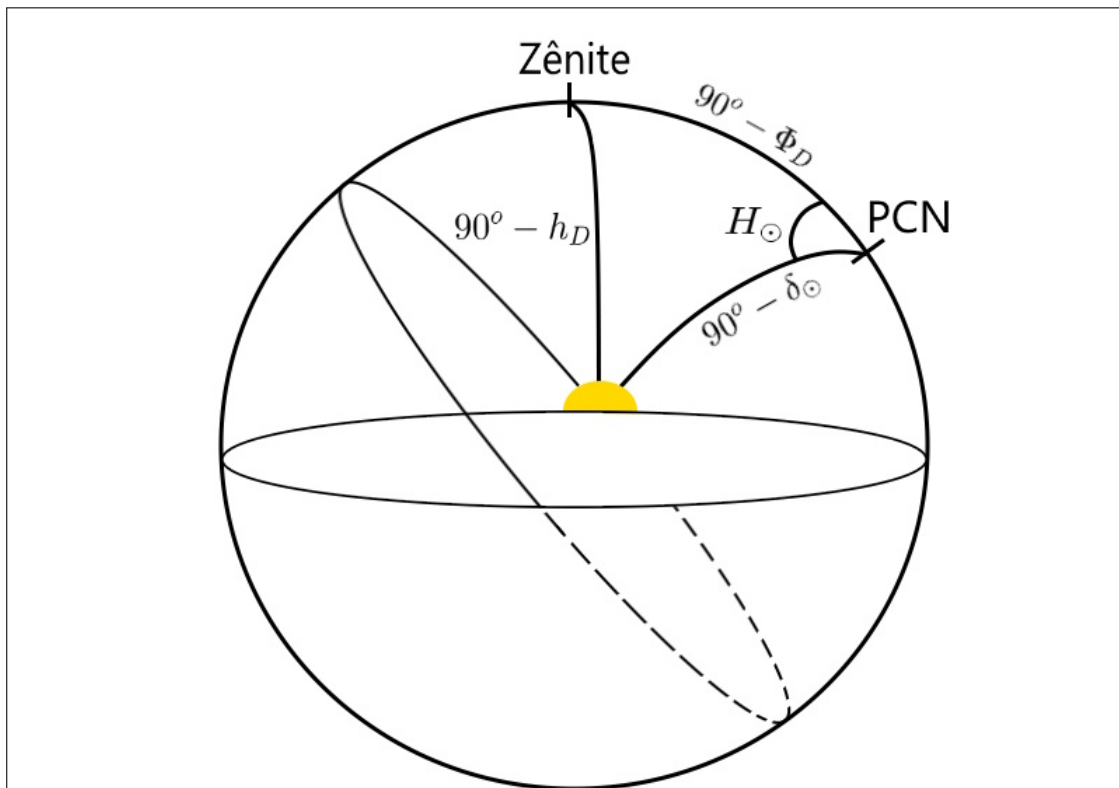
Em Itabaiana (PB) ( $\Phi_{ita} = 7^{\circ}19'46''$  S,  $\lambda_{ita} = 35^{\circ}19'59''$  O), um observador localiza o Sol com altura  $h = 43^{\circ}45'26''$  e azimute  $A = 82^{\circ}24'40''$ , medido a partir do Norte em sentido Leste. No mesmo instante, um observador em Penang ( $\phi_{pen} = 5^{\circ}17'7''$  N) visualiza o Sol no horizonte durante o ocaso. Com isso, calcule a longitude da cidade para que a localizemos no globo. Considere que as observações ocorram no equinócio de outono do hemisfério norte.

**Solução:**

Em Itabaiana (PB) temos a seguinte situação:



Já em Penang a situação é semelhante à essa:



Então, como as duas observações são feitas no mesmo horário, basta saber a diferença entre os "ângulos horários" do Sol nas duas localidades e teremos a diferença de longitudes entre Penang e Itabaiana.

Da lei dos cossenos em Itabaiana temos:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \delta_\odot) \cos(90^\circ - \Phi) + \sin(90^\circ - \delta_\odot) \sin(90^\circ - \Phi) \cos \Delta H$$

$$\sin h = \sin \delta_\odot \sin \Phi + \cos \delta_\odot \cos \Phi \cos \Delta H$$

Como  $\delta_\odot = 0^\circ$ :

$$\sin h = \cos \Phi \cos \Delta H$$

Como o azimute está entre 0 e 180°:

$$\Delta H = \arccos\left(\frac{\sin h}{\cos \Phi}\right)$$

Assim,  $\Delta H = 45^\circ 47' 21''$ .

Já em Penang temos, pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ - h_D) = \cos(90^\circ - \delta_\odot) \cos(90^\circ - \Phi_D) + \sin(90^\circ - \delta_\odot) \sin(90^\circ - \Phi_D) \cos H_\odot$$

$$\sin h_D = \sin \delta_\odot \sin \Phi_D + \cos \delta_\odot \cos \Phi_D \cos H_\odot$$

Como  $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$  e, por ser o pôr do Sol,  $h_D = 0^{\circ}$ :

$$0 = \cos \Phi_D \cos H_{\odot}$$

$$0 = \cos H_{\odot}$$

Assim,  $H_{\odot} = 90^{\circ}$ .

Logo, a diferença de longitudes entre Penang e Itabaiana é  $\Delta\lambda = \Delta H + H_{\odot} = 135^{\circ}47'21''$ . Como o Sol está mais a Oeste em Penang do que em Itabaiana, Penang só pode estar a Leste de Itabaiana, assim concluindo que a longitude de Penang é:

$$\lambda = 100^{\circ}27'22'' \text{ E}$$

### 3. Nédra e Zapiza (12 pontos)

Duas estrelas fictícias, Nédra e Zapiza, se formaram simultaneamente no mesmo local do espaço. Uma vez criadas, considere, por simplicidade, que as estrelas partiram com velocidades de mesmo módulo em sentidos opostos, e se mantiveram em movimento retilíneo e uniforme. Atualmente, ambas são observadas sobre o mesmo meridiano, com as seguintes propriedades astrométricas:

- Declinação de Nédra:  $\delta_1 = +34,3^{\circ}$
- Movimento próprio de Nédra:  $\mu_1 = 44,7$  mas/ano (milissegundos de arco por ano)
- Declinação de Zapiza:  $\delta_2 = -32,3^{\circ}$
- Movimento próprio de Zapiza:  $\mu_2 = 22,2$  mas/ano (milissegundos de arco por ano)

Determine, em milhões de anos, o tempo transcorrido desde a formação das estrelas.

#### Solução:

Primeiramente, deve-se perceber que, devido às estrelas terem se movido de forma retilínea e uniforme e serem observadas sobre o mesmo meridiano atualmente, elas só podem ter se movido, na esfera celeste, ao longo desse meridiano; isto é, o movimento próprio das estrelas é em declinação, somente. Com isso, observe o diagrama a seguir:

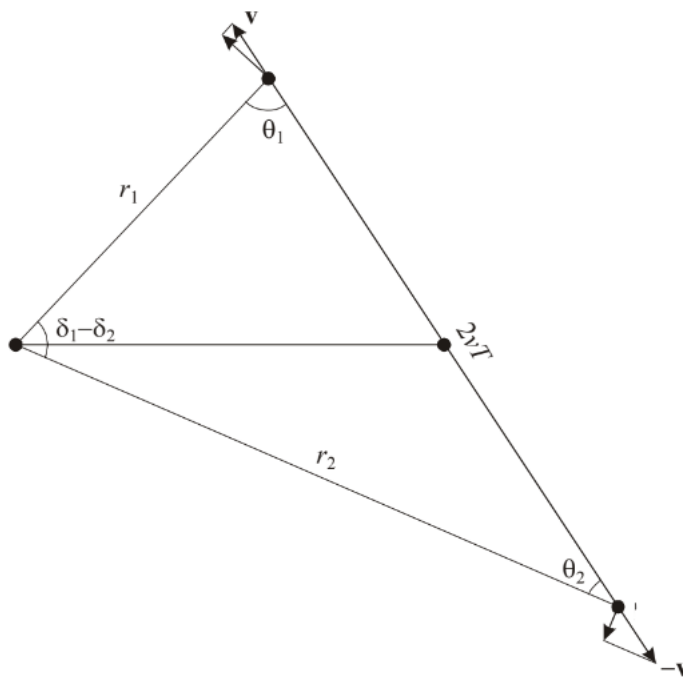


Figura 1: Diagrama da situação.

Definimos como  $v \rightarrow$  a velocidade das estrelas,  $r_1, r_2 \rightarrow$  as distâncias de cada uma até nós atualmente,  $T \rightarrow$  o tempo requerido, bem como os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  mostrados na figura.

Primeiramente, podemos escrever os movimentos próprios de cada estrela como:

$$\mu_1 = \frac{v \sin \theta_1}{r_1} \qquad \mu_2 = \frac{v \sin \theta_2}{r_2}$$

No triângulo com vértices no centro da esfera celeste e nas demais estrelas nos dias de hoje, aplicamos a lei dos senos:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta_1}$$

Substituindo  $\sin \theta_1$  e  $\sin \theta_2$  encontrados previamente na expressão passada:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{vr_1}{r_2\mu_2} = \frac{vr_2}{r_1\mu_1}$$

Do último par de equações, segue-se facilmente que  $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$ . Logo, elevando-se ambos os membros da primeira igualdade ao quadrado e utilizando tal resultado:

$$\frac{4v^2T^2}{\sin^2(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{v^2}{\mu_1\mu_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{2\sqrt{\mu_1\mu_2}} = 3,0 \cdot 10^6 \text{ anos}$$



#### 4. Pulsações em um sistema binário (13 pontos)

Considere um sistema binário composto por duas estrelas de nêutrons de massas idênticas e iguais a  $1,5 M_{\odot}$ . Uma das estrelas é um pulsar com um período de 2 s. Devido ao efeito Doppler, contudo, existe uma variação aparente no período mensurado aqui na Terra. Calcule a diferença entre os períodos aparentes máximo e mínimo.

**Dados:** O sistema é *edge-on*, e as órbitas são circulares, demorando 8 h para completar uma revolução.

##### Solução:

Da Terceira lei de Kepler, podemos encontrar o semi-eixo maior do binário, que equivale à distância entre as estrelas:

$$a = \left( \frac{P^2 GM}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Sendo  $M = 3 M_{\odot}$  a massa total do sistema. Como elas possuem massas iguais, a distância  $r$  de uma delas ao centro de massa é  $a/2$ . Logo, a velocidade orbital  $v$  de qualquer estrela é:

$$v = \frac{2\pi r}{P} = \frac{\pi a}{P}$$

Considere que o pulsar esteja em aproximação. Entre duas passagens consecutivas do feixe pela direção da Terra, transcorre um tempo  $P$ . Nesse tempo, a luz percorreu uma distância  $c \cdot P$ , enquanto o pulsar,  $v \cdot P$ . A distância entre um feixe de luz e o ponto de emissão do próximo, portanto, é  $(c-v) \cdot P$ . Para um observador na Terra, as duas detecções são separadas por um intervalo:  $P_{min} = (c-v)/c \cdot P$ . Analogamente, no afastamento, o intervalo mensurado é  $P_{max} = (c+v)/c \cdot P$ . A diferença, portanto:

$$P_{max} - P_{min} = 2 \cdot \frac{v}{c} \cdot P$$

$$P_{max} - P_{min} \approx 3 \times 10^{-3} \text{ s}$$

## Questões Médias (90 pontos)

#### 5. Extinção interestelar (20 pontos)

Considere uma estrela  $B$ , de magnitude absoluta visual  $M_{V,B} = -3,18$  e correção bolométrica  $BC = -1,6$ , além de outra estrela  $A$ , que fica no caminho entre a Terra e  $B$ . Astrônomos na Terra coletam os seguintes dados fotométricos:

- Magnitude aparente bolométrica de  $B$ :  $m_{bol,B/T} = 17,6$
- Índice de cor de  $B$ :  $(B - V)_{B/T} = 2,24$
- Índice de cor de  $A$ :  $(B - V)_{A/T} = 1,85$

Em que o sub-índice X/Y indica que a medição do astro X foi feita a partir do astro Y. Já astrônomos nas vizinhanças da estrela  $A$  coletaram os seguintes dados:

- Magnitude aparente visual do Sol:  $V_{\odot/A} = 21,1$

- Índice de cor de  $B$ :  $(B - V)_{B/A} = 1,15$

Quais são os índices de cor  $(B - V)_{A,0}$  e  $(B - V)_{B,0}$  intrínsecos das estrelas  $A$  e  $B$ ? Qual estrela é mais quente?

**Dica:** Considere que o excesso de cor,  $E_{B-V}$ , e a extinção na banda visual,  $A_V$ , se relacionam como tal:

$$E_{B-V} = \frac{A_V}{3,1}$$

**Solução:**

Primeiramente, notamos que:

$$\begin{cases} E_{(B-V),B/T} = \frac{a_V \cdot d_B}{3,1} \\ E_{(B-V),A/T} = \frac{a_V \cdot d_A}{3,1} \\ E_{(B-V),B/A} = \frac{a_V \cdot (d_B - d_A)}{3,1} \end{cases}$$

Assim:

$$E_{(B-V),B/T} - E_{(B-V),A/T} = E_{(B-V),B/A}$$

$$[(B - V)_{B/T} - (B - V)_{B,0}] - [(B - V)_{A/T} - (B - V)_{A,0}] = [(B - V)_{B/A} - (B - V)_{B,0}]$$

$$(B - V)_{A,0} = (B - V)_{B/A} + (B - V)_{A/T} - (B - V)_{B/T}$$

$$(B - V)_{A,0} = 0,76$$

Com isso, podemos encontrar  $A_{V,A/T}$ :

$$A_{V,A/T} = 3,1 \cdot E_{(B-V),A/T} = 3,1 [(B - V)_{A/T} - (B - V)_{A,0}] \Rightarrow A_{V,A/T} = 3,379$$

Agora vamos encontrar a distância  $d_A$  da Terra à estrela  $A$ . Para isso, usaremos o módulo de distância aplicado para o Sol visto a partir de  $A$ :

$$V_{\odot/A} = M_{V,\odot} + 5 \log(d_A) - 5 + A_{V,A/T}$$

$$d_A = 10^{(V_{\odot/A} - M_{V,\odot} + 5 - A_{V,A/T})/5} \Rightarrow d_A = 3,84 \text{ kpc}$$

Para encontrar o coeficiente de extinção  $a_V$ :

$$a_V = \frac{A_{V,A/T}}{d_A} \Rightarrow a_V = 0,88 \text{ mag/kpc}$$

Para o cálculo de  $V_{B/T}$ :

$$V_{B/T} = m_{bol,B/T} - BC \Rightarrow V_{B/T} = 19,2$$

Assim, aplicamos o módulo de distância até B:

$$V_{B/T} - M_{V,B} = 5 \log d_B - 5 + a_V d_B$$

$$d_B = \frac{V_{B/T} - M_{V,B} + 5 - 5 \log(d_B)}{a_V}$$

Por iteração, obtemos  $d_B = 8,72$  kpc. Finalmente, temos para  $(B - V)_{B,0}$ :

$$E_{B-V, B/T} = (B - V)_{B/T} - (B - V)_{B,0}$$

$$(B - V)_{B,0} = (B - V)_{B/T} - \frac{a_V d_B}{3,1}$$

$$(B - V)_{B,0} = -0,24$$

Como  $(B - V)_{B,0} < (B - V)_{A,0}$ , então a estrela  $B$  é mais azul e, portanto, mais quente.

#### 6. (Pôr do Sol em Dubai - 30 pontos)

O Burj Khalifa é a mais alta estrutura já erguida pela humanidade. O edifício, localizado em Dubai ( $\phi = 25^\circ 3' 56''$  N), nos Emirados Árabes Unidos, possui um deck de observação a 452 m do solo. Durante sua curta visita a Dubai, o time da IOAA 2022 se espantou com a grandiosidade da construção. Eles, então, decidiram verificar a esfericidade do nosso planeta. Considere que a observação ocorra no equinócio de outono do hemisfério norte.

- (a) **(10 pontos)** Primeiramente, o time decidiu averiguar a possibilidade de observar dois ocasos no mesmo dia. Considere que o time parta do solo em um dos elevadores quando a borda **superior** do Sol se esconde no horizonte. Calcule a velocidade média mínima de subida para que a equipe chegue ao deck a tempo de ver a borda **inferior** do Sol tocar o horizonte novamente.
- (b) **(20 pontos)** Uma vez no deck, um segundo teste a ser feito é fotografar o horizonte, averiguando se existe alguma curvatura aparente. Considere que se fotografa com uma câmera como a da **Figura 2**, que projeta a imagem em um retângulo de dimensões  $120^\circ$  (horizontal) por  $90^\circ$  (vertical). Na **Figura 3**, vemos uma representação esquemática (exagerada) da foto. Encontre a razão entre as distâncias  $w$  (entre o ponto mais alto e o mais baixo da curvatura do horizonte) e  $y$  (altura da imagem), marcados na **Figura 3**.

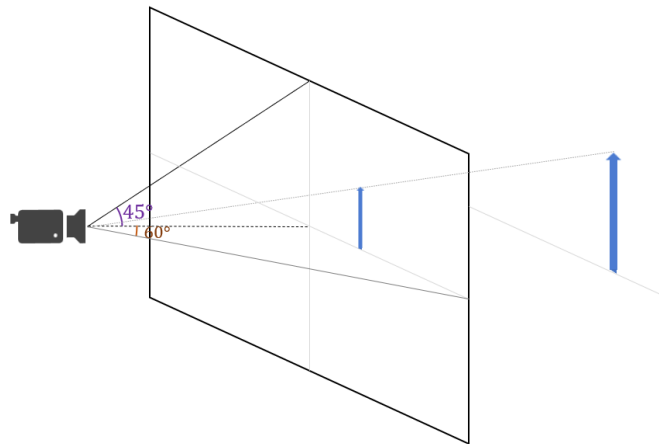


Figura 2: Esquema da projeção simples

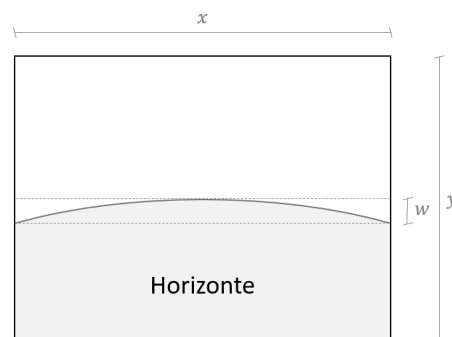
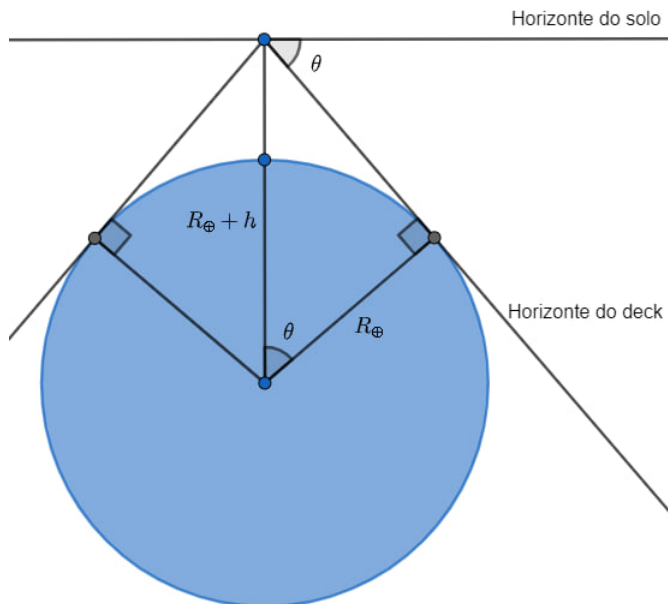


Figura 3: Representação da foto

**Solução:**

- (a) A elevação de um observador em relação ao solo expande seu horizonte sensível, que passa a ser uma circunferência paralela ao horizonte racional. Assumindo a Terra esférica, a diferença de altura entre os horizontes (DIP), pode ser calculado por:



$$\theta = \arccos\left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}\right)$$

$$\theta \approx 40,8'$$

Como observávamos a borda superior no horizonte, e agora observamos a inferior, o deslocamento vertical do Sol é dado por:

$$\theta' \approx 40,8' - 32'$$

$$\theta' \approx 8,8'$$

Como não estamos no Equador, precisamos considerar que o movimento aparente solar é inclinado em relação à vertical. Se não estivéssemos no equinócio, teríamos de corrigir pelo cosseno da declinação solar também:

$$\theta'' \approx \frac{9'}{\cos(\Phi)}$$

$$\theta'' \approx 9,7'$$

A velocidade angular do Sol é:

$$\omega = 15^\circ/\text{h}$$

Então o tempo será:

$$\Delta t = \frac{\theta''}{\omega}$$

$$\Delta t \approx 39 \text{ s}$$

Logo, a velocidade média que um elevador precisa ter, no mínimo, para que se observe os dois fenômenos é:

$$V_m = \frac{h}{\Delta t}$$

$$V_m = 11,6 \text{ m/s} = 42 \text{ km/h}$$

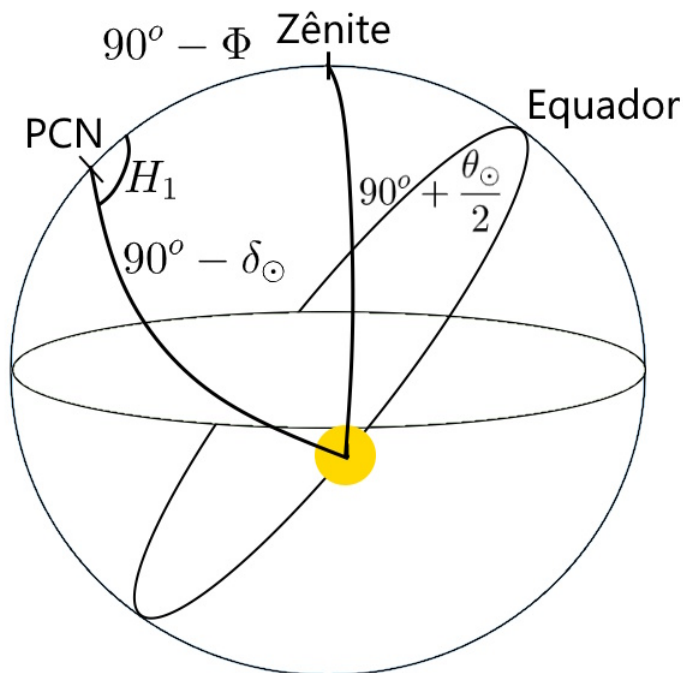
**Abordagem por trigonometria esférica:**

Ao invés de utilizar a aproximação por geometria plana, é possível calcular o intervalo

$$\Delta t$$

por trigonometria esférica.

Quando a borda superior do Sol se esconde no horizonte vista do chão temos o seguinte triângulo de posição:



Em que  $\theta_{\odot}$  é o diâmetro angular do Sol.

$$\cos \left( 90^\circ + \frac{\theta_{\odot}}{2} \right) = \cos (90^\circ - \delta_{\odot}) \cos (90^\circ - \Phi) + \sin (90^\circ - \delta_{\odot}) \sin (90^\circ - \Phi) \cos H_1$$

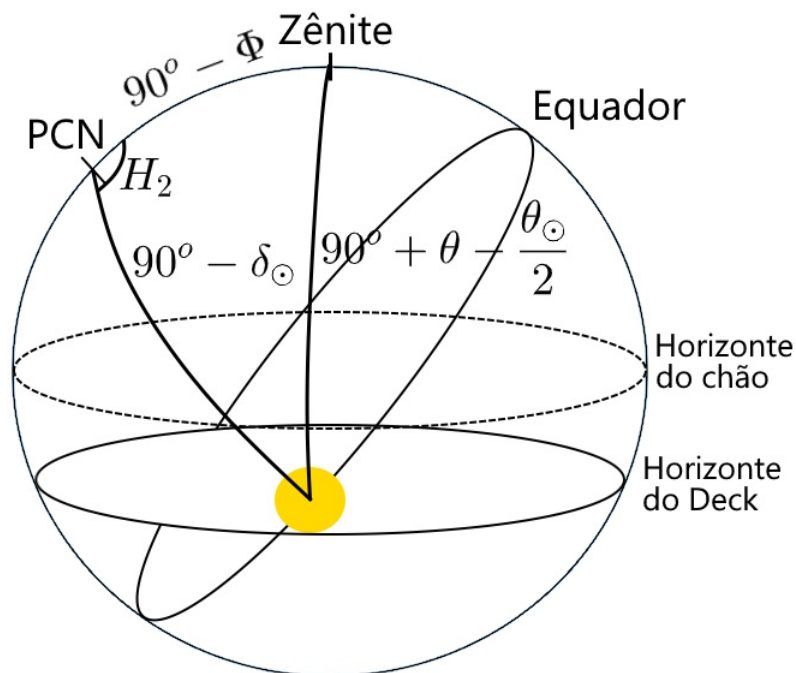
Como a observação ocorre no pôr do Sol,  $0 < H < 12 \text{ h}$

$$H_1 = \arccos \left( - \frac{\sin \frac{\theta_{\odot}}{2} + \sin \delta_{\odot} \sin \Phi}{\cos \delta_{\odot} \cos \Phi} \right)$$

Como a observação é realizada no equinócio de outono, a declinação do Sol vale  $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$ . Assim temos:

$$H_1 = \arccos \left( -\frac{\sin \frac{\theta_{\odot}}{2}}{\cos \Phi} \right)$$

Quando a observação é feita do deck do Burj Khalifa, temos a seguinte situação quando a borda inferior do Sol toca o horizonte:



Novamente, pela lei dos cossenos:

$$\cos \left( 90^{\circ} + \theta - \frac{\theta_{\odot}}{2} \right) = \cos (90^{\circ} - \delta_{\odot}) \cos (90^{\circ} - \Phi) + \sin (90^{\circ} - \delta_{\odot}) \sin (90^{\circ} - \Phi) \cos H_2$$

Novamente,  $0 < H < 12$  h e  $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$ :

$$H_2 = \arccos \left( -\frac{\sin \left( \theta - \frac{\theta_{\odot}}{2} \right) + \sin \delta_{\odot} \sin \Phi}{\cos \delta_{\odot} \cos \Phi} \right)$$

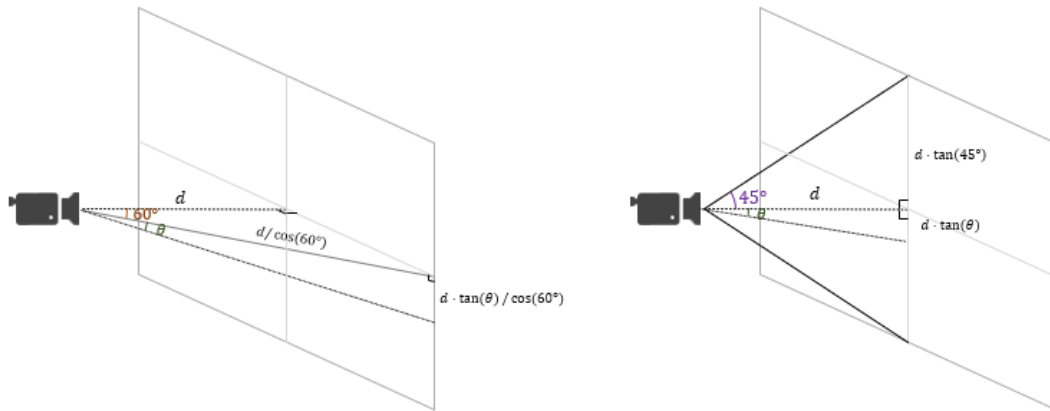
$$H_2 = \arccos \left( -\frac{\sin \left( \theta - \frac{\theta_{\odot}}{2} \right)}{\cos \Phi} \right)$$

Assim, o intervalo de tempo entre a borda superior do Sol se esconder no horizonte vista do chão e a borda inferior do Sol tocar o horizonte vista do deck de observação do Burj Khalifa é dada pela diferença dos ângulos horários dos dois momentos. Assim:

$$\Delta t = H_2 - H_1 = \arccos \left( -\frac{\sin \left( \theta - \frac{\theta_{\odot}}{2} \right)}{\cos \Phi} \right) - \arccos \left( -\frac{\sin \frac{\theta_{\odot}}{2}}{\cos \Phi} \right)$$

$$\Delta t \approx 40 \text{ s}$$

(b) Geometricamente, temos:



Assim:

$$w = d \cdot \tan \theta \cdot \left( \frac{1}{\cos 60^\circ} - 1 \right)$$

$$y = 2 \cdot d \cdot \tan 45^\circ$$

$$\frac{w}{y} = \frac{\tan \theta}{2 \cdot \tan 45^\circ} \cdot \left( \frac{1}{\cos 60^\circ} - 1 \right)$$

$$\boxed{\frac{w}{y} = 6 \cdot 10^{-3}}$$

### 7. Ambiente de microgravidade (40 pontos)

Ao se planejar uma missão de satélite, um dos fatores a se considerar são as perturbações associadas ao ambiente de microgravidade. Dentre elas, uma das mais relevantes é aquela relacionada ao fato de a Terra não ser perfeitamente esférica. Uma boa aproximação é considerar nosso planeta com um formato de elipsoide de revolução. Assim, o potencial gravitacional é dado pela expressão:

$$U_g = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r} \frac{J_2}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \phi - 1)$$

sendo  $M$  a massa da Terra,  $R_e = 6378 \text{ km}$  o raio equatorial terrestre,  $r$  a distância ao centro de nosso planeta,  $\phi$  a latitude geocêntrica e  $J_2 = 1082 \cdot 10^{-6}$  um coeficiente relacionado ao achatamento da Terra.



Para os dois itens a seguir, considere um satélite em uma órbita equatorial circular, de altura  $h = 750$  km em relação à superfície terrestre.

**Dica:** Para os próximos itens, se necessário, use que  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , se  $|x| \ll 1$ .

- (a) **(10 pontos)** Demonstre que a variação na aceleração radial  $\Delta\ddot{r}$  do satélite quando comparada à aceleração  $\ddot{r}$  de um objeto em uma órbita idêntica, mas ao redor de uma “Terra esférica” de raio  $R_e$ , é dada pela expressão a seguir:

$$\Delta\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \frac{3 J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2$$

Em seguida, calcule seu valor numérico. Expresse sua resposta em mg (mili-g, isto é, milésimos da aceleração da gravidade na superfície da Terra; não confunda com miligrama!) e assuma massas iguais para ambos os modelos de Terra. O módulo da aceleração radial do satélite é maior para o modelo de Terra esférico ou elipsoidal?

**Dica:** Use, se necessário, que  $m\ddot{r} = -\frac{dU_g}{dr}$ .

- (b) **(6 pontos)** Analogamente, calcule a variação da velocidade tangencial  $\Delta v$  do satélite quando comparada à de um que orbita uma “Terra esférica”. Expresse sua resposta em m/s.
- (c) **(16 pontos)** Com base nas informações expostas, calcule a diferença  $\Delta R$  entre os raios polar e equatorial da Terra. Dê sua resposta em km. O raio equatorial é maior ou menor que o polar?
- (d) **(8 pontos)** Justifique, **sucintamente**, por que a aceleração radial é maior/menor no modelo elipsoidal, conforme sua resposta do item (a). Use como base o fato de o raio equatorial ser maior/menor que o polar, conforme sua resposta do item (c).

**Solução:**

- (a) Primeiramente, pode-se determinar que

$$m(\ddot{r} + \Delta\ddot{r}) = -\frac{dU}{dr} \implies \ddot{r} + \Delta\ddot{r} = -\left[\frac{GM}{r^2} - 3\frac{GM}{r^2} \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 (3\sin^2\phi - 1)\right] \implies$$

$$\ddot{r} + \Delta\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{3 J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 (3\sin^2\phi - 1)\right]$$

Como, para a órbita dada,  $\phi = cte = 0$ ,

$$\ddot{r} + \Delta\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \left[1 + \frac{3 J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2\right]$$

Para uma órbita ao redor da Terra, considerando o modelo esférico, tem-se que:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$$

Logo,

$$\Delta\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \frac{3 J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \implies$$

$$\Delta\ddot{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,378 \cdot 10^6 + 750 \cdot 10^3)^2} \cdot \frac{3 \cdot 1082 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot \left(\frac{6378}{6378 + 750}\right)^2 \implies$$

$$\Delta\ddot{r} = -0,0102351 \text{ m/s}^2 \implies$$

$\Delta\ddot{r} = -1,04 \text{ mg}$

A variação obtida na aceleração radial foi negativa. Como a aceleração radial  $\ddot{r}$  também é negativa, o módulo da aceleração radial no modelo da Terra **elipsoidal é maior**.

- (b) Tomando-se como base a aceleração radial encontrada no item anterior e igualando-a à centrípeta,

$$|\ddot{r} + \Delta\ddot{r}| = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 + \frac{3 J_2}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \right] = \frac{(v + \Delta v)^2}{r}$$

Para a órbita em torno da “Terra esférica”

$$|\ddot{r}| = \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \implies v^2 = \frac{GM}{r}$$

Substituindo-se a expressão anterior na primeira equação desse item,

$$\begin{aligned} \frac{GM}{r} \left[ 1 + \frac{3 J_2}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \right] &= v^2 \left( 1 + \frac{\Delta v}{v} \right)^2 \implies \\ 1 + \frac{3 J_2}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 &= \left( 1 + \frac{\Delta v}{v} \right)^2 \end{aligned}$$

Como  $\Delta v \ll v$ :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3 J_2}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 &\approx 1 + 2 \frac{\Delta v}{v} \implies \\ \Delta v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \frac{3 J_2}{4} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \implies \\ \Delta v &= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6 + 750 \cdot 10^3}} \cdot \frac{3 \cdot 1082 \cdot 10^{-6}}{4} \cdot \left( \frac{6378}{6378 + 750} \right)^2 \implies \\ &\quad \boxed{\Delta v = 4,86 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

- (c) Tomando-se um ponto sobre o Equador,

$$\begin{aligned} U_e &= -\frac{GMm}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \left( \frac{R_e}{R_e} \right)^2 \right] - \frac{m}{2} \omega^2 R_e^2 \implies \\ U_e &= -\frac{GMm}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \right] - \frac{m}{2} \omega^2 R_e^2 \end{aligned}$$

Analogamente, para um ponto sobre o Polo,

$$U_p = -\frac{GMm}{R_p} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_e}{R_p} \right)^2 \right]$$

Dado que a superfície terrestre é equipotencial, tem-se

$$\begin{aligned} U_e &= U_p \implies \\ -\frac{GM}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 &= -\frac{GM}{R_p} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_e}{R_p} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

em que se substitui  $R_p = R_e + \Delta R$ :

$$-\frac{GM}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 = -\frac{GM}{R_e + \Delta R} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_e}{R_e + \Delta R} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$-\frac{GM}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 = -\frac{GM}{R_e + \Delta R} + GM J_2 \frac{R_e^2}{(R_e + \Delta R)^3} \Rightarrow$$

$$-\frac{GM}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 = -\frac{GM}{R_e(1 + \Delta R/R_e)} + \frac{GM J_2}{R_e} \frac{1}{(1 + \Delta R/R_e)^3}$$

Assumindo-se  $\Delta R \ll R_e$ , usa-se a aproximação dada:

$$-\frac{GM}{R_e} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 = -\frac{GM}{R_e} \left( 1 - \frac{\Delta R}{R_e} \right) + \frac{GM J_2}{R_e} \left( 1 - 3 \frac{\Delta R}{R_e} \right) \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{2} J_2 \frac{GM}{R_e} - \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 = \frac{GM}{R_e^2} (1 - 3J_2) \Delta R \Rightarrow$$

$$\Delta R = -\frac{R_e}{2(1 - 3J_2)} \left( 3J_2 + \frac{\omega^2}{GM} R_e^3 \right)$$

O período de rotação da Terra é

$$\omega = \frac{2\pi}{23 \cdot 60 \cdot 60 + 56 \cdot 60 + 4} \approx 7,29212 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Por fim,

$$\Delta R = -\frac{6,378 \cdot 10^6}{2(1 - 3 \cdot 1082 \cdot 10^{-6})} \left[ 3 \cdot 1082 \cdot 10^{-6} + \frac{(7,29212 \cdot 10^{-5})^2}{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}} \cdot (6,378 \cdot 10^6)^3 \right] \Rightarrow$$

$$\Delta R = -21451 \text{ m}$$

ou, em módulo,

$$|\Delta R| = 21,5 \text{ km}$$

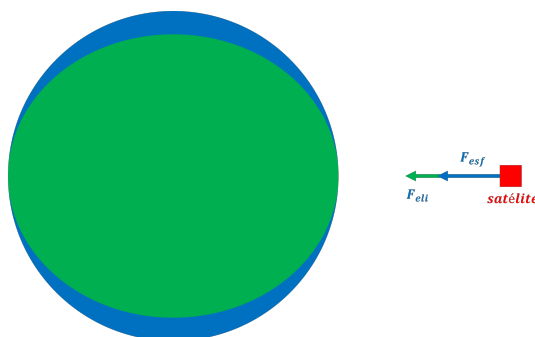
Ou seja,

$$R_p = R_e + \Delta R = 6378 - 21,5 = 6356,5 \text{ km}$$

isto é, o **raio equatorial é maior que o polar**.

- (d) Conforme o item (a), a aceleração radial é maior, em módulo, para a Terra elipsoidal. Do item anterior, vê-se que o raio polar é menor que o equatorial. Isso indica que a uma mesma massa  $M$  da Terra está contida em um volume menor. Portanto, a força gravitacional é maior no modelo elipsoidal, pois há mais massa mais a uma distância menor do satélite nessas condições.

O esquema abaixo ilustra esse panorama.



## Questões Longas (115 pontos)

### 8. Salsichaverso (50 pontos)

Após estudar o brilho de estrelas variáveis e o núcleo solar, o extraterrestre Koo Tam retorna à Terra, e resolve finalmente revelar a sua origem. Koo Tam advém de um universo com densidade de matéria homogênea e simetria cilíndrica, cujas leis físicas são felizmente idênticas às nossas. Hoje, você é o escolhido para modelar simplificadamente o universo de nosso querido alienígena.

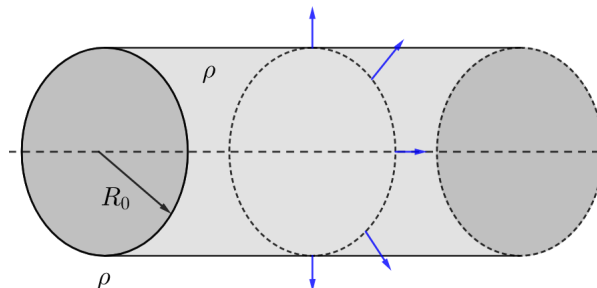


Figura 4: Esquema do modelo simplificado para o universo de Koo Tam. A linha pontilhada representa o eixo do cilindro e as setas indicam o sentido de expansão.

Considere um cilindro de densidade uniforme  $\rho$ , raio atual  $R_0$ , e comprimento arbitrário, se expandindo somente de forma radial. O cilindro está contido em outro cilindro muito maior de comprimento  $L$  tendendo ao infinito e de mesma densidade (na prática, estamos estudando uma porção do universo isoladamente). A dependência temporal do raio do cilindro menor  $R = R(t)$  pode ser escrita em termos do fator de escala  $a = a(t)$ , i.e.,  $R(t) = a(t) \cdot R_0$ , sendo o fator de escala atual  $a_0 = 1$ .

- (a) **(20 pontos)** Partindo de uma análise Newtoniana para o movimento de uma partícula-teste na borda do cilindro menor, mostre a seguinte expressão e encontre a constante  $C_1$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = C_1 \cdot \rho \cdot \ln(a) + \frac{C_2}{a^2}$$

Em que  $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$  é a taxa de variação do fator de escala.  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Se necessário, use:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{x_2}{x_1} \right|$$

- (b) **(15 pontos)** Considere que a expansão do cilindro é adiabática, e que a pressão nele possa ser escrita da forma  $P = w \cdot \rho c^2$ , em que  $w$  é um fator numérico. A partir da Primeira Lei da Termodinâmica, mostre que:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + C_3 (w + 1) \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Em que  $\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt}$  é a taxa de variação temporal da densidade. Encontre a constante  $C_3$ . Determine, então,  $w$  para um universo composto somente por (i) matéria bariônica; (ii) radiação; (iii) energia escura. Considere que os fótons nesse universo não possuam componente de velocidade no eixo do cilindro.

Considere, a partir de agora, que o universo é inteiramente composto de matéria bariônica. Seja definido o parâmetro de Koo Tam como  $K(a) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ . O alienígena informa os cientistas de que o parâmetro  $K$  obedece às relações  $K(a_0) = K_0$  e  $K(e) = \frac{K_0}{e\sqrt{2}}$ , sendo  $e$  o número de Euler.

- (c) **(15 pontos)** Determine, em função de  $K_0$ , o tempo total de vida deste universo, ou seja, o tempo transcorrido desde a sua origem (*Big Bang*) até o seu eventual colapso (*Big Crunch*). Considere que o parâmetro de Koo Tam atual seja igual à constante de Hubble do nosso universo (i.e.,  $K_0 = H_0$ ) e expresse esse tempo em bilhões de anos.

Use:

$$\int_0^{e^2} \frac{dx}{\sqrt{2 - \ln(x)}} = e^2 \sqrt{\pi}$$

**Solução:**

- (a) Primeiramente, devemos calcular a aceleração sofrida pela partícula de teste; i.e., o campo gravitacional produzido na borda do cilindro devido à sua distribuição de massa. Note que, devido à grande extensão do cilindro, o campo gravitacional será cilindricamente simétrico, dirigido radialmente para fora, conforme ilustra a figura a seguir. Tomando uma gaussiana cilíndrica coaxial com o cilindro de comprimento arbitrário  $l$ , apliquemos nela a Lei de Gauss:

$$\sum \vec{g} \cdot \Delta \vec{A} = -4\pi G M_{in}$$

$$|\vec{g}| \cdot 2\pi Rl = -4\pi G \cdot \rho \pi R^2 l$$

$$g = -2\pi G \rho R$$

O sinal negativo indica que a gravidade aponta radialmente para dentro.

Agora, temos dois possíveis caminhos a seguir: utilizar a Segunda Lei de Newton na partícula de testes ou aplicar o princípio da conservação de sua energia mecânica. Lidaremos com cada um separadamente:

**Método 1: Conservação de Energia Mecânica**

A energia mecânica da partícula de testes pode ser escrita como:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{R}^2 + U$$

Sendo  $U = U(R)$  a sua energia potencial gravitacional. Da definição de energia potencial:

$$F = -\frac{dU(R)}{dR} \Rightarrow U(R) - U(R_0) = -\int_{R_0}^R F dR'$$

Note que integramos de  $R_0$  a  $R$ , no membro direito. Como a constante de integração  $U(R_0)$  pode ser livremente escolhida, tomemos  $U(R_0) = 0$ . Logo:

$$U(R) = -\int_{R_0}^R mg(R') dR' = -m \int_{R_0}^R \left( -2\pi G \cdot \frac{M}{\pi R'^2 l} \cdot R' \right) dR'$$

$$U(R) = \frac{2GMm}{l} \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'} = \frac{2GMm}{l} \ln \left( \frac{R}{R_0} \right)$$

Em que utilizamos o resultado fornecido. Substituindo na energia:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{2GMm}{l} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Substituindo  $\dot{R} = \dot{a} \cdot R_0$ , dividindo por  $R_0^2$  e chamando a constante  $2E/mR_0^2$  de  $C_2$ :

$$\dot{a}^2 = C_2 - \frac{4GM}{R_0^2 l} \ln(a)$$

Substituindo  $M$  e dividindo por  $a^2$ , temos, por fim:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\rho \ln(a) + \frac{C_2}{a^2}$$

De onde tiramos que:

$$C_1 = -4\pi G$$

### Método 2: Segunda Lei de Newton

Pela Segunda Lei de Newton, temos que:

$$m\ddot{R} = mg$$

Substituindo o resultado encontrado e tomando  $M = \rho \cdot \pi R^2 l$ :

$$\ddot{R} = -2\pi G \cdot \frac{M}{\pi R^2 l} \cdot R$$

Como  $\ddot{R} = \dot{R}d\dot{R}/dR$ :

$$\dot{R}d\dot{R} = -\frac{2GM}{l} \frac{dR}{R}$$

Assim, integramos de ambos os lados (lembre-se que a massa  $M$  é uma constante):

$$\int_{\dot{R}_0}^{\dot{R}} \dot{R}' d\dot{R}' = -\frac{2GM}{l} \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'} \Rightarrow \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{\dot{R}_0^2}{2} = -\frac{2GM}{l} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Dividindo por  $R_0^2$  e chamando a constante  $\dot{R}_0/R_0^2$  de  $C_2$ :

$$\dot{a}^2 = C_2 - \frac{4GM}{R_0^2 l} \ln(a)$$

Substituindo  $M$  e dividindo por  $a^2$ , reproduzimos, por fim, o resultado esperado:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\rho \ln(a) + \frac{C_2}{a^2}$$

(b) Da primeira Lei da Termodinâmica:

$$dQ = dU + PdV$$

Como o universo não troca calor com os arredores,  $dQ = 0$ . Em relação ao tempo, temos  $\dot{Q} = 0$ :

$$0 = \dot{U} + P\dot{V}$$

Além disso, temos que  $U = \rho c^2 V$ . Portanto, diferenciando em relação ao tempo:

$$\dot{U} = \dot{\rho} c^2 V + \rho c^2 \dot{V}$$

Logo:

$$0 = \dot{\rho} c^2 V + (P + \rho c^2) \dot{V}$$

$$0 = \dot{\rho} V + \left( \frac{P}{c^2} + \rho \right) \dot{V}$$

Agora, resta substituir  $V$  e  $\dot{V}$ . Veja que  $V = \pi R^2 L = \pi a^2 R_0^2 L$ . Derivando:

$$\dot{V} = 2\pi a \dot{a} R_0^2 L$$

Substituindo  $V$  e  $\dot{V}$  de volta na equação inicial, obtemos, por fim:

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2 \left( \frac{P}{\rho c^2} + 1 \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0}$$

De onde obtemos  $C_3 = 2$ . Perceba que, integrando a equação obtida, temos que:

$$\rho \propto a^{-2(w+1)}$$

Agora note que, para matéria bariônica, temos:

$$\epsilon_{mat} = \rho c^2 = \frac{M c^2}{V} \rightarrow \rho \propto a^{-2}$$

Logo:

$$-2 = -2(w_{mat} + 1) \rightarrow \boxed{w_{mat} = 0}$$

Para a radiação, a energia associada é a energia do fóton, para a qual vale  $E_{foton} = \frac{hc}{\lambda}$ . Como  $\lambda \propto a$ , então temos

$$\epsilon_{rad} = \frac{E_{foton}}{V} \rightarrow \rho \propto a^{-3}$$

Logo:

$$-3 = -2(w_{rad} + 1) \rightarrow \boxed{w_{rad} = \frac{1}{2}}$$

Por fim, para a energia escura,  $\epsilon_\Lambda = const.$ , e portanto  $\rho \propto a^0$ . Logo:

$$0 = -2(w_\Lambda + 1) \rightarrow \boxed{w_\Lambda = -1}$$

(c) Para  $a_0 = 1$ , temos, usando a equação encontrada em (a):

$$K_0^2 = 0 + \frac{C_2}{1^2} \Rightarrow$$

$$C_2 = K_0^2$$

Para  $a_1 = e$ , temos:

$$K_1^2 = -4\pi G\rho_1 \ln(a) + \frac{K_0^2}{a^2}$$

$$4\pi G\rho_1 = \frac{K_0^2}{2e^2}$$

Como o universo é composto totalmente por matéria bariônica, vale que

$$\rho_1 e^2 = \rho a^2 = \frac{K_0^2}{8\pi G}$$

Substituindo  $\rho$  de volta na equação do item (a):

$$K^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{K_0^2}{a^2} \left(1 - \frac{\ln(a)}{2}\right)$$

Agora, devemos calcular o fator de escala máximo, associado ao momento em que o universo para de se expandir e inicia o processo de contração. Isto ocorre quando  $\dot{a} = 0$ , i.e.,  $K = 0$ . Aplicando na equação encontrada, temos que o fator de escala máximo do universo será dado por:

$$1 - \frac{\ln(a_{max})}{2} = 0 \rightarrow a_{max} = e^2$$

Separando as variáveis na equação do item (a) e integrando, temos:

$$\frac{da}{\sqrt{2 - \ln(a)}} = \frac{K_0}{\sqrt{2}} dt \rightarrow \int_0^{e^2} \frac{da}{\sqrt{2 - \ln(a)}} = \frac{K_0}{\sqrt{2}} \int_0^{\Delta t/2} dt$$

Perceba que utilizamos, no limite da integral, que o tempo total de vida é duas vezes o tempo necessário para se atingir o fator de escala máximo, por simetria. Agora, usando o resultado dado:

$$e^2 \sqrt{\pi} = \frac{K_0}{\sqrt{2}} \frac{\Delta t}{2}$$



$$\Delta t = \frac{e^2 \sqrt{8\pi}}{K_0}$$

Para  $K_0 = H_0 = 67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ :

$$\Delta t \approx 535 \text{ bilhões de anos}$$

### 9. Stellae (65 pontos)

Neste problema, celebraremos os mecanismos por trás do funcionamento de um dos principais corpos celestes presentes em nosso universo: estrelas!

O colapso de uma nuvem de gás é um processo fundamental na formação de estrelas. Seja  $U$  a energia potencial gravitacional de uma nuvem, e  $K$  a sua energia cinética interna (associada ao movimento das partículas que a compõem). Podemos escrever a condição de colapso como:

$$2K + U < 0$$

Aqui, consideraremos uma nuvem esférica de raio  $R$  e massa  $M$  homogeneamente distribuída. Nessa situação,  $U$  será dado por:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- (a) **(8 pontos)** Determine a massa mínima  $M_J$  (Massa de Jeans) para que uma nuvem de gás esférica e homogênea colapse. Responda em função da temperatura  $T$ , do raio  $R$  e da massa  $m$  das partículas do gás que a compõe, suposto diatômico. Com isso, responda se é provável o colapso de nuvem feita de gás hidrogênio, à temperatura 10 K, de massa  $100 M_\odot$  e de raio 10 pc.

Durante a maioria da vida de uma estrela, a força gravitacional balanceia a pressão gasosa devido à produção de energia no núcleo, promovendo o equilíbrio hidrostático.

- (b) **(7 pontos)** Considere uma estrela esférica, na qual a densidade depende da distância  $r$  ao centro da forma  $\rho(r)$ . Sendo  $m(r)$  a massa englobada por uma esfera de raio  $r$  concêntrica à e contida na estrela, mostre que, em um regime de equilíbrio hidrostático, o gradiente de pressão  $\Delta P/\Delta r$  é dado por:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Em uma estrela, o transporte de energia do núcleo à superfície pode ser mediado por radiação, convecção, ou condução; aqui, trataremos somente do primeiro, o qual é dominante em muitas estrelas.

- (c) **(6 pontos)** No regime radiativo, o gradiente de temperatura no interior da estrela segue uma expressão do tipo:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = a \cdot \kappa^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot L^\beta \cdot r^{\alpha+\gamma} \cdot T^\gamma \cdot \sigma^\delta$$

Em que  $a$  é uma constante adimensional,  $\kappa$  é a opacidade,  $\rho$  a densidade,  $L$  a luminosidade,  $T$  a temperatura e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann. Encontre os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ .

**Observação:** No SI, a opacidade possui dimensões de  $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^2$ .

A solução exata dos sistemas de equações diferenciais resultantes do estudo da estrutura estelar só pode ser feita computacionalmente. Todavia, é possível derivar algumas relações entre propriedades físicas por meio de uma análise extremamente simplificada.

- (d) **(18 pontos)** Utilizando as equações obtidas nos itens (c) e (d) e a lei dos gases ideais, obtenha uma dependência aproximada da luminosidade  $L$  de uma estrela com sua massa e raio, isto é, se  $L \propto M^\theta R^\varepsilon$ , encontre  $\theta$  e  $\varepsilon$  para:

- (i) estrelas pouco massivas, nas quais a opacidade segue a lei de opacidade de Kramers:

$$\kappa \propto \rho T^{-3,5}$$

- (ii) estrelas muito massivas, nas quais a opacidade é dominada por espalhamento de elétrons, e portanto

$$\kappa \approx \text{constante}$$

**Observação:** Não utilize a equação de Stefan-Boltzmann. Para fins de estimativa, considere que os gradientes de temperatura e pressão no interior estelar seguem uma relação linear, de forma que:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \approx \frac{T}{R} \qquad \frac{\Delta P}{\Delta r} \approx \frac{P}{R}$$

- (e) **(4 pontos)** Baseando-se nos resultados do item anterior, responda: por que estrelas mais massivas possuem menor tempo de vida?

Outra forma de entender melhor sobre a evolução e estrutura estelar é analisando as escalas de tempo nas quais diferentes processos físicos ocorrem.

- (f) **(4 pontos)** Surpreendentemente, apenas uma pequena fração da massa total de uma estrela está disponível para a geração de energia, aproximadamente 0,8%. Sabendo disso, estime, em bilhões de anos, o período  $t_N$  (tempo nuclear) pelo qual o Sol consegue sustentar sua luminosidade, assumida constante.
- (g) **(10 pontos)** Um meio alternativo de geração de energia e muito importante na fase inicial da vida de uma estrela é o mecanismo de Kelvin-Helmholtz, no qual a contração da estrela diminui sua energia interna, eventualmente emitindo essa diferença de energia na forma de radiação. Estime, em milhões de anos, o período  $t_T$  (tempo térmico) pelo qual o Sol conseguiria sustentar sua luminosidade, assumida constante, caso essa fosse sua única fonte de energia.

**Dica:** A expressão fornecida de  $U$  para uma esfera homogênea pode ser útil.

- (h) **(8 pontos)** Na gênese estelar, a pressão contrapondo o peso das camadas superiores é praticamente nula, e a estrela contrai. Estime o período  $t_D$  (tempo dinâmico), em horas, para que o Sol colapsasse caso estivesse nesse regime.

Dos seus últimos resultados, você deve conseguir notar a seguinte relação hierárquica:

$$t_N \gg t_T \gg t_D$$

Essa disparidade entre escalas de tempo é a grande razão pela qual a estrutura e evolução estelar são quantitativamente previsíveis. Ao analisarmos processos associados a uma dessas escalas temporais, podemos ignorar processos mais lentos e assumir que os mais rápidos estão em equilíbrio. Muitos problemas em aberto na astrofísica estelar lidam com a quebra dessas suposições: por exemplo, convecção e perda de massa por vento estelar são desvios do equilíbrio dinâmico, com consequências térmicas e nucleares.

**Solução:**

- (a) A energia cinética  $K$  será a soma da energia cinética média de cada molécula diatômica de gás. Lembrando que cada grau de liberdade da molécula está associado a uma energia  $k_B T/2$ :

$$K = N \cdot \frac{i}{2} \cdot k_B T$$

Em um gás diatômico, a molécula possui  $i = 5$  graus de liberdade (desconsiderando o vibracional) Portanto, vale que:

$$K = \frac{5}{2} N k_B T$$

Podemos escrever o número de moléculas  $N = M/m$ . Com isso, aplicando a condição do enunciado:

$$2K + U < 0$$

$$5 \cdot \frac{M}{m} \cdot k_B T < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Por fim:

$$M > M_J = \frac{25}{3} \frac{R k_B T}{G m}$$

Para descobrir se a nuvem de gás hidrogênio ( $H_2$ ) de  $M = 100 M_\odot$ ,  $T = 10$  K e  $R = 10$  pc poderá colapsar e formar estrelas, calculemos qual deveria ser a sua massa mínima para o colapso, dada a sua temperatura e raio:

$$M_J = \frac{25}{3} \cdot \frac{10 \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \text{ kg}$$

$$\approx 800 M_\odot$$

Note então que a massa da nuvem  $M = 100 M_\odot < M_J$ . Sendo assim, concluímos que **é pouco provável que a nuvem colapse para formar estrelas**.

- (b) Imagine uma pequena porção de material estelar de seção reta  $\Delta A$  a qual se estende de um raio  $r$  até  $r + \Delta r$ . A massa da porção é  $\Delta m = \rho(r) \cdot \Delta A \cdot \Delta r$ . No regime de equilíbrio hidrostático, a força resultante da diferença de pressões entre suas extremidades deve balancear a atração gravitacional. Ou seja:

$$P(r) \Delta A - [P(r) + \Delta P] \Delta A = \Delta m \cdot g(r)$$

$$-\Delta P = \rho(r) g(r) \cdot \Delta r$$

Sabem-se que a aceleração da gravidade  $g(r)$  a um raio  $r$  depende somente da massa interna  $m(r)$ . Então:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

Logo:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Como queríamos demonstrar.

(c) Temos que:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \propto (\kappa \cdot r)^\alpha \cdot (\rho \cdot L)^\beta \cdot (r \cdot T)^\gamma \cdot (\sigma)^\delta$$

O que implica a igualdade dos dimensionais:

$$L^{-1} \cdot \Theta = (M^{-1} \cdot L^3)^\alpha \cdot (M^2 \cdot L^{-1} \cdot T^{-3})^\beta \cdot (L \cdot \Theta)^\gamma \cdot (M \cdot T^{-3} \cdot \Theta^{-4})^\delta$$

Pela igualdade entre cada uma das dimensões fundamentais, podemos escrever equações para  $M$ ,  $L$ ,  $T$  e  $\Theta$ :

$$0 = -\alpha + 2\beta + \delta$$

$$-1 = 3\alpha - \beta + \gamma$$

$$0 = -3\beta - 3\delta$$

$$1 = \gamma - 4\delta$$

De onde se conclui:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma = -3$$

$$\delta = -1$$

(d) Primeiramente, note que, utilizando o resultado do item passado, podemos afirmar que:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \propto \kappa \cdot \rho \cdot L \cdot r^{-2} \cdot T^{-3}$$

Perceba que não incluímos  $\sigma$  por ser uma constante e não um parâmetro físico da estrela. Segundo a aproximação fornecida na dica, tomamos  $\Delta T/\Delta r \approx T/R = T \cdot R^{-1}$ . Como forma de estimativa, podemos também tomar  $r \rightarrow R$  e a densidade  $\rho$  como a densidade média; isto é,  $\rho \propto M \cdot R^{-3}$ . Logo:

$$T \cdot R^{-1} \propto \kappa \cdot M \cdot R^{-3} \cdot L \cdot R^{-2} \cdot T^{-3}$$

$$L \propto T^4 \cdot R^4 \cdot \kappa^{-1} \cdot M^{-1} \quad (1)$$

Note que, para obtermos uma dependência entre  $L$ ,  $R$  e  $M$ , somente, devemos primeiramente achar uma dependência entre  $T$ ,  $R$ , e  $M$ . Para isso, utilizamos a lei dos gases ideais em conjunto com a equação do equilíbrio hidrostático. Note que, da lei dos gases ideais, temos:

$$P = \rho k_B T$$

Então, podemos escrever que:

$$P \propto \rho T \propto M \cdot R^{-3} \cdot T \quad (2)$$

Agora, da equação que rege o equilíbrio hidrostático, podemos dizer que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \propto \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}$$

Segundo a observação, tomamos  $\Delta P/\Delta r \approx P/R = P \cdot R^{-1}$ . Em luz da aproximação utilizada, fazemos também  $m(r) \rightarrow m(R) = M$ ,  $\rho(r) \rightarrow \rho \propto M \cdot R^{-3}$ , e  $r \rightarrow R$ . Assim:

$$P \cdot R^{-1} \propto M \cdot \rho \cdot R^{-2}$$

$$P \cdot R^{-1} \propto M \cdot M \cdot R^{-3} \cdot R^{-2}$$

$$P \propto M^2 \cdot R^{-4} \quad (3)$$

Eliminamos a dependência de  $P$  a partir de (2) e (3), de forma que:

$$P \propto M \cdot R^{-3} \cdot T \propto M^2 \cdot R^{-4}$$

$$T \propto M \cdot R^{-1}$$

Substituindo o resultado de  $T$  em (1):

$$L \propto M^4 \cdot R^{-4} \cdot R^4 \cdot \kappa^{-1} \cdot M^{-1}$$

$$L \propto M^3 \cdot \kappa^{-1}$$

A partir dessa expressão generalizada, particularizamos para os casos solicitados.

(i) Para  $\kappa \propto \rho T^{-3,5}$ :

$$L \propto M^3 \cdot (M \cdot R^{-3})^{-1} \cdot (M \cdot R^{-1})^{3,5}$$

$$L \propto M^{5,5} \cdot R^{-0,5}$$

Ou seja,  $\theta = 5,5$  e  $\epsilon = -0,5$ .

(ii) Para  $\kappa \approx$  constante:

$$L \propto M^3$$

Ou seja,  $\theta = 3$  e  $\epsilon = 0$ .

(e) Note que, de ambas as relações anteriores, encontramos algo do tipo

$$L \propto M^\alpha$$

Com  $\alpha > 1$ . O tempo de vida é proporcional à massa e inversamente proporcional à luminosidade, de forma que

$$t \propto \frac{M}{L} \propto M^{1-\alpha}$$

Note que, como  $1 - \alpha < 0$ ,  $t$  diminui à medida que  $M$  aumenta, e então concluímos o raciocínio de que estrelas mais massivas possuem um menor tempo de vida.

(f) A massa disponível para fusão nuclear é:

$$M = 8 \cdot 10^{-3} \cdot M_\odot$$

O que corresponde a uma energia de:

$$E = M \cdot c^2 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot M_\odot \cdot c^2$$

O tempo nuclear é calculado como:

$$t_N = \frac{E}{L_\odot} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot M_\odot \cdot c^2}{L_\odot}$$

$$t_N \approx 100 \text{ Gyr}$$

(g) Como foi anteriormente deduzido, a energia potencial da estrela, assumida homogênea, é:

$$U = -\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot}$$

Já a energia interna, pelo teorema do Virial, é dada por:

$$\Omega = \frac{1}{2}U$$

$$\Omega = -\frac{3GM_\odot^2}{10R_\odot}$$

Se não houver conversão de massa em energia,  $|\Omega|$  é toda a energia passível de ser transformada em radiação, em primeira aproximação. Assim:

$$t_T = \frac{-\Omega}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{10R_\odot \cdot L_\odot}$$

$$t_T = 10 \text{ Myr}$$

- (h) Nesse caso, a estrela colapsa somente sob sua própria gravidade. Assim, uma massa de teste na superfície do Sol percorreria metade de uma elipse degenerada, com semi-eixo maior  $a = R_{\odot}/2$ . O período, portanto:

$$P = 2 \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(R_{\odot}/2)^3}{GM_{\odot}}}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{R_{\odot}^3}{2GM_{\odot}}}$$

$$t \approx 0,5 \text{ h}$$