



PROVA TEÓRICA TREINAMENTO 3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. **NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.**
4. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos).
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

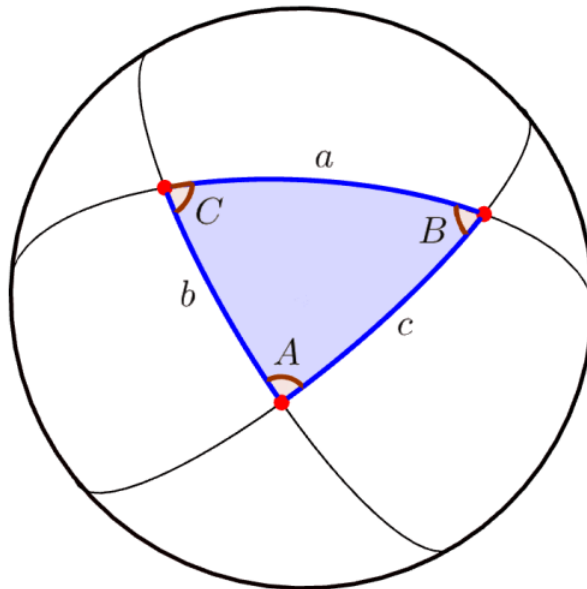
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Regras básicas de derivação e integração para uma função do tipo $y(x) = x^n$:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

em que C é uma constante.

1. Óptica de Telescópios (10 pontos)

Num telescópio refrator ideal de razão focal $f/5$, a distância focal da objetiva é de 100 cm, e a da ocular 1 cm.

- (a) **(3 pontos)** Qual é o aumento A do telescópio? Qual é o comprimento focal do telescópio L_0 , ou seja, a distância entre a objetiva e a ocular?

A introdução de uma lente côncava (Barlow) entre a objetiva e o foco primário é uma técnica comum para se obter um maior aumento sem ter que se aumentar o comprimento focal do telescópio. Uma lente Barlow, de distância focal 1 cm, é então colocada no telescópio e dobra sua ampliação.

- (b) **(7 pontos)** A que distância d_B do foco primário a lente Barlow deve ser colocada para se conseguir o dobro do aumento? Determine, nesse caso, o incremento ΔL no comprimento do telescópio.

Solução: Ver questão 7 da prova teórica da IOAA 2016.

2. Retorno à Polônia (15 pontos)

As distâncias interestelares são grandes em comparação com os tamanhos das estrelas. Assim, aglomerados estelares e galáxias que não contêm matéria difusa essencialmente não obscurecem os objetos atrás deles. Estime a fração do céu que é obscurecida por estrelas quando olhamos na direção de uma galáxia com brilho superficial de $\mu = 18,0 \text{ mag arcsec}^{-2}$. Suponha que a galáxia consiste em estrelas semelhantes ao Sol.

Solução:

Para os seguintes cálculos, considere que d é a distância à galáxia em pc, r é a distância em UA entre dois objetos na galáxia que tenham separação angular de $1''$ e N é o número total de estrelas em uma área de 1 arcsec^2 . É importante observar que, à medida que você se afasta da galáxia, o fluxo diminui de maneira proporcional a $\frac{1}{d^2}$. Contudo, ao mesmo tempo, a área angular da galáxia também diminuirá proporcionalmente a $\frac{1}{d^2}$. Assim, o brilho da superfície da galáxia não depende da distância da galáxia. Como todas as estrelas são semelhantes ao sol, a magnitude de uma estrela é a seguinte:

$$m_{estrela} - M_{\odot} = 5 \times \log(d) - 5$$

$$m_{estrela} = 4,82 + 5 \times \log(d) - 5$$

$$m_{estrela} = 5 \times \log(d) - 0,18$$

A magnitude de N estrelas é dada pela seguinte expressão, que pode ser manipulada para obter a razão $\frac{d^2}{N}$:

$$m_N = m_{estrela} - 2,5 \times \log(N)$$

$$18 = 5 \times \log(d) - 0,18 - 2,5 \times \log(N)$$

$$18,18 = 2,5 \times \log\left(\frac{d^2}{N}\right)$$

$$\frac{d^2}{N} = 1,87 \times 10^7$$

Como cada estrela ocupa uma área de πR_\odot :

$$f = \frac{A_{estrelas}}{A_{total}}$$

$$f = \frac{N\pi R_\odot}{r^2\theta^2}$$

$$f = \frac{N\pi R_\odot}{d^2}$$

$$f = \frac{\pi \left(\frac{6,955 \times 10^8}{1,496 \times 10^6}\right)^2}{1,87 \times 10^7}$$

$$f = 3,63 \times 10^{-12}$$

3. Estrela Politrópica (15 pontos)

- (a) **(9 pontos)** Considere uma estrela de massa M e raio R que possua uma relação politrópica entre a sua pressão e densidade da forma $P = K\rho^{1+1/n}$. Utilizando-se algumas técnicas de integração, conclui-se que a energia potencial gravitacional Ω de uma estrela politrópica pode ser representada da seguinte forma:

$$\Omega \equiv - \int_c^s \frac{GM_r dM_r}{r} = -\frac{GM^2}{2R} - \left[\frac{n+1}{2} \frac{4\pi}{3} Pr^3 \right]_c^s + \frac{n+1}{6} \int_c^s 4\pi r^3 dP$$

onde M_r representa a massa contida até uma distância r do centro, e os índices s e c na integral representam, respectivamente, os valores apropriados dos limites de integração na

superfície e centro da estrela. Assim, calcule o valor de α na equação $\Omega = \alpha \frac{GM^2}{R}$ em função de n . Considere que a pressão tende a zero na superfície.

- (b) **(6 pontos)** Estime a relação massa-raio dessa estrela com base na relação politrópica fornecida no item anterior, i.e., ache o valor de β na relação $M \propto R^\beta$ em função de n .

Solução:

- (a) Primeiramente, pode-se perceber que o termo entre colchetes é zero, já que a pressão tende a zero na superfície e o raio é zero no centro. Além disso, utilizando a equação de equilíbrio hidrostático $\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$ e que $dM_r = \rho dV = 4\pi r^2 \rho dr$, temos que:

$$\Omega = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{n+1}{6} \int_c^s 4\pi r^3 \frac{GM_r}{r^2} \rho dr = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{n+1}{6} \int_c^s 4\pi r^3 \frac{GM_r}{r^2} \cdot \frac{dM_r}{4\pi r^2}$$

Assim, simplificando o termo da integral, chegamos a:

$$-\int_c^s 4\pi r^3 \frac{GM_r}{r^2} \cdot \frac{dM_r}{4\pi r^2} = -\int_c^s \frac{GM_r dM_r}{r}$$

que é exatamente a integral dada na definição de Ω . Portanto, chegamos na seguinte equação, que pode ser facilmente resolvida:

$$\Omega = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{6} \Omega \Rightarrow \Omega = \frac{3}{n-5} \frac{GM^2}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{n-5}$$

- (b) Como pedido no enunciado, deve-se estimar a relação massa-raio, i.e., não é necessário realizar cálculos detalhados, e sim aproximações. Tais estimativas podem ser feitas aproximando as derivadas nas relações utilizadas no interior a frações, ou seja, substituir as equações diferenciais pelas respectivamente relações algébricas e conforme as unidades:

$$\rho \approx \rho_{avg} \approx \frac{M}{R^3}$$

$$\frac{P}{R} \approx \rho \frac{GM}{R^2} \approx \frac{GM^2}{R^5} \Rightarrow P \approx \frac{GM^2}{R^4}$$

Assim, utilizando a relação $P = K\rho^{1+1/n}$, tem-se que:

$$K\rho^{\frac{n+1}{n}} \approx \frac{GM^2}{R^4} \Rightarrow M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} \approx \frac{K}{G} \Rightarrow M \propto R^{\frac{n-3}{n-1}} \Rightarrow \beta = \frac{n-3}{n-1}$$

4. Chuva de Meteoros (20 pontos)

Considere um radar que detecta meteoros apenas quando a trilha de ionização é perpendicular à linha entre o radar e o meteoro. Esse radar está a uma latitude de $52,0^\circ N$. No dia 2 de julho, às 11:02 no horário local, meteoros provenientes de uma chuva foram detectados no horizonte exatamente na direção leste. O radar foi girado em $40,0^\circ$ ao longo do horizonte em direção ao sul. Em sua nova posição, começou a detectar meteoros da mesma chuva às 12:42. Encontre as coordenadas equatoriais do radiante dessa chuva de meteoros.

Considere que a ascensão reta do Sol nesse dia era de aproximadamente 6h43min. Ignore a equação do tempo e a diferença entre o horário solar e o horário civil. Além disso, considere que o radiante

estava acima do horizonte durante as duas observações.

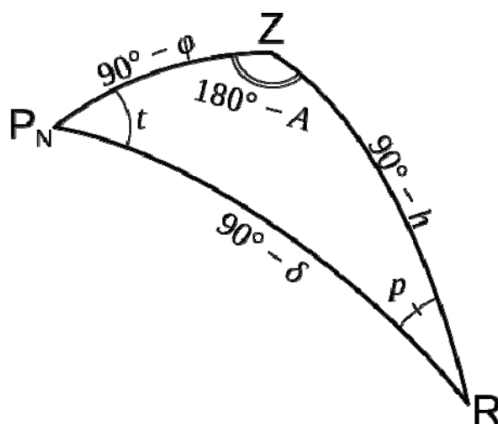
Solução:

O radiante de uma chuva de meteoros deve estar no plano perpendicular ao ponto onde um meteoro foi detectado pelo radar. No caso da primeira observação, esse plano é o mesmo que contém o meridiano local, o que restringe os possíveis valores de ascensão reta para o radiante. O primeiro valor possível é o da ascensão do meridiano local. Ao meio-dia, o meridiano local corresponderia a uma ascensão reta de 6h43min. Dessa forma, às 11:02, a ascensão reta seria de 5h45min. A outra possibilidade seria a ascensão reta de 17h45min, oposta ao meridiano local.

Note que para um intervalo tão curto, a diferença entre o tempo sidereal e o tempo solar é desprezível, então não foi necessário realizar nenhuma conversão nos cálculos de ascensão reta.

Na segunda observação, um meteoro foi detectado no horizonte em um azimute de 130°. Dessa forma, o radiante deve estar no círculo máximo que intersecta com o horizonte nos azimutes de 130° - 90° = 40° e 130° + 90° = 220°. Se o radiante estivesse no meridiano local na primeira observação, o azimute do radiante 1h40min depois da primeira observação só podia ser de 40°. Da mesma forma, o azimute da segunda observação seria de 220° se o radiante estivesse originalmente no meridiano oposto.

É possível utilizar o seguinte triângulo esférico para determinar a declinação do radiante:



Nesse triângulo esférico, t corresponde ao tempo transcorrido entre as observações dos meteoros.

Considerando o caso do azimute de 40° e utilizando a fórmula das quatro partes:

$$\cos(90^\circ - \phi)\cos(t) = \sin(90^\circ - \phi)\cot(90^\circ - \delta) - \sin(t)\cot(180^\circ - A)$$

$$\sin(\phi)\cos(t) = \cos(\phi)\tan(\delta) + \frac{\sin(t)}{\tan(A)}$$

$$\tan(\delta) = \tan(\phi)\cos(t) - \frac{\sin(t)}{\cos(\phi)\tan(A)}$$

$$\tan(\delta) = \tan(52^\circ)\cos(25^\circ) - \frac{\sin(25^\circ)}{\cos(52^\circ)\tan(40^\circ)}$$

$$\tan(\delta) = 0,342$$

$$\delta = \arctan(0,342)$$

$$\delta = 18,9^\circ$$

Note que no caso para o azimute de 220° o triângulo esférico utilizado é muito similar ao da imagem. As únicas diferenças são que o ângulo do azimute corresponderia a A , não a $180^\circ - A$ e que o ângulo t seria de $17\text{h}45\text{min} + 1\text{h}40\text{min} - 12\text{h} = 7\text{h}25\text{min}$. Contudo, esse azimute seria inviável porque o radiante estaria abaixo do horizonte. Utilizando a fórmula das quatro partes, é possível concluir que a altura do radiante seria de $-51,5^\circ$ na segunda observação.

Dessa forma, as coordenadas equatoriais do satélite são $\delta = 18,9^\circ$ e $\alpha = 5\text{h}45\text{min}$.

5. Wi-Fi Polar (25 pontos)

A fabricante estadunidense de foguetes SpaceX começou a colocar satélites *Starlink* em órbita polar em setembro de 2021, com seu primeiro lançamento do tipo na Base da Força Aérea de Vandenberg, Califórnia. Considere um satélite *Starlink* que se move em uma órbita polar geocêntrica de semi-eixo maior $a = 15.400\text{ km}$, excentricidade $e = 0,55$ e argumento do periastro $\omega = 270^\circ$. Imagine um observador no Polo Norte terrestre. O satélite emite um sinal com frequência de $2,4\text{ GHz}$. Em algum momento, o satélite é observado no horizonte. Encontre:

- (12 pontos) A distância do observador ao satélite.
- (13 pontos) A mudança na frequência do sinal captado.

Solução:

6. Polônia 2022 (30 pontos)

O gráfico abaixo representa um trecho da curva de luminosidade de uma binária eclipsante. Assumindo que as componentes desse binário são estrelas de sequência principal de idade zero, que suas órbitas são circulares e que são coplanares ao observador, encontre qual dos mínimos de brilho (primário ou secundário) está representado no gráfico.

Observação: Na solução, utilize apenas os dados fornecidos no enunciado ou na folha de constantes.

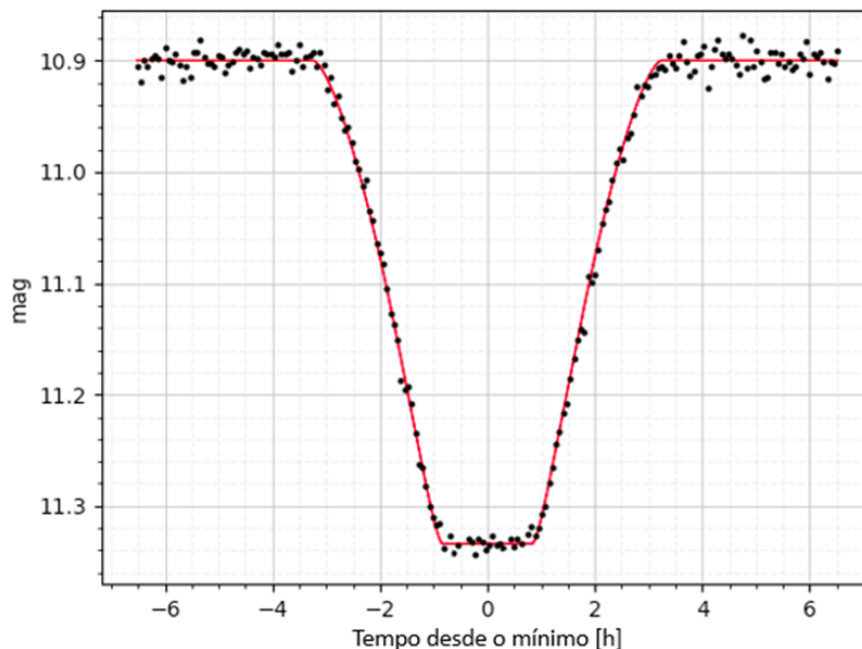


Figura 1: Trecho de curva de luz de uma binária eclipsante.

Solução: Sejam os índices A e B referentes às estrelas de maior e menor raio, respectivamente. Ademais, sejam os índices 1 e 2 referentes respectivamente à situação sem eclipse e ao mínimo representado. Como as estrelas pertencem à sequência principal, presumir-se-á que a maior em raio também é em temperatura e luminosidade. Assim, o mínimo primário (maior variação de magnitude) seria o trânsito, enquanto o secundário (menor variação de magnitude) seria a ocultação.

Primeiramente, vamos encontrar a razão entre os raios das duas estrelas.

Para binárias eclipsantes, é válida a relação:

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{t_B}{t_A} = \frac{2,4 \text{ h}}{4,1 \text{ h}} = 0,58$$

Primeira hipótese: Trânsito

Pela equação de Pogson:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_A \cdot [1 - (R_B/R_A)^2] + F_B}{F_A + F_B} \right)$$

$$m_1 - m_2 = 2,5 \cdot \log \left(1 - \frac{F_A \cdot R_B^2}{(F_A + F_B)R_A^2} \right)$$

$$\frac{F_A \cdot R_B^2}{(F_A + F_B)R_A^2} = 1 - 10^{(m_1 - m_2)/2,5}$$

$$\frac{F_A}{F_A + F_B} = \frac{R_A^2}{R_B^2} \cdot \left(1 - 10^{(m_1 - m_2)/2,5} \right)$$

$$\frac{F_A}{F_A + F_B} = \frac{R_A^2}{R_B^2} \cdot \left(1 - 10^{(m_1 - m_2)/2,5}\right)$$

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{R_B^2}{R_A^2} \cdot \frac{1}{1 - 10^{(m_1 - m_2)/2,5}} - 1$$

Como as estrelas estão à mesma distância da Terra:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{L_B}{L_A}$$

Substituindo-se os valores:

$$\frac{L_B}{L_A} = 0,029$$

Segunda hipótese: Ocultação

$$m_2 - m_1 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_A}{F_A + F_B}\right)$$

$$\frac{F_A}{F_A + F_B} = 10^{(m_1 - m_2)/2,5}$$

$$\frac{F_B}{F_A} = 10^{(m_2 - m_1)/2,5} - 1$$

$$\frac{L_B}{L_A} = 10^{(m_2 - m_1)/2,5} - 1$$

$$\frac{L_B}{L_A} = 0,49$$

Conclusão

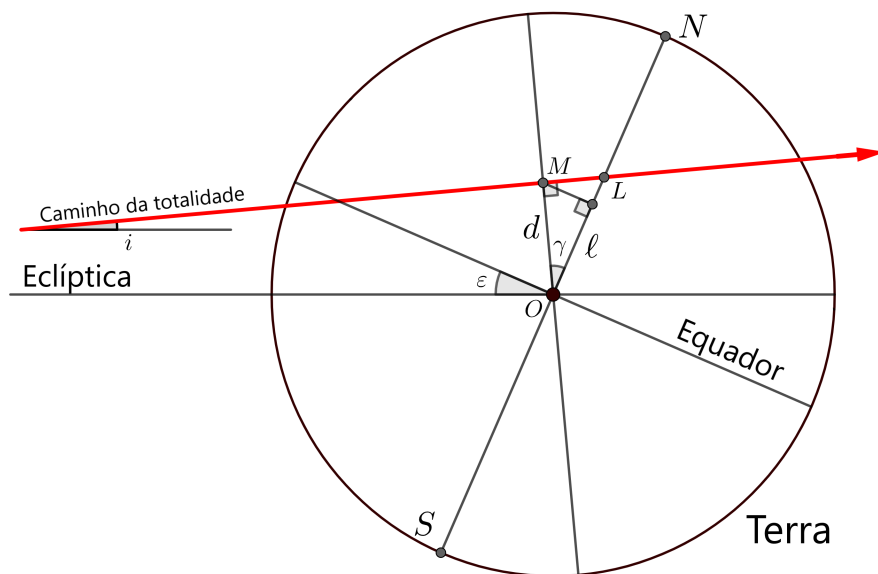
Para responder à questão, devemos lembrar que as estrelas são parte da sequência principal. Como tal, a razão entre seus raios e suas luminosidades segue uma tendência. Constatase experimentalmente que variações consideráveis no raio exigem variações muito expressivas na luminosidade. Sendo assim, conclui-se que se trata de um trânsito, isto é, um mínimo primário.

7. Eclipse Solar (30 pontos)

Um certo eclipse solar total ocorre no dia do equinócio de março de tal maneira que o caminho da totalidade passa pelo Equador terrestre formando um ângulo $\alpha = 15,0^\circ$ com o mesmo. Durante o eclipse, a Lua está situada perto do nodo ascendente da órbita. Qual o valor da altura máxima sobre o horizonte que o eclipse central poderá ser observado? Em que latitude na Terra o eclipse central será observado nessa máxima altura?

Solução:

Na figura abaixo está um esquema da Terra e o caminho da totalidade em sua superfície vistos a partir do Sol (e da Lua).



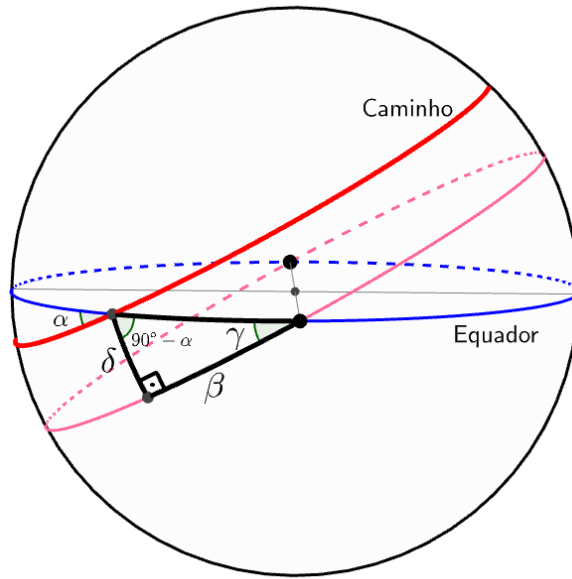
No dia do equinócio de março, o equador será visto nesta projeção como a linha inclinada com relação à eclíptica pelo ângulo $\varepsilon = 23,45^\circ$. O sistema “Terra-Lua” se move como um todo ao longo da eclíptica, mas esse movimento não importa para esse problema. O básico é o movimento da Lua e sua sombra em relação ao centro da Terra, que é mostrado como uma seta na figura. Está direcionado para a direita, pois a Lua gira no sentido anti-horário ao redor da Terra, se olharmos do norte. A Lua está situada perto do nó ascendente da órbita e se move (com a sombra) não paralela ao plano da eclíptica, mas pelo ângulo $i = 5,14^\circ$. O ângulo γ é igual à inclinação do caminho da totalidade com relação ao Equador, portanto:

$$\gamma = \varepsilon + i$$

O eclipse central em altitude máxima será visível no ponto M , que é o ponto mais próximo do ponto O , onde o Sol é visível no zênite. Sendo R o raio da Terra, o comprimento do segmento MO (nesta projeção) é igual a:

$$d = R \sin \delta$$

em que δ é o ângulo \widehat{MCO} , sendo C o centro da Terra. Para encontrar o ângulo δ , temos o seguinte triângulo esférico:



Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin \beta}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}$$

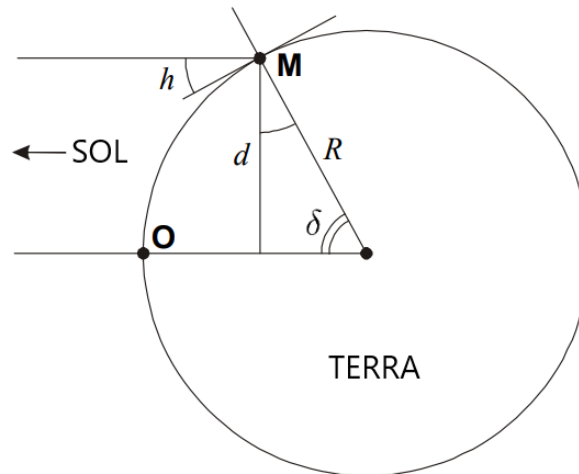
Pela lei dos 4 elementos:

$$\cot \delta \sin \beta = \cot \gamma \sin 90^\circ + \cos \beta \cos 90^\circ \Rightarrow \frac{\cos \delta \cos \alpha \sin \delta}{\sin \delta \sin \gamma} = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}$$

Logo:

$$\cos \delta = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}$$

Para determinar a altitude do Sol no ponto M , vamos olhar para a figura em projeção lateral relativamente à direção Sol-Lua:



Com isso, vemos que

$$\cos h = \frac{d}{R} = \sin \delta \Rightarrow h = 90^\circ - \delta \Rightarrow \boxed{h = 65,4^\circ}$$

Agora, vamos encontrar a latitude do ponto M . Pela primeira figura, a latitude de M é igual à latitude do ponto L , pois o segmento conectando esses pontos na projeção é paralelo ao Equador. O comprimento do segmento OL é igual a

$$\ell = d \cos \gamma$$

Analogamente à relação entre o ângulo δ e a distância d , temos que a relação entre a latitude φ e a distância ℓ é $\sin \varphi = \ell/R$. Logo:

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{\ell}{R} \right) = \arcsin (\sin \delta \cos \gamma) \Rightarrow \boxed{\varphi = 23,7^\circ \text{ N}}$$

Note que a rotação da Terra influencia apenas na longitude do ponto M , não alterando a resposta do problema.

8. Emissão Síncrotron: Explorando a Radiação de Alta Energia (45 pontos)

A *emissão síncrotron* é um fenômeno que ocorre quando partículas carregadas, como elétrons, são aceleradas em campos magnéticos intensos. Essas partículas em movimento curvilíneo emitem radiação eletromagnética de alta energia, que pode ser observada em diversas regiões do espectro eletromagnético, desde rádio até raios gama. Esse fenômeno é observado em diversos contextos astronômicos, como em jatos ultrarrelativísticos em nuvens de gás que orbitam buracos negros.

Quando alguma partícula está eletricamente carregada e é acelerada, ela emitirá energia na forma de ondas eletromagnéticas. A fórmula de Larmor quantifica essa energia por unidade de tempo, no referencial do elétron, da seguinte forma:

$$P' = \frac{2}{3} \frac{(e)^2 (a'_\perp)^2}{c^3}$$

Em que P' é a potência emitida, e é a carga elétrica e a'_\perp a aceleração perpendicular ao raio de rotação, todos no referencial de repouso, ou seja, do elétron.

- (4 pontos) Primeiramente, faremos um estudo da dinâmica relativista, com o apoio da visão cinemática do tema. Com isso em vista, use o fato de que $a = \frac{dv}{dt}$ para mostrar que $a = \frac{a'}{\gamma^2}$, em que γ é o fator de Lorentz.
- (6 pontos) No referencial do laboratório, podemos escrever a potência emitida por $P = \frac{dE}{dt}$. Demonstre que a potência é uma invariante.
- (10 pontos) Sabendo que o vetor velocidade do elétron, \vec{v} e o vetor campo magnético, \vec{B} , fazem um ângulo α entre si, mostre que a potência emitida, também conhecida por *Emissão Síncrotron*, é dada por:

$$P = \frac{2e^4 B^2 \sin^2(\alpha)}{3c^3 m_o^2} \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^2$$

Em que E é a energia total do elétron.

Ao longo de um pulso de emissão síncrotron, um elétron ultrarrelativístico ($\gamma \gg 1$) percorre um ângulo $\Delta\theta = \frac{2}{\gamma}$ em sua órbita. Considere, por simplificação, que o elétron está se movendo na direção de observador muito distante no momento da emissão.

- (d) **(15 pontos)** Utilize dessas informações para encontrar a duração de um pulso de energia do elétron. Disso, conclua que a frequência característica da emissão é:

$$\nu_c = \frac{eB}{m_o} \text{sen}(\alpha) \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^2$$

- (e) **(10 pontos)** Considere um elétron ultrarrelativístico que emitiu, inicialmente, um pulso de frequência característica ν_o . Mostre que o tempo para o elétron resfriar por radiação síncrotron, levando em consideração que ele emite energia de forma ininterrupta, é escrito da forma abaixo.

$$t = \frac{3m_o^3 c^3}{2e^4 B^2 \text{sen}^2(\alpha)} \sqrt{\frac{eB \text{sen}(\alpha)}{\nu_o m_o}}$$

Solução:

- (a) Uso direto da equação fornecida

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dv'}{dt'} \frac{1}{\gamma} = \frac{a'}{\gamma^2} \quad (1)$$

- (b) Uso direto da equação fornecida

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dE}{dE'} \frac{dE'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \gamma P' \gamma^{-1} = P' \quad (2)$$

- (c) Primeramente, pela análise dinâmica do movimento da partícula inserida em um campo magnético, vem:

$$F_{res\perp} = \gamma m_o a_{\perp} = eBv \text{sen}\alpha \Rightarrow a_{\perp} = \frac{eBv \text{sen}\alpha}{\gamma m_o} \quad (3)$$

Em segundo plano, sabemos que a fórmula de Larmor, dado o resultado encontrado em (5) e (6) pode ser escrita como:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 a_{\perp}^2 \gamma^4}{c^3} \quad (4)$$

Finalmente, aliado ao fato de que $E = \gamma m_o c^2 \Rightarrow \gamma^2 = \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^2$,

$$P = \frac{2e^4}{3c^3} \frac{B^2 \text{sen}^2 \alpha}{m_o^2} \gamma^2 \Rightarrow P = \frac{2e^4}{3c^3} \frac{B^2 \text{sen}^2(\alpha)}{m_o^2} \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^2 \quad (5)$$

- (d) Como o elétron faz seu movimento em direção ao observador, podemos montar o esquema abaixo.

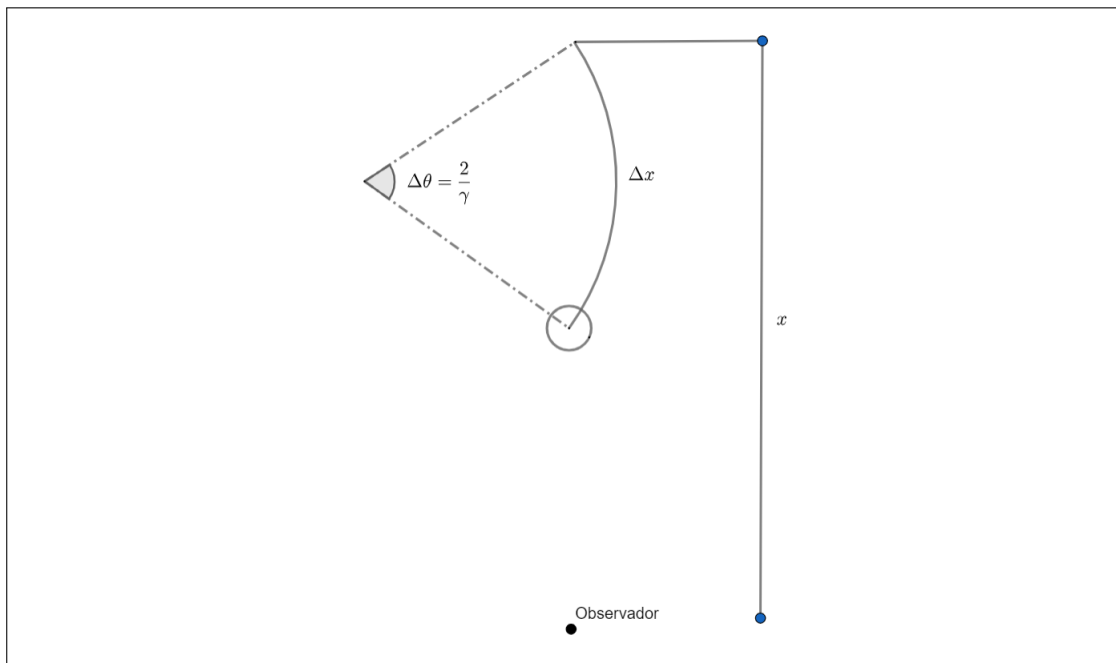


Figura 2: Esquema do Problema.

A duração total do pulso será o tempo entre a luz chegar ao observador até ela parar de ser percebida. Assim, vem:

$$\Delta t_p = \left(\frac{\Delta x}{v} + \frac{x - \Delta x}{v} \right) - \frac{x}{c} = \frac{\Delta x}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \Rightarrow \Delta t_p = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad (6)$$

Mais uma vez, pela dinâmica da partícula,

$$\gamma m_o \omega^2 r = B e v \text{sen} \alpha \Rightarrow \omega = \frac{B e \text{sen} \alpha}{\gamma m_o} \quad (7)$$

Da cinemática circular, temos:

$$\Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega} = \frac{2 \gamma m_o}{\gamma B e \text{sen} \alpha} \Rightarrow \Delta t = \frac{2 m_o}{e B \text{sen} \alpha} \quad (8)$$

Assim,

$$\Delta t_p = \frac{2 m_o}{e B \text{sen} \alpha} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c} \right)} = \frac{2 m_o}{e B \text{sen} \alpha} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c} \right)} \quad (9)$$

Como $\gamma \gg 1$, $v \approx c$, então $1 + v/c \approx 2$. Daí,

$$\Delta t_p = \frac{m_o}{\gamma^2 e B \text{sen} \alpha} \therefore \nu_c = \frac{\gamma^2 e B \text{sen} \alpha}{m_o} \Rightarrow \nu_c = \frac{e B}{m_o} \text{sen}(\alpha) \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^2 \quad (10)$$

(e) Da equação encontrada para a potência emitida pelo elétron,

$$\frac{dE}{dt} = P = \frac{2e^4 B^2 \text{sen}^2(\alpha)}{3c^3 m_o^2} \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^2 \Rightarrow E = P \Delta t \Rightarrow \quad (11)$$

$$\frac{1}{E_o} = \frac{2e^4 B^2 \text{sen}^2 \alpha}{3m_o^4 c^5} t \Rightarrow t = \frac{3m_o^4 c^5}{2e^4 B^2 \text{sen}^2 \alpha} \frac{1}{E_o} \quad (12)$$

Frequência característica do pulso inicial,

$$\nu_o = \frac{eB}{m_o} \text{sen}(\alpha) \left(\frac{E_o}{m_o c^2} \right)^2 \Rightarrow E_o = m_o c^2 \sqrt{\frac{\nu_o m_o}{eB \text{sen} \alpha}} \quad (13)$$

Assim, obtemos:

$$t = \frac{3m_o^3 c^3}{2e^4 B^2 \text{sen}^2(\alpha)} \sqrt{\frac{eB \text{sen}(\alpha)}{\nu_o m_o}} \quad (14)$$

9. O Retorno de Dr. Totávio (50 pontos)

Considere um estranho corpo celeste esférico de raio R e massa M e densidade uniforme, inteiramente composto por um fluido misterioso, o qual não oferece resistência alguma ao movimento de qualquer objeto através dele. O exímio engenheiro interplanetário Dr. Totávio, instigado pela natureza do corpo celeste, resolve embarcar em sua pedra espacial artificial para estudá-lo mais de perto. A pedra, de massa $m \ll M$, estava inicialmente a uma distância muito grande da estrela, se aproximando dela com velocidade inicial v_0 e parâmetro de impacto b .

- (5 pontos) Encontre a condição para que a pedra não colida com o corpo, em termos de R , M , v_0 e b .
- (10 pontos) Assumindo que a condição encontrada no item passado é satisfeita, obtenha, em termos de R , M , v_0 e b , o ângulo de desvio φ da trajetória da pedra, ou seja, o ângulo formado entre os vetores velocidades inicial e final (após muito tempo).
- (10 pontos) Neste item, suponha que a condição não é satisfeita e a pedra acaba colidindo com o corpo. Obtenha o novo ângulo de desvio φ' na trajetória da pedra, bem como o módulo de sua velocidade final após muito tempo, em termos das quantidades já introduzidas.
- (5 pontos) A partir de agora, suponha que a pedra encontra-se em uma órbita elíptica em torno do corpo estranho, de energia mecânica total E e momento angular L . Encontre a condição para que a pedra colida com o corpo em algum ponto de sua órbita, em termos de E , L , m , M e R .
- (15 pontos) Se a condição do item passado for satisfeita, é evidente que parte da órbita da pedra estará localizada no interior do corpo. Devido a isso, a cada período (órbita completa), o periastro da órbita elíptica precessiona um certo ângulo $\Delta\varphi$. Determine $\Delta\varphi$, em termos de E , L , m , M , R .
- (5 pontos) Encontre uma condição, em termos de E , L , m , M e R , para que um observador externo ao corpo estranho não consiga observar qualquer movimento aparente de precessão do periastro da órbita da pedra.

Solução:

(a) Seja r_{min} a distância mínima que a pedra atinge. Pela conservação de momento angular:

$$bv_0 = r_{min}v$$

Conservando a energia mecânica:

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{min}}$$

Substituindo v e desenvolvendo:

$$r_{min}^2 + \frac{2GM}{v_0^2}r_{min} - b^2 = 0$$

$$r_{min} = \frac{GM}{v_0^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bv_0^2}{GM}\right)^2} - 1 \right]$$

Para que a pedra não colida, queremos $r_{min} > R$, logo:

$$\frac{GM}{v_0^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bv_0^2}{GM}\right)^2} - 1 \right] > R$$

Ou, de forma equivalente:

$$b > \sqrt{1 + \frac{2GM}{v_0^2}R}$$

(b) O ângulo de desvio é o suplemento do ângulo 2ψ entre as assíntotas:

$$\varphi = \pi - 2\psi$$

Em que:

$$\psi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\sqrt{e^2 - 1}\right)$$

Sendo a excentricidade dada por:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} = \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2b}{GM}\right)^2}$$

Lembrando que $E = mv_0^2/2$ e $L = mbv_0$. Logo: Logo:

$$\varphi = \pi - 2 \arctan\left(\frac{bv_0^2}{GM}\right)$$

Ou, de forma mais simples:

$$\varphi = 2 \arctan\left(\frac{GM}{v_0^2b}\right)$$

- (c) Esse item é composto de várias etapas distintas; portanto, separemos a resolução em partes:

Parte 1: Formato da trajetória no interior do corpo

Primeiramente, estudemos o formato da trajetória da pedra ao adentrar o corpo estranho. Usemos um sistema cartesiano Oxy , com origem no centro do corpo, e orientado de forma que o eixo y aponte para o ponto de máxima aproximação do centro. Como a força F — pela Lei de Gauss— só depende da massa interna ao raio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$F = -\frac{GM_{in}}{r^2} = -\frac{GM}{R^3}r \equiv -kr \quad (15)$$

Em que definimos $k \equiv GM/R^3$ e $\omega^2 \equiv k/m$. Dividindo em suas componentes:

$$F_x = m\ddot{x} = -kx \qquad F_y = m\ddot{y} = -ky$$

Essas equações correspondem a dois movimentos harmônicos simples (MHS) distintos nas direções x e y . Ou seja: o movimento da pedra dentro do planeta é a composição de dois movimentos harmônicos simples de mesma frequência angular ω em direções perpendiculares. A solução em cada eixo é dada, de forma geral, por uma combinação linear de senos e cossenos:

$$x(t) = A \sin \omega t + C \cos \omega t \qquad y(t) = D \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Temos $x(0) = 0$, logo $C = 0$. Além disso, $v_y(0) = \dot{y}(0) = 0$, logo $D = 0$ (verifique performando a derivada). Assim, chegamos no seguinte par de equações:

$$x(t) = A \sin \omega t \qquad y(t) = B \cos \omega t$$

Utilizando a propriedade fundamental da trigonometria $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Logo, deduzimos que a trajetória da pedra no interior do corpo é um arco de elipse. Precisamos, agora, determinar os parâmetros A e B . Perceba que eles correspondem, respectivamente, às distâncias máxima e mínima da pedra ao centro, que podem ser determinadas utilizando-se as leis de conservação da energia e do momento angular.

Parte 2: Encontrando A e B

Vamos determinar a energia potencial gravitacional da pedra $U(r)$ dentro do planeta. Há duas abordagens comuns a serem adotadas: (i) calcular diretamente a integral que leva à $U(R)$, segundo a definição de potencial; (ii) fazer uma analogia com um sistema clássico do tipo massa-mola. Aqui, optaremos pela segunda abordagem; a primeira fica como exercício para o leitor.

Note, da equação 15, que a dinâmica da pedra é completamente análoga à de um corpo ligado à origem por meio de uma mola de constante elástica k . Sendo assim, convencionando arbitrariamente $U(0) = 0$, temos, por analogia ao sistema massa mola:

$$U(R) = \frac{kr^2}{2} = \frac{GM}{2R^3}r^2$$

Em posse de $U(R)$, conservamos a energia mecânica para achar as distâncias máxima (A) e mínima (B) do centro. Nessas posições, $\vec{v} \perp \vec{r}$, logo, pela conservação do momento angular (que também se conserva na transição de meio, pois o torque permanece nulo):

$$L = mvr$$

Agora, como não há forças resistivas no fluido, temos, por conservação de energia:

$$E = U(r) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = \frac{GM}{2R^3}r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Com alguma manipulação, obtemos uma equação biquadrática:

$$r^4 - \left(\frac{2ER^3}{GMm} + 3R^2 \right) r^2 + \frac{L^2 R^3}{GMm^2} = 0$$

Cujas soluções são

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{ER^3}{GMm} + \frac{3R^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{ER^3}{GMm} + \frac{3R^2}{2} \right)^2 - \frac{L^2 R^3}{GMm^2}} \quad (16)$$

Substituindo $E = mv_0^2/2$ e $L = mbv_0$:

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{v_0^2 R^3}{2GM} + \frac{3R^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2 R^3}{2GM} + \frac{3R^2}{2} \right)^2 - \frac{b^2 v_0^2 R^3}{GM}} \quad (17)$$

Daí, temos então $r_+ = A$ e $r_- = B$.

Parte 3: Geometria do desvio

Primeiramente, estudemos o trajeto da pedra no interior do corpo. Será de nosso interesse determinar o ângulo α mostrado no esquema abaixo.

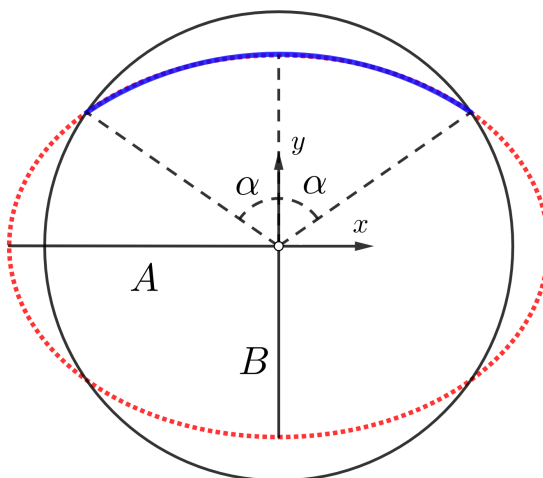


Figura 3: Geometria do movimento da pedra no interior do corpo. O trecho cheio em azul representa o trajeto (arco de elipse) percorrida pelo objeto, enquanto a elipse pontilhada em vermelho representa a elipse à qual a trajetória pertence.

Segundo nosso sistema cartesiano, vale, para o ponto de entrada/saída da pedra:

$$x = \pm R \sin \alpha \qquad y = R \cos \alpha$$

Inserindo na equação da elipse:

$$\frac{R^2 \sin^2 \alpha}{A^2} + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{B^2} = 1$$

$$\left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{A^2} \right) \cos^2 \alpha = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{A^2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{B^2 A^2 - R^2}{R^2 A^2 - B^2}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{B}{R} \sqrt{\frac{A^2 - R^2}{A^2 - B^2}} \right) \qquad (18)$$

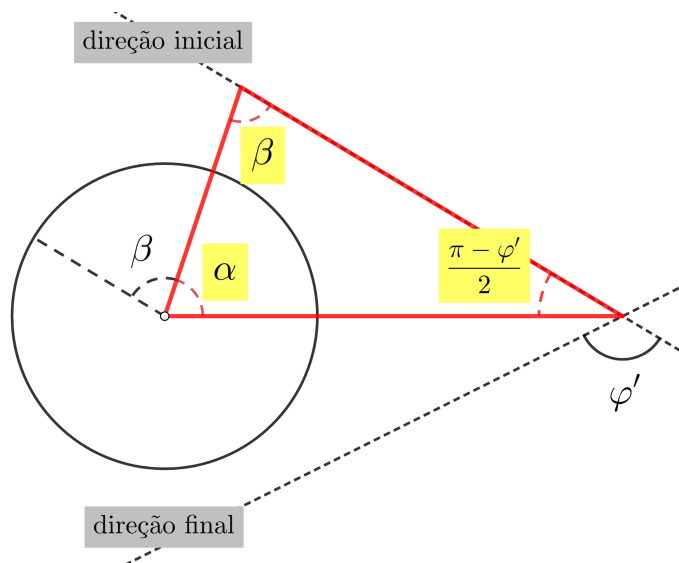


Figura 4: Esquema geométrico do desvio sofrido pela pedra

Para os ângulos do triângulo destacado em vermelho, vale:

$$\frac{\pi - \varphi'}{2} + \alpha + \beta = \pi$$

Logo:

$$\varphi' = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

$$\varphi' = 2(\alpha + \beta) - \pi$$

Sendo α determinado pela equação 18 e β , o ângulo que caracteriza o ponto de entrada, pela equação polar da hipérbole (consulte a solução do item (b) da Questão 1 da Lista 1 dos Treinamentos 2022):

$$R = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\beta + \psi)}$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{\frac{b^2 v_0^2}{GM R} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b v_0^2}{GM}\right)^2}} \right) - \arctan \left(\frac{b v_0^2}{GM} \right)$$

- (d) Para colidir, a distância mínima ao corpo (i.e., periastro) deve ser menor do que seu raio:

$$r_{min} = a(1 - e) < R$$

Temos:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

Substituindo:

$$\boxed{-\frac{GMm}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} \right) < R}$$

Ou, de forma equivalente:

$$\boxed{E < \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R}}$$

- (e) Façamos um esquema da órbita do corpo antes e depois da precessão, conforme ilustra o esquema abaixo. Definiremos os ângulos θ e γ .

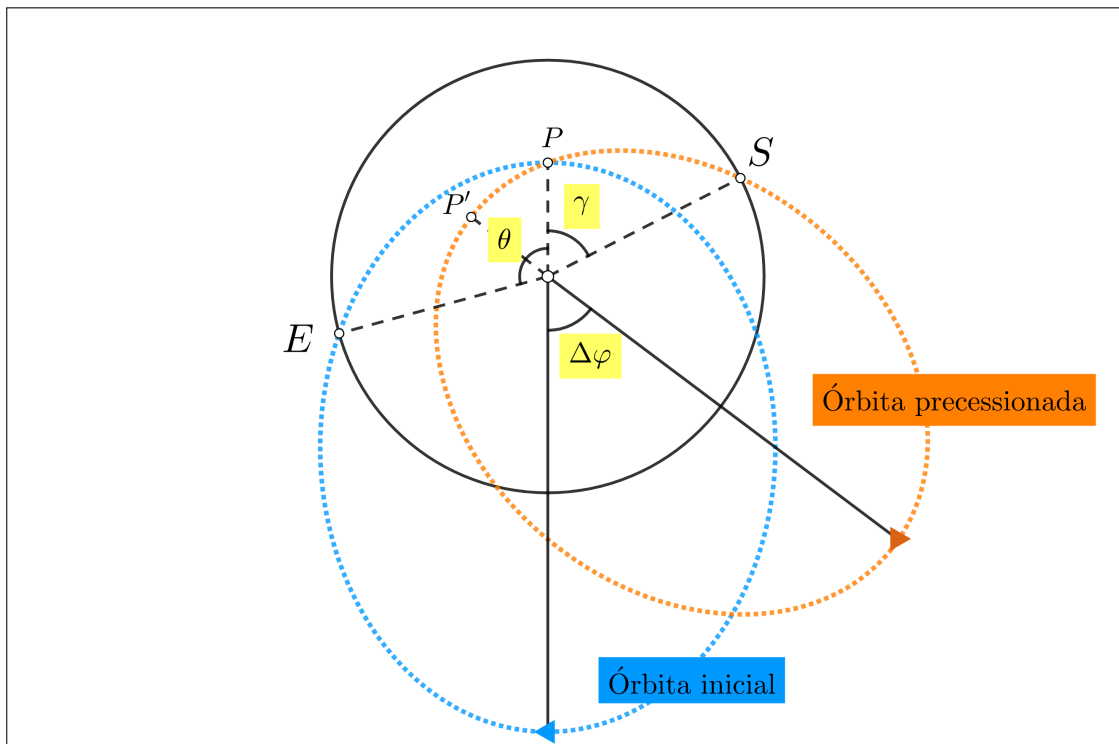


Figura 5: As órbitas inicial e precessionada estão mostradas em azul e laranja, respectivamente. E e S são os pontos de entrada e saída da pedra, respectivamente. P e P' são os periastrons das órbitas. As órbitas se dão no sentido horário, como indicam as setas. A trajetória da pedra no interior do corpo foi omitida. Note que as porções das órbitas internas ao corpo não correspondem à trajetória real da pedra; as órbitas completas foram desenhadas apenas para fins didáticos.

Primeiramente, podemos relacionar θ , γ e α , em que α fora calculado no item passado (vide equação 18). Note que o ângulo varrido pela pedra em seu trajeto dentro do corpo é 2α , logo:

$$\theta + \gamma = 2\alpha$$

Agora, perceba que, em ambos os pontos E e S , a distância da pedra ao corpo na órbita vale R . Sendo assim, a anomalia verdadeira, em módulo, deve ser a mesma. Em outras palavras, os ângulos entre: P e E e; P' e S ; devem ser iguais. Assim:

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma + \Delta\varphi \rightarrow \Delta\varphi = \theta - (2\alpha - \theta) \\ &\rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

O ângulo θ pode ser facilmente obtido da equação polar da elipse, para $r = R$:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

Substituindo e e a do item passado, temos:

$$\theta = \arccos \left(\frac{\frac{L^2}{GMm^2R} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}} \right)$$

- (f) Para que não seja observado movimento aparente de precessão, os pontos de entrada e saída do corpo devem ser os mesmos a cada precessão. Ou seja, $\Delta\varphi$ há de ser um múltiplo inteiro de 2π :

$$\Delta\varphi = 2k\pi$$

Com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\dots$.