OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

CARTA CELESTE

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

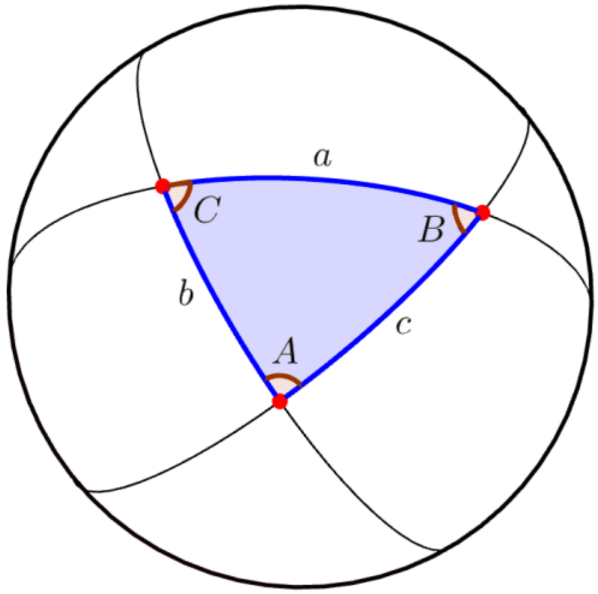
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco"e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 2 horas;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
12. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
13. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento
14. Se não for explicitado o contrário assuma que as cartas estão em projeção de Ayris, na qual a borda da carta representa o horizonte, e a distância zenital de um ponto é diretamente proporcional à distância entre sua representação e o centro da carta.

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\mathrm{sen}(a)}{\mathrm{sen}(A)} = \frac{\mathrm{sen}(b)}{\mathrm{sen}(B)} = \frac{\mathrm{sen}(c)}{\mathrm{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \mathrm{sen}(b) \cdot \mathrm{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \mathrm{sen}(a) = \cot(B) \cdot \mathrm{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

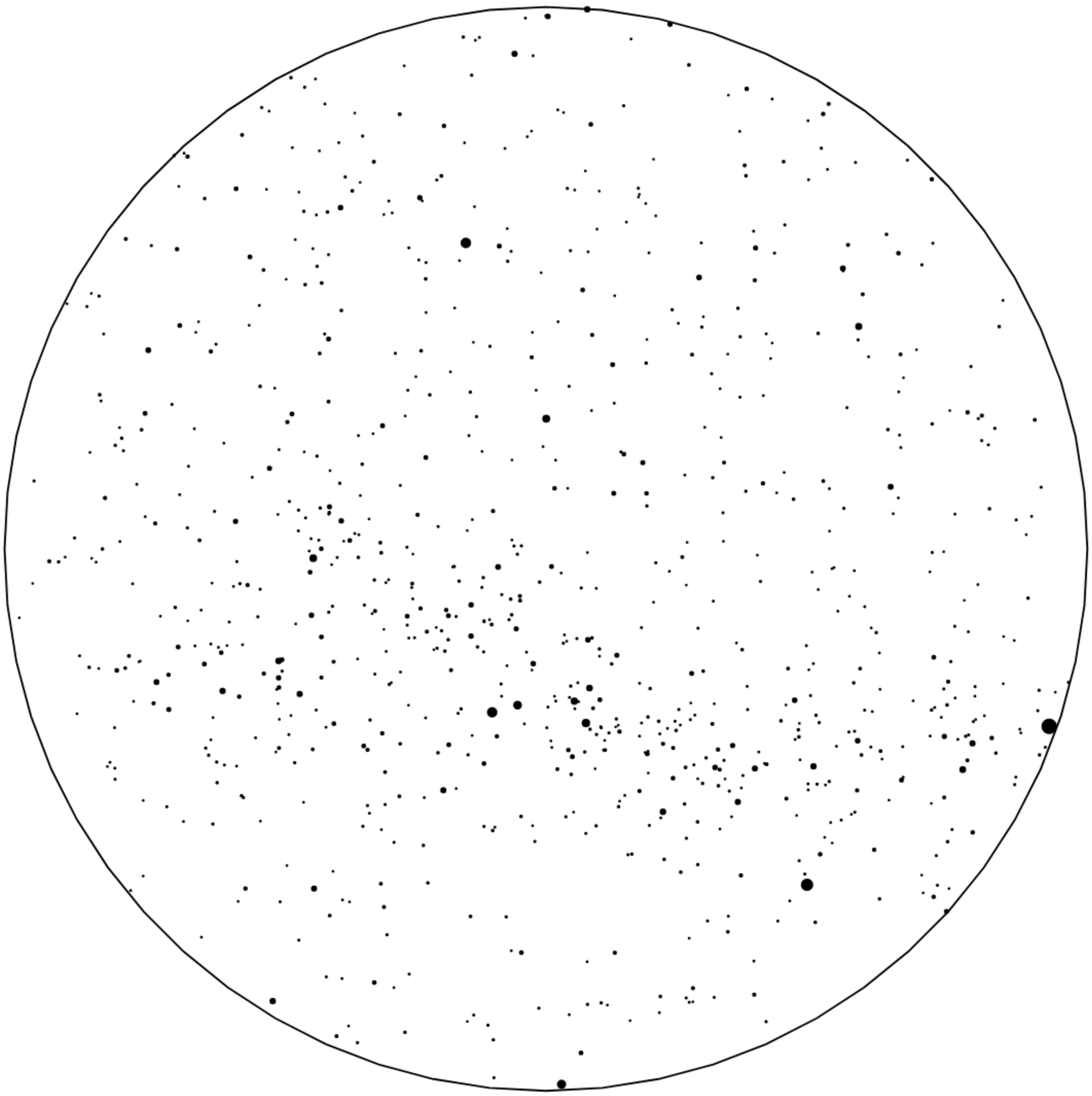
- Coordenadas de algumas estrelas importantes:

Estrela	**Declinação**	**Ascensão Reta**
α-Aql	$+\,08°\,52'\,12{,}1''$	19h 50m 47,48s
α-Cen	$-\,60°\,50'\,02{,}4''$	14h 39m 36,49s
α-Eri	$-\,57°\,14'\,12{,}3''$	01h 37m 42.84s
α-Lyr	$+\,38°\,47'\,01{,}3''$	18h 36m 56,34s
α-Ori	$+\,07°\,24'\,25{,}4''$	05h 55m 10,31s
β-Ori	$-\,08°\,12'\,05{,}9''$	05h 14m 32.27s
α-Vir	$-\,11°\,09'\,40{,}8''$	13h 25m 11,58s

Questões

1. Reconhecimento de carta (45 pontos)

No anseio de avaliar os candidatos a representar nosso país, Raul precisa saber se eles têm familiaridade no reconhecimento de estruturas importantes do céu. Assim, na **carta 1**, em anexo, faça o que se pede:



(a) **(1 ponto)** Trace a cruz do Cruzeiro do Sul.

(b) **(2 pontos)** Circule ω-Cen.

(c) **(3 pontos)** Indique com setas as localizações de Sirius (α-CMa), de Regulus (α-Leo) e de Arcturus (α-Boo). Identifique de forma clara as estrelas.

(d) **(6 pontos)** Estime a latitude da carta (tolerância de 2 graus para pontuação completa e de 5 graus para metade dos pontos). Deixe sua resposta no espaço indicado abaixo da carta.

(e) Trace **(3 pontos)** o Equador Celeste e **(6 pontos)** o Plano Galáctico. Identifique de forma calara os traçados.

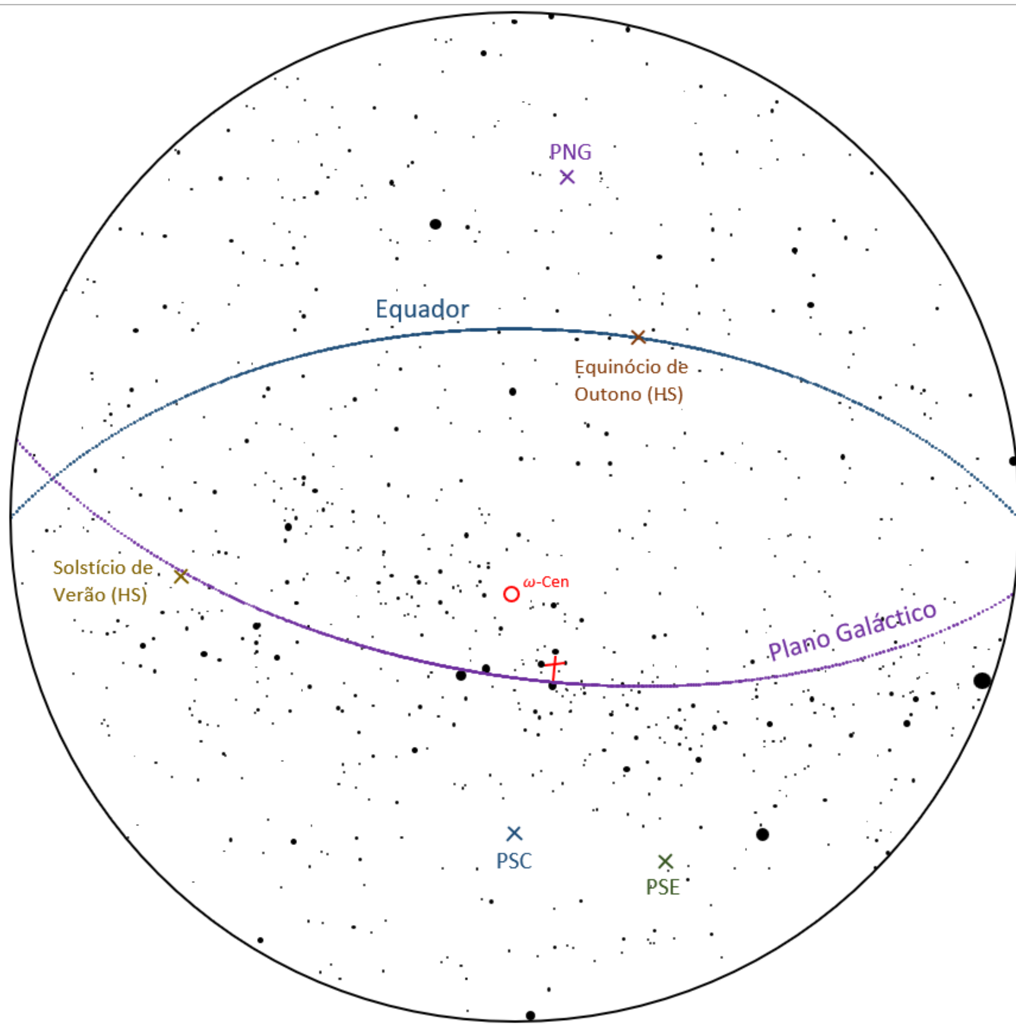
(f) Utilizando marcações em X, marque os pontos a seguir. Identifique cada um deles de maneira clara.

- **(2 pontos)** o Polo Celeste visível;
- **(4 pontos)** o Polo Eclíptico visível;
- **(6 pontos)** o Polo Galáctico visível,
- **(4 pontos)** os pontos de Solstício e Equinócio visíveis,

(g) **(8 pontos)** Estime o tempo sideral da carta (tolerância de 15 minutos para pontuação completa e 30 minutos para metade dos pontos). Deixe sua resposta no espaço indicado abaixo da carta.

Solução:

Segue a carta com as marcações:



Existem diversas formas de encontrar a latitude e o tempo sideral local da carta. Para encontrar a latitude, por exemplo, poderíamos medir a distância zenital do polo e tirar o complementar. Conhecendo a latitude e medindo o azimute do ponto anti-vernal, seria possível usar trigonometria esférica para determinar o TSL.

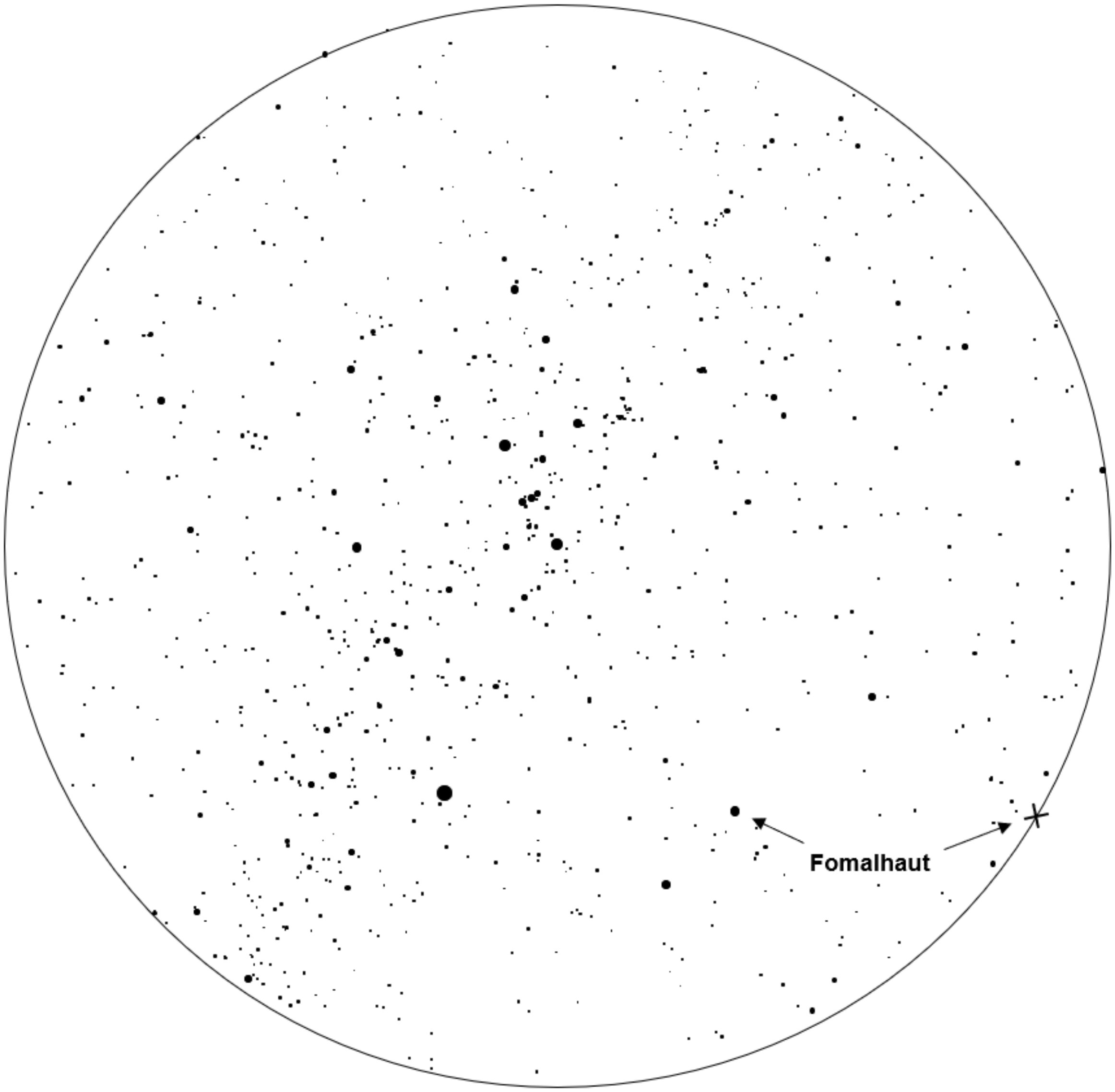
Para essa carta em específico, a solução mais simples parece ser observar que Achenar está se pondo bem próximo ao horizonte Sul:

$$\varphi \approx -|90^\circ + \delta_{Achenar}| = -32{,}7^\circ$$

$$\text{TSL} \approx 12^h + \alpha_{Achenar} = 13^h 37^m$$

Na montagem da carta, os valores exatos foram: $\varphi = -33{,}7^\circ$ e TSL $= 13^h 24^m$

2. **Maritana: longe de casa (105 pontos)** Certo dia, Maritana caminhava e olhava para o céu, caminhou até começar a estranhar algo... Oh, não! Ela se perdeu e agora está em outro sistema estelar! A **carta 2**, em anexo, representa a vista do céu naquele local e instante.



   (a) **(6 pontos)** Na carta, aponte as estrelas Pollux (β-Gem), Castor (α-Gem) e Aldabaran (α-Tau) com setas. Identifique de forma clara cada marcação.

   (b) **(8 pontos)** Na carta, marque com X os objetos de céu profundo M31 e M76. Identifique de forma clara cada marcação.

   (c) **(30 pontos)** Por conta da paralaxe, Maritana enxerga Fomalhaut muito distante de sua posição normal (indicada pelo X). Trace o círculo máximo que passa pelas duas posições de Fomalhaut (a observada na Terra e a observada por Maritana). Nas folhas em branco, explicite o método utilizado e, se houver, as medições feitas na carta.

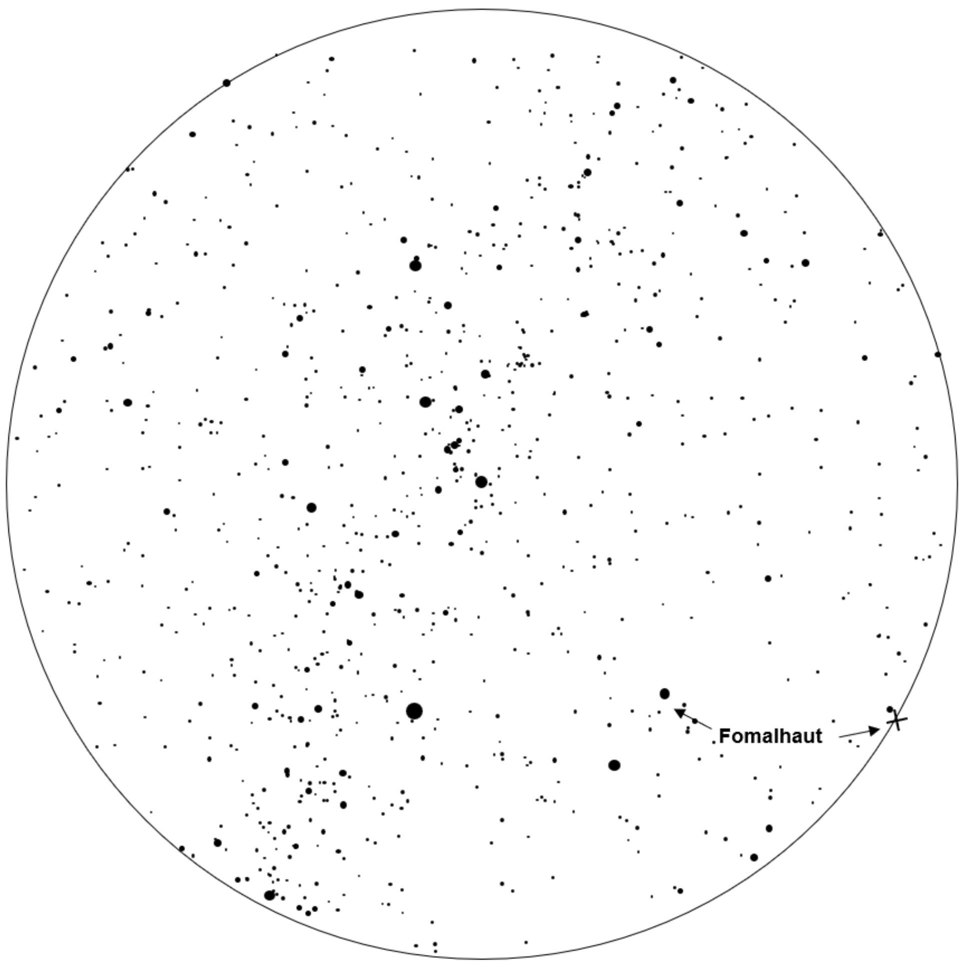
   (d) **(8 pontos)** Ela lembra que, na Terra, a magnitude aparente de Fomalhaut é 1,17 mag. Já no local onde se encontra, ela mede essa magnitude em 0,87 mag. Assim, determine a distância angular entre a Terra e Fomalhaut, vista por Maritana. Nas folhas em branco, explicite o método utilizado e, se houver, as medições feitas na carta. Além disso, escreva sua resposta final no local indicado abaixo da carta.

(e) **(20 pontos)** Na carta, circule a estrela que representa o Sol. Nas folhas em branco, explicite o método utilizado e, se houver, as medições feitas na carta.

(f) **(33 pontos)** Determine as coordenadas equatoriais do local onde Maritana se encontra, quando visto da Terra. Nas folhas em branco, explicite o método utilizado e, se houver, as medições feitas na carta. Em que estrela ela se situa? Escreva suas respostas finais nos locais indicados abaixo da carta.

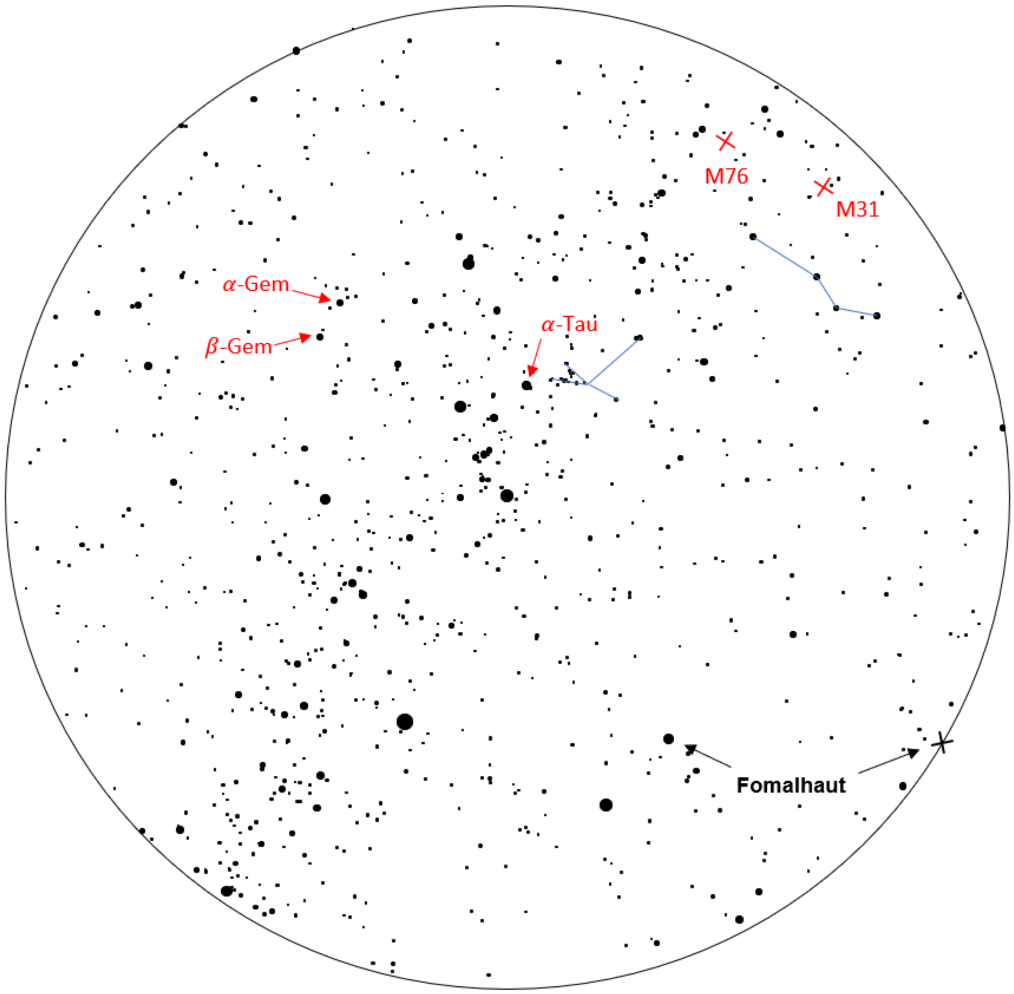
Solução:

Devido a um erro no software utilizado para montar a carta, ela não é uma representação real do céu de Altair. Mesmo assim, a questão pode ser resolvida quase integralmente, a despeito da pergunta "Em que estrela ela se situa?", para a qual não há resposta. A representação do céu em Altair, corrigido o erro, seria:

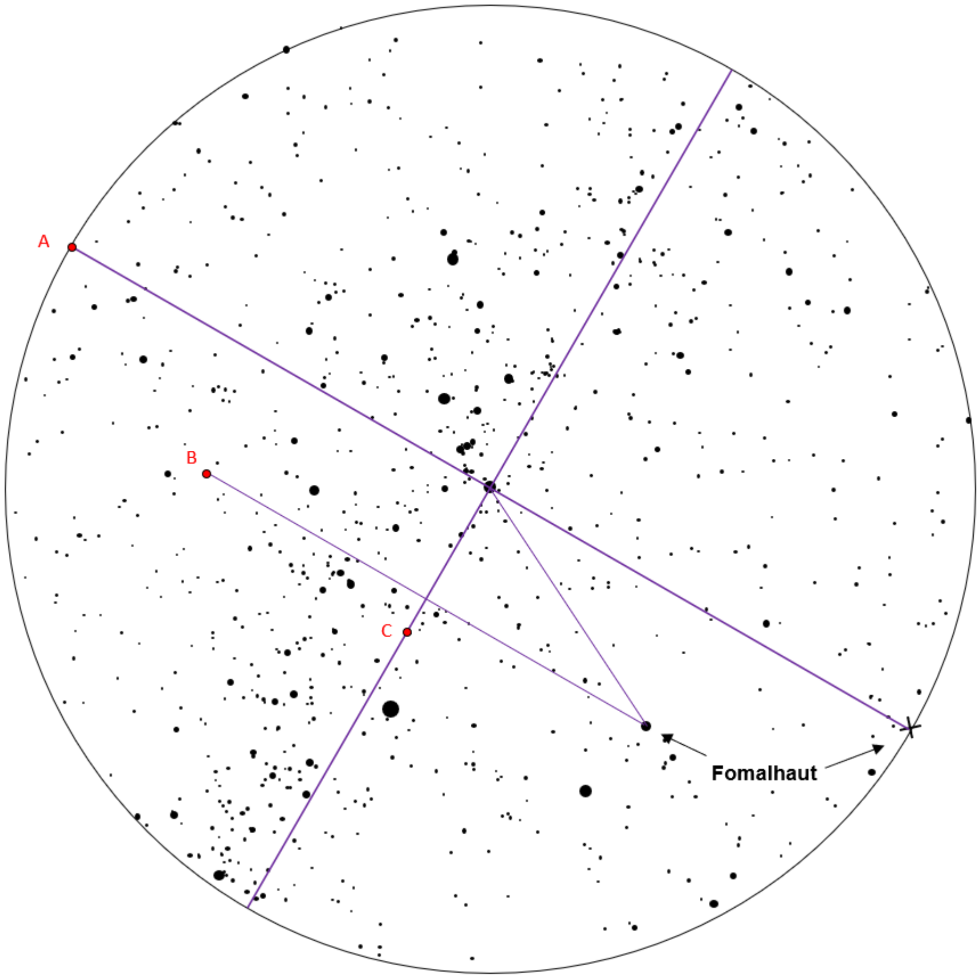


(a) Marcações na carta que segue

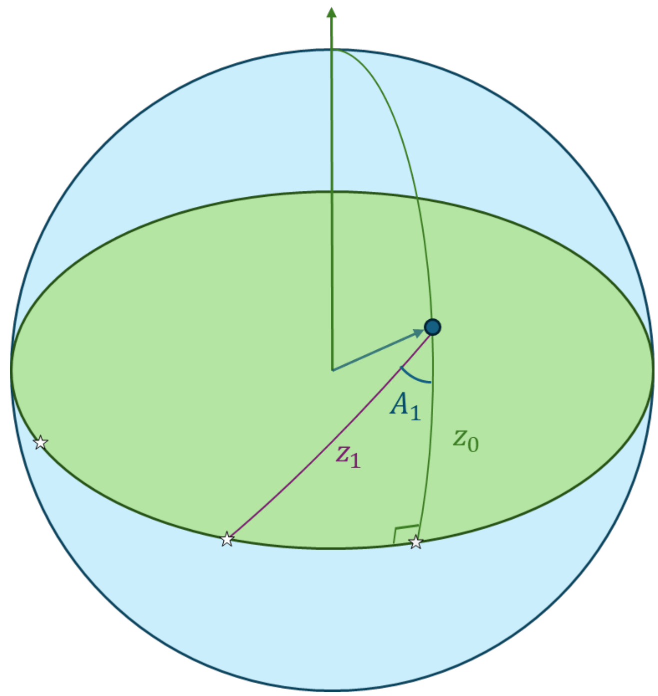
(b) Marcações na carta que segue



(c) O arco de círculo máximo conecta dois pontos diametralmente opostos do horizonte, Como uma das posições de Fomalhaut está sobre o horizonte, vamos traçar a reta diametral, bem como sua perpendicular. Essa segunda é o eixo de simetria do arco de círculo máximo. Isso nos permite projetar a outra posição de Fomalhaut de forma espelhada em relação a essa reta (ponto B):



Sabemos que o ponto de maior altura está sobre o eixo de simetria. Para encontrar sua distância zenital, precisamos usar de trigonometria esférica. Na imagem a seguir, o plano destacado representa o círculo máximo que passa pelas posições de Fomalhaut:

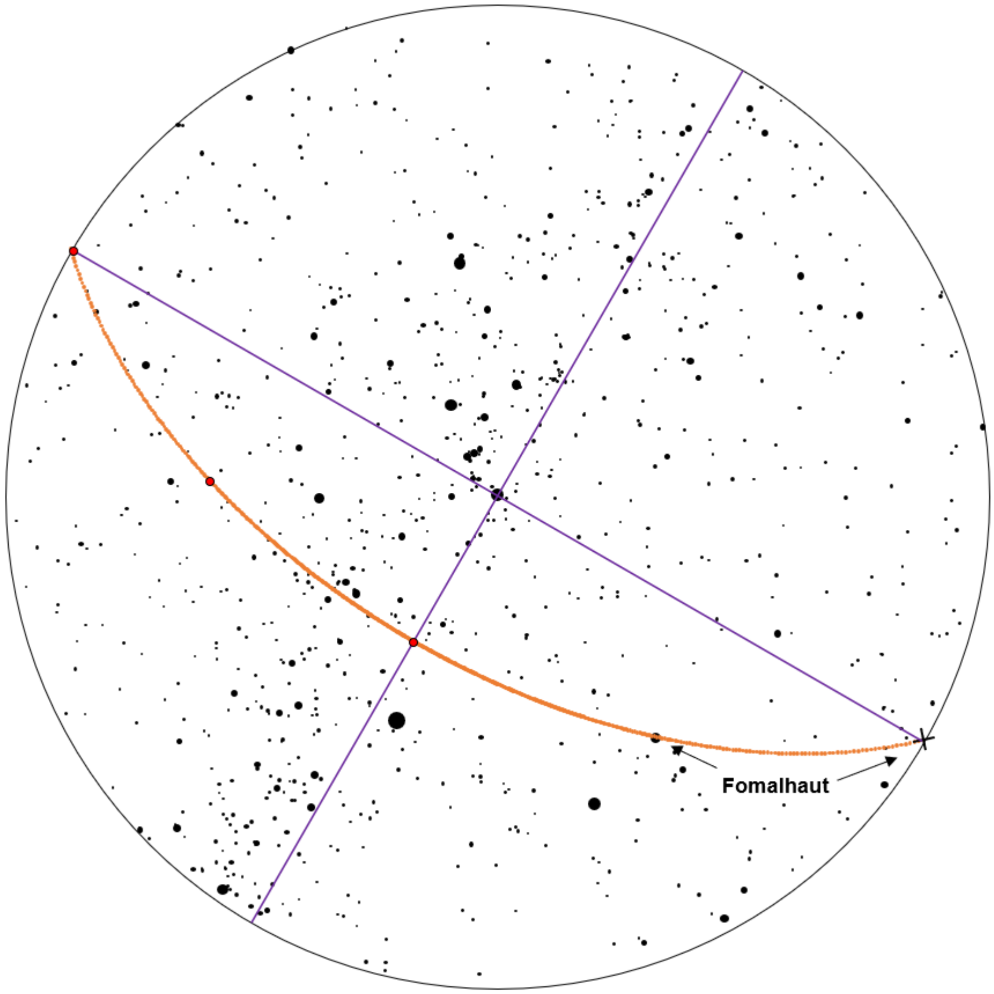


$$\cos(z_0)\cos(A_1) = \text{sen}(z_0)\cot(z_1) - \text{sen}(A_1)\cot(90^\circ)$$

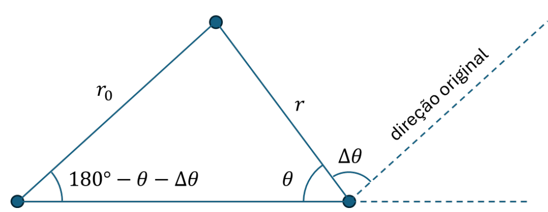
$$\tan(z_0) = \cos(A_1)\tan(z_1)$$

Na carta, podemos medir $A_1 = 63^\circ$ e $z_1 = 53^\circ$. Logo, $z_0 = 31^\circ$.

Por fim, marcamos a curva que se ajusta aos pontos:



(d) Seja $\Delta\theta$ a distância que Maritana observa entre as posições antiga e nova de Fomalhaut, e seja θ a distância angular entre Fomalhaut e o Sol, vista por Maritana. Podemos esboçar a seguinte geometria:



Pela lei dos senos:

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\text{sen}(\theta + \Delta\theta)}{\text{sen}(\theta)}$$

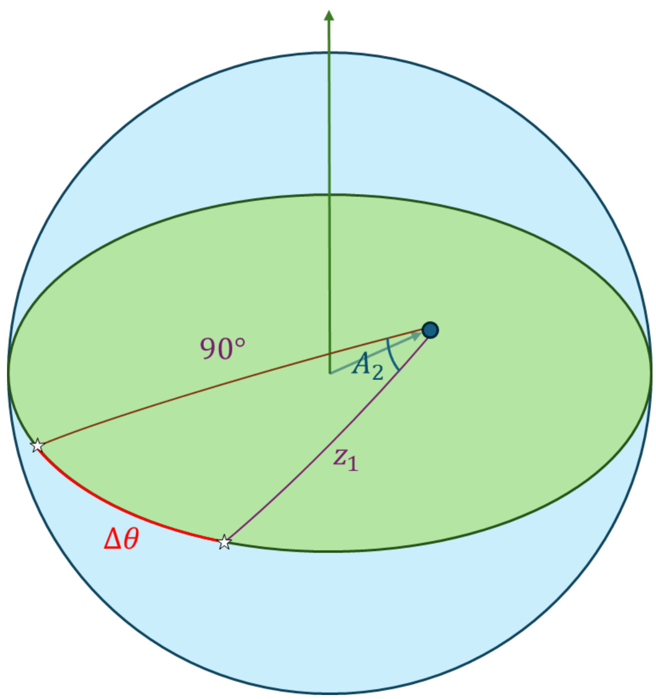
$$\frac{r}{r_0} = \cos(\Delta\theta) + \text{sen}(\Delta\theta)\cot(\theta)$$

O valor de r/r_0 pode ser obtido por Pogson:

$$m - m_0 = 5 \cdot \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\frac{r}{r_0} = 0{,}87$$

Já o valor de $\Delta\theta$ pode ser calculado utilizando o triângulo esférico:

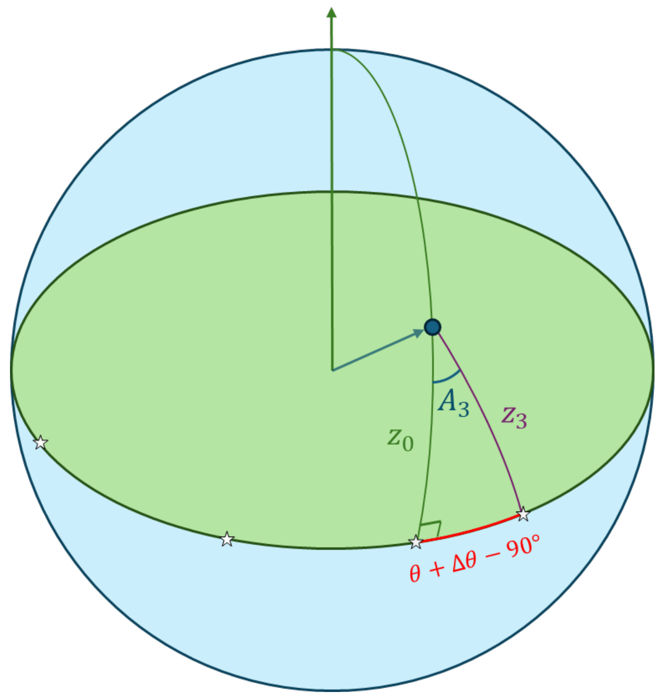


$$\cos(\Delta\theta) = \cos(z_1)\cos(90^\circ + \text{sen}(z_1)\text{sen}(90^\circ \cos(A_2)$$

Na carta, podemos medir $A_2 = 27^\circ$ e $z_1 = 53^\circ$. Logo, $\Delta\theta = 44{,}6^\circ$. Desse modo, substituímos na equação para encontrar $\theta = 77{,}3^\circ$

(e) O ângulo entre a posição original de Fomalhat (no horizonte) e o ponto mais alto do círculo máximo é 90°. Sendo assim, o ângulo entre a nova posição de Fomalhaut e o ponto mais alto é $90^\circ - \Delta\theta$. Portanto, entre o Sol e o ponto mais alto de Fomalhaut sobram $\theta - (90^\circ - \Delta\theta)$.

Para posicionar o Sol na carta, precisamos de informações sobre distância zenital e diferença de azimute, encontradas pelo triângulo esférico:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(z_3) = \cos(z_0)\cos(\theta + \Delta\theta - 90^\circ) + \text{sen}(z_0)\text{sen}(\theta + \Delta\theta - 90^\circ)\cos(90^\circ)$$

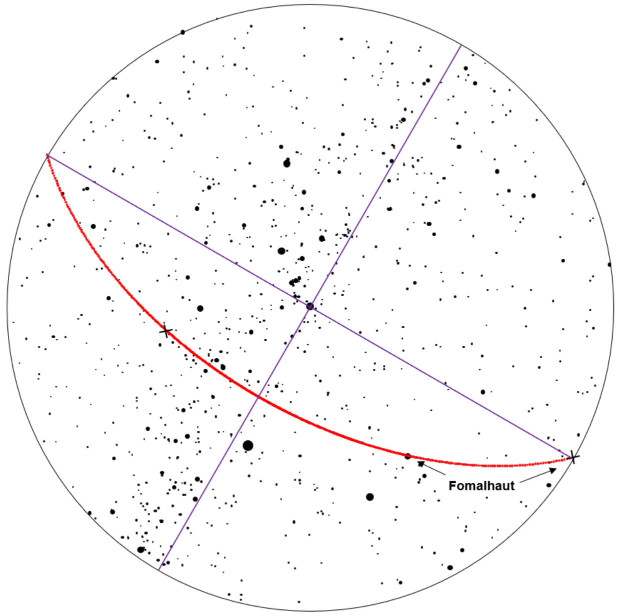
Pelos resultados previamente desenvolvidos, $z_0 = 31^\circ$ e $\theta + \Delta\theta - 90^\circ = 31{,}9^\circ$. Logo, $z_3 = 43{,}3^\circ$.

Já pela lei das cotangentes:

$$\cos(z_0)\cos(90^\circ) = \text{sen}(z_0)\cot(\theta + \Delta\theta - 90^\circ) - \text{sen}(90^\circ)\cot(A_3)$$

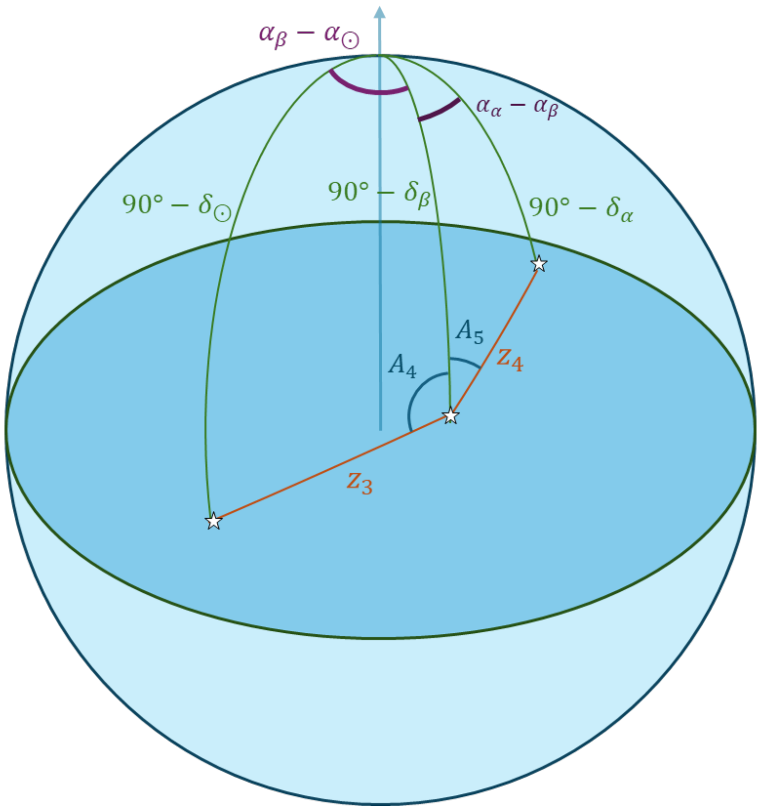
Pela geometria do problema, sabemos que A_3 pertence ao primeiro quadrante. Logo, $A_3 = 50{,}4^\circ$.

Teoricamente, como sabemos que o Sol pertence ao círculo máximo, só precisávamos de uma informação: a distância zenital ou o azimute. Ao recolher ambas, podemos usar a pertinência do Sol ao círculo máximo como um teste que evidenciaria se erramos qualquer conta.



Infelizmente, por culpa do erro descrito no início, não há nenhuma estrela sobre o marcação. Sendo assim, só será avaliado o encontro da posição em relação à carta.

(f) Por culpa da paralaxe, é difícil precisar a posição dos polos a olho. Sendo assim, precisamos de duas estrelas de referência que tenham sofrido pouco efeito de paralaxe. A escolha mais óbvia é Rígel (β) e Betelgeuse (α). As coordenadas serão dadas pela trigonometria esférica que segue:



Primeiro, determinaremos A_5. Depois, conhecido z_3 e medido A_4 na carta, determinaremos $\alpha_\odot$ e $\delta_\odot$. Pela lei das cotangentes:

$$\cos(90^\circ - \delta_\beta)\cos(\alpha_\alpha - \alpha_\beta) = \operatorname{sen}(90^\circ - \delta_\beta)\cot(90^\circ - \delta_\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha_\alpha - \alpha_\beta)\cot(A_5)$$

$$\cot(A_5) = 1{,}52$$

Como $\operatorname{sen}(\alpha_\alpha - \alpha_\beta) > 0$, então $\operatorname{sen}(A_5) > 0$. Assim:

$$A_5 = 33{,}2^\circ$$

Na carta, podemos medir o ângulo entre o Sol e Betelgeuse, com vértice no zênite (Rígel). Desse modo, encontramos $A_4 + A_5 = 72{,}5^\circ$. Logo, $A_4 = 39{,}3^\circ$. Lembrando que anteriormente foi determinado $z_3 = 43{,}3^\circ$. Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ - \delta_\odot) = \cos(90^\circ - \delta_\beta)\cos(z_3) + \operatorname{sen}(90^\circ - \delta_\beta)\operatorname{sen}(z_3)\cos(A_4)$$

$$\delta_\odot = 24{,}9^\circ$$

Pela lei das cotangentes:

$$\cos(90^\circ - \delta_\beta)\cos(A_4) = \operatorname{sen}(90^\circ - \delta_\beta)\cot(z_3) - \operatorname{sen}(A_4)\cot(\alpha_\beta - \alpha_\odot)$$

$$\cot(\alpha_\beta - \alpha_\odot) = 1{,}83$$

Como $\text{sen}(A_4) > 0$, então $\text{sen}(\alpha_\beta - \alpha_\odot) > 0$

$$\alpha_\beta - \alpha_\odot = 1^h 54^m$$

$$\alpha_\odot = 3^h 20^m$$

Como o Sol e a estrela de Maritana estão em pontos opostos do céu, podemos descobrir as coordenadas da estrela em que ela se hospeda:

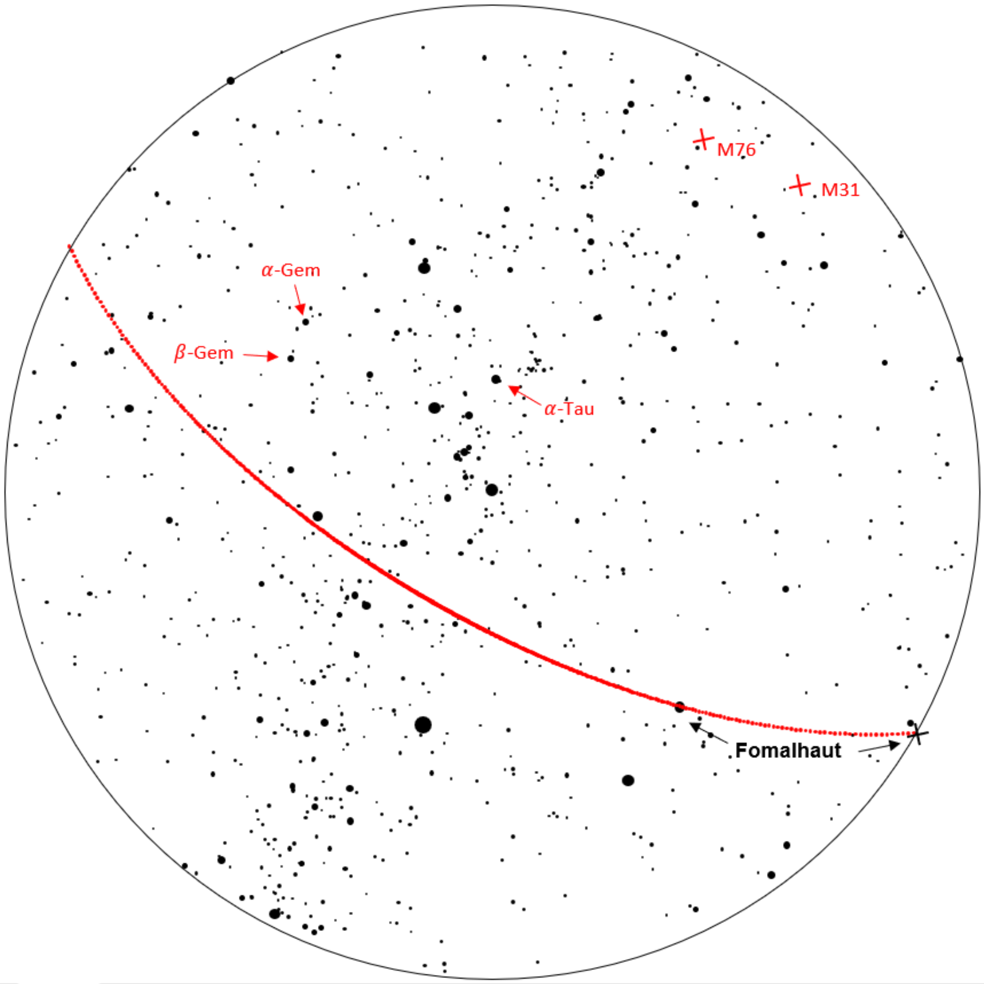
$$\delta = -\delta_\odot = -24{,}9^\circ$$

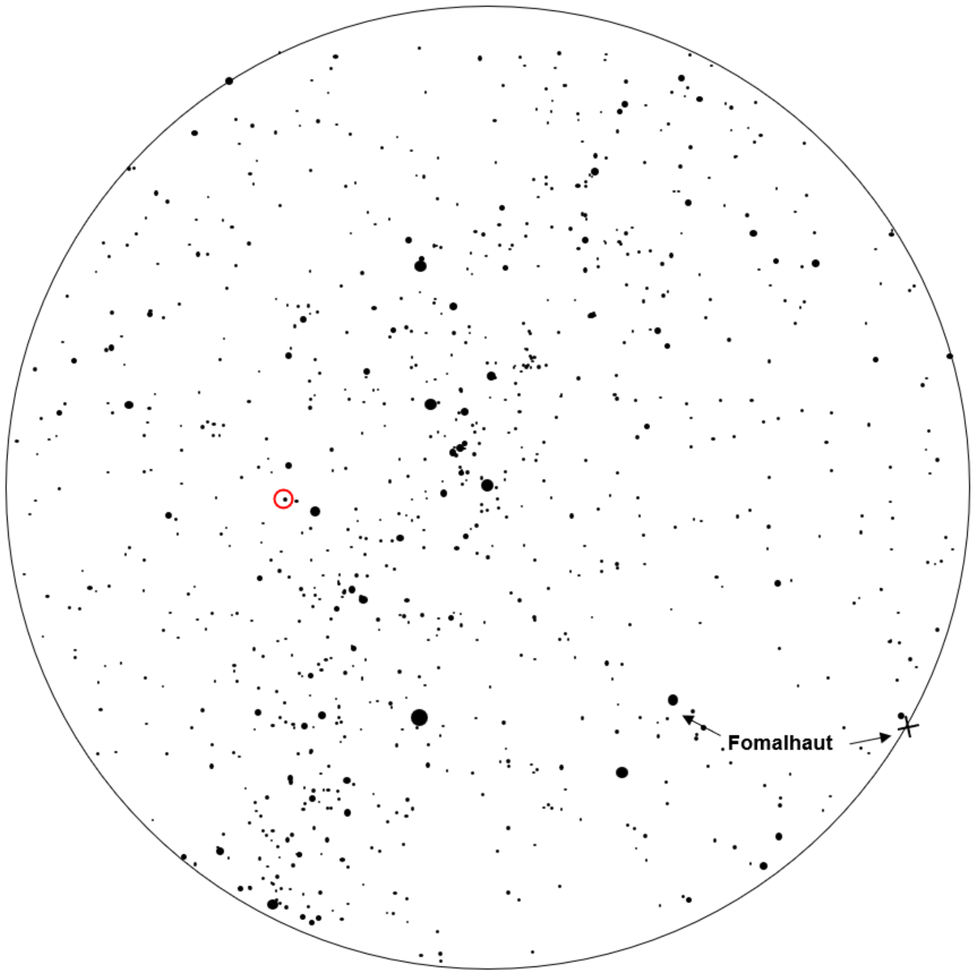
$$\alpha = \alpha_\odot + 12^h = 15^h 20^m$$

Infelizmente, por culpa do erro no software, não há nenhuma estrela próxima com essas coordenadas.

Apêndice: Solução correta

O algoritmo de solução é idêntico, mas os resultados se alteram:


M76
M31
α-Gem
β-Gem
α-Tau
Fomalhaut



$\delta = 8{,}9^\circ$

$\alpha = 19^h 50^m$