OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

ANÁLISE DE DADOS

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco"e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

Formulário

Para encontrar a incerteza σ_ω de uma função genérica $\omega = \omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, a fórmula geral é:

$$\boxed{\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\boldsymbol{\omega = \omega(x,y,\cdots)}$	**Expressões para σ_ω**
$\omega = x \pm y \pm \cdots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \cdots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega = \lvert mx^{m-1}\rvert\, \sigma_x$ ou $\left\lvert\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$\omega = ax$	$\sigma_\omega = \lvert a\rvert\, \sigma_x$ ou $\left\lvert\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega = \lvert a\rvert\, \sigma_x$
$\omega = a\,x\,y$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2\,\sigma_x^2 + (ax)^2\,\sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a\dfrac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = \left(a\,p\,x^{p-1}y^q\right)^2 \sigma_x^2 + \left(a\,x^p\,q\,y^{q-1}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a\sin(bx)$	$\sigma_\omega = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x$
$\omega = b\log_a x$	$\sigma_\omega = \left\lvert\frac{b}{\ln a}\right\rvert \frac{\sigma_x}{x}$

- Para um conjunto de medidas x_i com incerteza σ_i, podemos calcular o valor médio $\bar{x}$ através de uma média ponderada com pesos $1/\sigma_i^2$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i/\sigma_i^2}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

A incerteza correspondente ao valor obtido pela média ponderada é dada por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i 1/\sigma_i^2}}$$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A + Bx$ são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que r é o coeficiente de correlação linear, A e B são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e N é o número de pontos.

- A função densidade de probabilidade para uma distribuição normal com variância σ^2 e média μ é tal que

$$f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1. **Extinção atmosférica (55 pontos)**

   Em um mesmo local de observação, grupos diferentes mediram a opacidade e a densidade do ar atmosférico. Os resultados das medições são mostrados na tabela abaixo.

Grupo	$\kappa\rho\,(10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1})$
1	1.0532 ± 0.0011
2	1.073 ± 0.070
3	1.10 ± 0.21
4	1.3 ± 0.2
5	1.051 ± 0.023
6	1.11 ± 0.25
7	1.0 ± 0.2
8	1.032 ± 0.120
9	1.0462 ± 0.0030
10	1.06 ± 0.01
11	1.17 ± 0.11
12	1.075 ± 0.040
13	1.019 ± 0.029

Tabela 1: Medições de opacidade e densidade do ar

   (a) **(10 pontos)** Calcule o valor da opacidade multiplicada pela densidade atmosférica e estime a incerteza dessa quantidade.

   Em outra noite de observação, um grupo mediu o brilho de uma estrela ao longo da noite. As medidas da magnitude da estrela, de sua altura e do tempo sideral local no momento das observações são mostrados na tabela abaixo.

z (°)	TSL (°)	m
5.53	188.05	4.222
20.73	160.05	4.247
38.19	132.05	4.326
59.34	98.05	4.595
68.05	55.05	4.873
55.85	30.05	4.525
34.99	-2.95	4.306
16.64	-32.95	4.237

Tabela 2: Fotometria estelar e altura da estrela

   (b) **(25 pontos)** A partir das relações de absorção da luz estelar na atmosfera, encontre um ajuste linear apropriado para calcular a altura da atmosfera e o brilho da estrela fora da atmosfera terrestre com seus respectivos erros.

   (c) **(20 pontos)** Plote o gráfico da magnitude da estrela em função do tempo sideral local usando os dados da tabela e estime a ascensão reta da estrela em horas. Explique o seu método para fazer isso.

Solução:

(a) Tomaremos a média ponderada dos valores da tabela, igualando os pesos ao inverso do quadrado da incerteza de cada medição:

$$\overline{\kappa\rho} = \frac{\sum_i (\kappa\rho)_i/\sigma_i^2}{\sum_i 1/\sigma_i^2} \approx 1{,}05244\,\mathrm{m}^{-1}$$

A incerteza dessa média é

$$\Delta(\overline{\kappa\rho}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_i 1/\sigma_i^2}} \approx 0{,}0010\,\mathrm{m}^{-1}$$

Assim,

$$\boxed{\kappa\rho = (1{,}0524 \pm 0{,}0010) \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}}$$

(b) Seja s a distância que a luz percorre na atmosfera. Sabemos que a relação entre o fluxo observado F e o fluxo da estrela fora da atmosfera F_0 é

$$\frac{F}{F_0} = e^{-\kappa\rho s}$$

Sendo h a altura da atmosfera, s é dado por

$$s = \frac{h}{\cos z}$$

Substituindo tudo na equação de Pogson:

$$m - m_0 = -2{,}5\log\left(\frac{F}{F_0}\right) = \frac{2{,}5\kappa\rho h \log e}{\cos z}$$

Assim, se plotarmos a magnitude m da estrela em função de $1/\cos z$, obteremos uma reta do tipo $y = A + Bx$. Pelo método dos mínimos quadrados:

$$A = 3{,}83015 \pm 0{,}00014$$

$$B = 0{,}38990 \pm 0{,}00022$$

De forma que

$$\boxed{m_0 = 3{,}83015 \pm 0{,}00014}$$

$$2{,}5\kappa\rho h \log e = B$$

$$h = \frac{B}{2{,}5\kappa\rho \log e} \approx 1{,}4819 \times 10^4\,\mathrm{m}$$

$$\Delta h = h\sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\kappa\rho)}{\kappa\rho}\right)^2} \approx 17\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{h = (14819 \pm 17)\,\mathrm{m}}$$

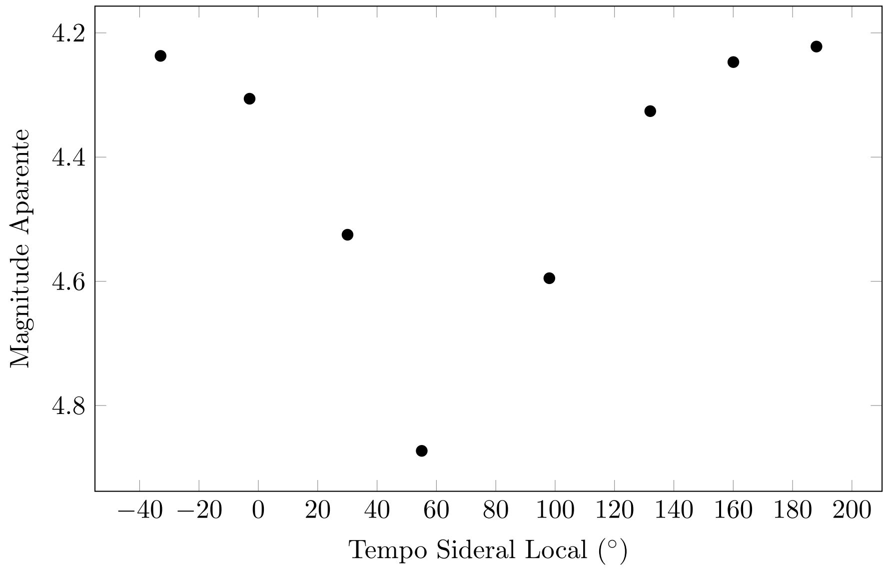

Figura 1: Magnitude da estrela em função do tempo sideral local

(c) Pela equação do tempo sideral local:

$$TSL = H + \alpha$$

Quando a magnitude aparente da estrela é máxima, ela culmina inferiomente ($H = 12\,\mathrm{h}$). Pelo gráfico, percebemos que esse máximo ocorre em torno de

$$TSL \approx 70^\circ \approx 4{,}67\,\mathrm{h}$$

$$\alpha = TSL - H = -7{,}33\,\mathrm{h}$$

$$\boxed{\alpha = 16{,}67\,\mathrm{h}}$$

2. **Medindo a curva de rotação da Via Láctea (95 pontos)** - Em um projeto com alguns dos sistemas estelares da Via Láctea, pretendemos, com a colaboração dos habitantes de nossa galáxia, calcular e desenhar sua curva de rotação. Para isso, primeiro calculamos as constantes de Oort para a órbita do Sol. Os habitantes de cada um dos outros sistemas estelares fazem isso para suas próprias estrelas, e finalmente, usando esses dados, desenhamos a curva de rotação. Para realizar o projeto, responda passo a passo às perguntas que seguem.

   A figura abaixo mostra a posição da estrela de referência (nosso Sol), o centro da galáxia e um corpo celeste arbitrário. Considere todas as órbitas como circulares em todas as perguntas.

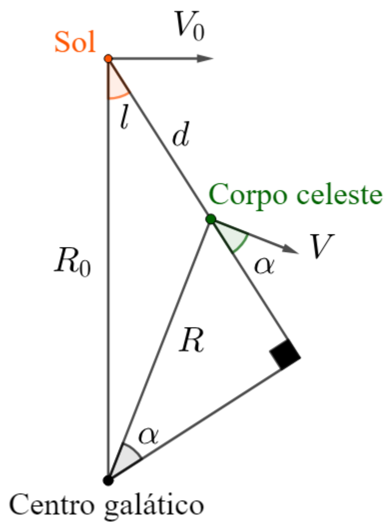

Figura 2: Posição da estrela de referência (Sol), centro da galáxia e um corpo celeste

   A velocidade de um corpo celeste próximo em relação ao Sol nos sentidos radial e tangencial é calculada aproximadamente através da seguinte fórmula:

$$v_r = Ad \sin 2l$$

$$v_\theta = Ad \cos 2l + Bd$$

   Onde l é a longitude galática e d é a distância do corpo celeste ao Sol, que obedece à relação $d \ll R$. A e B são as constantes de Oort, definidas como:

$$A = -\frac{1}{2}\left(\left.\frac{dV}{dR}\right|_{R_0} - \frac{V_0}{R_0}\right)$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(\left.\frac{dV}{dR}\right|_{R_0} + \frac{V_0}{R_0}\right)$$

   Onde V_0 e R_0 são a velocidade e o raio orbital da estrela de referência. Para o Sol, temos $R_0 = 7.914\,\text{kpc}$.

   Observando a curva de rotação da galáxia, percebemos que as mudanças na velocidade orbital ao longo de diferentes intervalos de R são relativamente grandes. Além disso, em nosso modelo, assumimos que a velocidade angular de rotação da galáxia decresce monotonicamente com a distância ao centro galático.

   (a) **(12 pontos)** Com base na figura 1, use as relações geométricas e expanda a velocidade para provar a seguinte relação para a velocidade radial máxima de uma estrela em relação ao Sol em uma dada longitude eclíptica l:

$$v_{r,\max} = 2A(1 - \sin l)R_0$$

Para isso, assuma que o corpo celeste esteja na vizinhança do Sol.
Dica: Para uma variação muito pequena Δx, uma função $f(x_0 + \Delta x)$ pode ser aproximada para:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} \Delta x$$

(b) **(9 pontos)** A figura 2 mostra a curva de velocidade radial para estrelas com longitude eclíptica $l = (86 \pm 1)^\circ$. Use essa figura para determinar a constante de Oort A, incluindo a incerteza associada a ela, ambas em $\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$. O método de regressão linear não é necessário, mas a medição realizada no gráfico deve ser clara. Além disso, interprete a incerteza obtida.

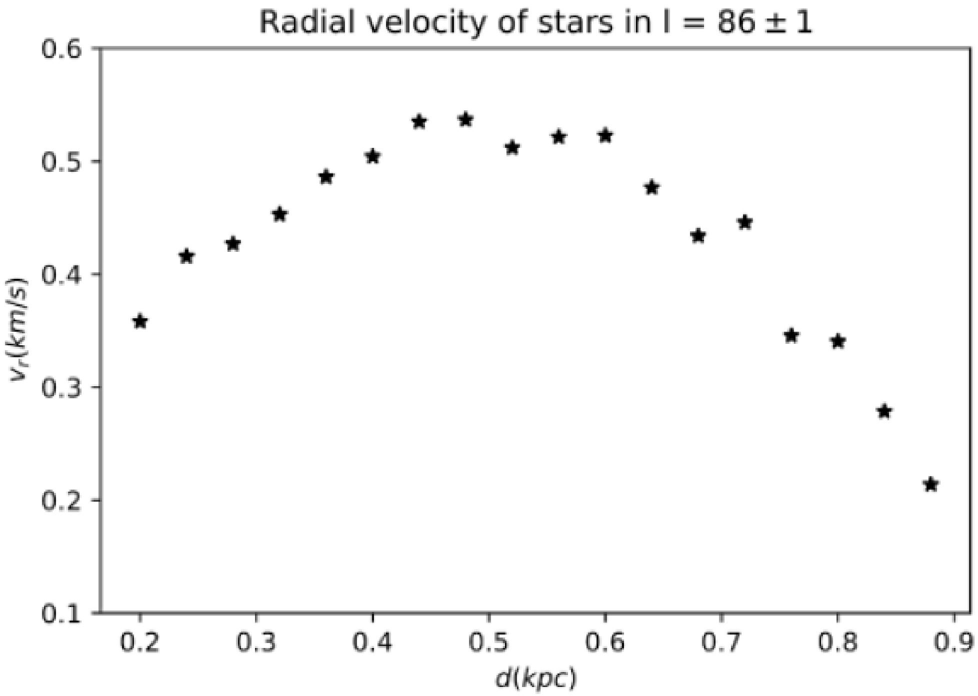

Figura 3: Gráfico da velocidade radial em função da distância ao Sol

(c) **(20 pontos)** A tabela 1 fornece as velocidades radiais e tangenciais relativas de algumas estrelas em relação ao Sol. Plote **um único gráfico** dessas velocidades em função da longitude galática l. Trace uma curva de melhor ajuste para cada velocidade.

#	$l(^\circ)$	v_r(km/s)	v_θ(km/s)
1	35.4	6.04	-2.67
2	40.3	6.31	-3.71
3	65.3	4.85	-8.93
4	69.0	4.28	-9.51
5	81.2	1.92	-10.86
6	98.4	-1.85	-10.88
7	109.0	-3.94	-9.80
8	111.1	-4.29	-9.51
9	122.0	-5.74	-7.57
10	126.3	-6.10	-6.67
11	148.5	-5.70	-1.86
12	194.6	3.13	0.82
13	198.8	3.90	0.31
14	202.1	4.45	-0.17
15	212.3	5.78	-2.02
16	247.0	4.59	-9.21
17	251.6	3.83	-9.88
18	257.2	2.77	-10.52
19	260.1	2.17	-10.78
20	325.3	-5.99	-2.51

Tabela 3: Velocidades radiais e tangenciais de estrelas em relação ao Sol

(d) **(10 pontos)** Determine a constante de Oort B e a sua incerteza, ambas em $\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$.

(e) **(13 pontos)** Determine a distância de todas as estrelas na tabela 1, incluindo suas incertezas. Construa uma nova tabela com esses dados. Interprete os resultados.

(f) **(6 pontos)** Escreva a expressão que representa a probabilidade da primeira estrela estar a uma distância entre 0,3 kpc e 1,3 kpc com base no erro determinado para sua distância (você não precisa calcular o valor numérico dessa expressão nem simplificá-la). A probabilidade de a distância estar dentro desse intervalo de valores, que é considerado o mais adequado para a obtenção das constantes de Oort, pode ser calculado como sendo em torno de 80%.

(g) **(25 pontos)** A tabela 2 apresenta as constantes de Oort obtidas para diferentes sistemas estelares. Preencha a tabela com os valores obtidos para o Sol e utilize a tabela preenchida para plotar a curva de rotação da Via Láctea. Existem pontos estranhos no seu gráfico? Se sim, identifique-os.

#	R(kpc)	A(km s^{-1}kpc^{-1})	B(km s^{-1}kpc^{-1})
1	1.5	-12.5	-62.5
2	2.1	3.6	-53.6
3	3.1	7.4	-47.4
4	3.6	13.9	-38.9
5	4.4	14.2	-33.5
6	5.3	17.3	-25.7
7	5.7	20.5	-19.7
Sol			
9	9.3	13.2	-11.2
10	10.8	11.4	-9.4
11	13.7	7.9	-7.9
12	15.7	7.2	-6.6
13	17.3	8.5	-4.0
14	19.7	2.3	-8.1
15	21.1	12.3	2.2
16	22.1	2.3	-6.6
17	22.6	3.5	-5.4
18	23.7	0.6	-2.5
19	24.8	4.1	-3.9

Tabela 4: Tabela de dados para plotar a curva de rotação da Via Láctea

Solução:

(a) Pela figura 1, podemos escrever a velocidade radial relativa do corpo celeste como sendo

$$v_r = V\cos\alpha - V_0 \sin l$$

Ainda, por geometria,

$$\cos\alpha = \frac{R_0 \sin l}{R}$$

Substituindo:

$$v_r = \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0}\right) R_0 \sin l$$

Perceba que os termos dentro do parênteses correspondem às velocidades angulares do Sol e do corpo celeste. Para maximiza a velocidade radial relativa, devemos então maximizar a velocidade angular do corpo celeste, dado que sua longitude eclíptica é l. Como o enunciado diz que a velocidade angular de rotação da galáxia decresce monotonicamente com a distância, devemos minimizar R. Para um dado l, pela figura 1, percebemos que isso significa que o corpo celeste, o Sol, e o centro galático formam um triângulo retângulo, de forma que

$$R = R_0 \sin l$$

$$v_{r,\max} = V(R_0 \sin l) - V_0 \sin l$$

Onde a velocidade do corpo celeste pode ser aproximada como sendo

$$V(R_0 \sin l) \approx V_0 + \left.\frac{dV}{dR}\right|_{R_0} (R_0 \sin l - R_0)$$

já que o corpo se encontra na vizinhança do Sol. Substituindo de volta:

$$v_{r,\max} = \left(V_0 - \left.\frac{dV}{dR}\right|_{R_0} R_0\right)(1 - \sin l)$$

Pela definição de A:

$$\boxed{v_{r,\max} = 2A(1 - \sin l)R_0}$$

(b) Para encontrar a velocidade radial máxima relativa ao Sol a partir do gráfico, podemos traçar uma curva suave de ajuste com base nos pontos e pegar o valor máximo dessa curva. Para estimar a incerteza, podemos traçar uma curva limite superior e uma inferior, pegando também os seus máximos. Então, pegamos os valores correspondentes de velocidade radial:

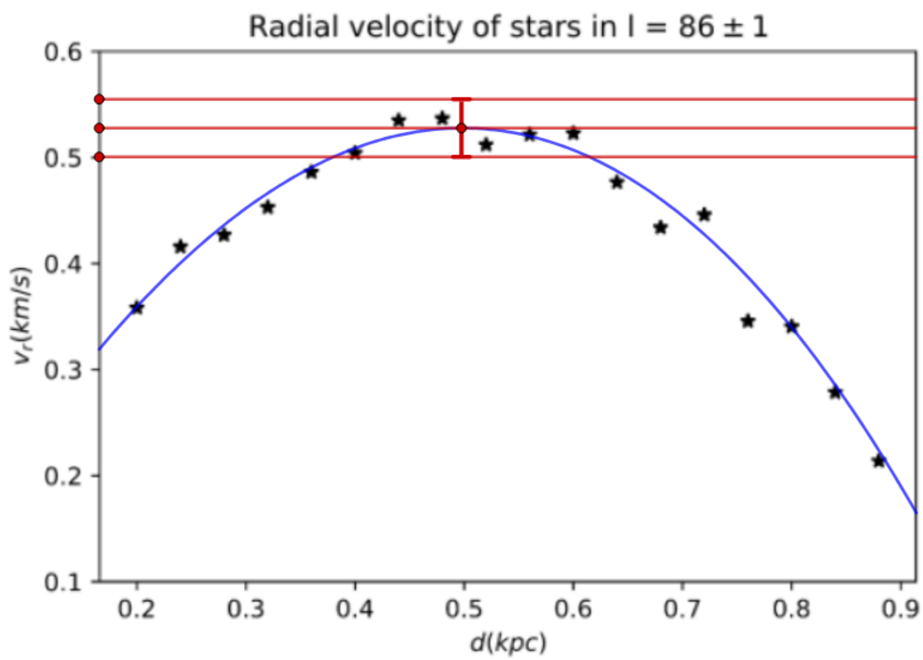

Figura 4: Medidas feitas no gráfico

$$v_{r,\max} = (0{,}53 \pm 0{,}03)\,\mathrm{km/s}$$

Pela fórmula de $v_{r,\max}$:

$$A = \frac{v_{r,\max}}{2R_0(1 - \sin l)} \approx 13{,}746\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$$

Pela fórmula de propagação de erros:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial v_{r,\max}}\Delta v_{r,\max}\right)^2}$$

$$\Delta A = A\sqrt{\left(\frac{\cos l}{1 - \sin l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{r,\max}}{v_{r,\max}}\right)^2}$$

$$\Delta A = 7{,}436\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$$

Assim,

$$\boxed{A = (14 \pm 7)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}}$$

Percebemos que a incerteza na determinação de A se deve quase exclusivamente à incerteza de l. Isso pode ser explicado por conta da proximidade de l com 90°, fazendo com que pequenas variações no ângulo causem uma grande diferença na constante A.

(c) Plotando os dados, obtemos o seguinte gráfico:

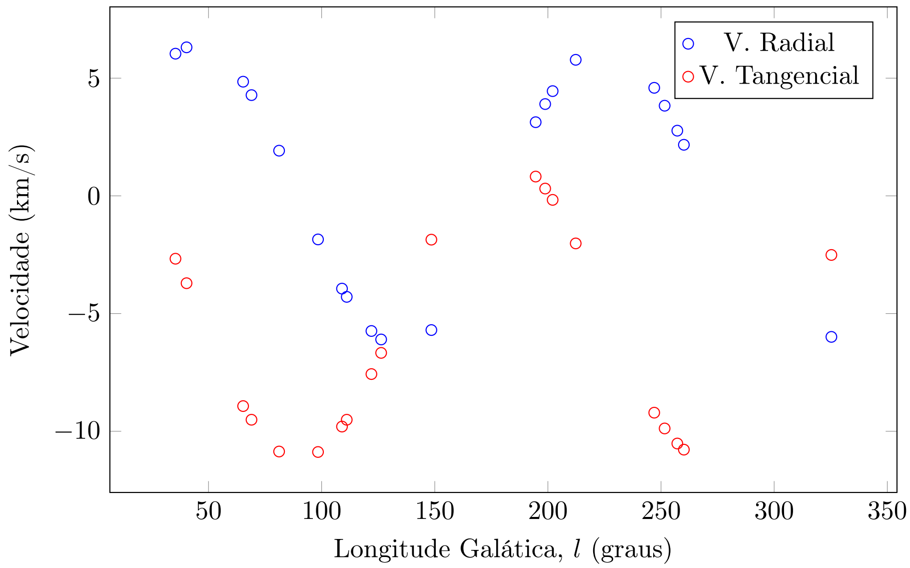

Figura 5: Velocidades radiais e tangenciais das estrelas em relação ao Sol em função da longitude galática l.

Percebemos que ambas as velocidades se comportam de forma senoidal, como esperado.

(d) Dividindo as fórmulas das velocidades fornecidas no enunciado, temos que

$$\frac{v_r}{v_\theta} = \frac{A \sin 2l}{A \cos 2l + B}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{v_\theta}{v_r} \sin 2l - \cos 2l$$

Podemos calcular a quantidade da direita para todos os dados da tabela, tirar a sua média e o desvio padrão da média:

$$\frac{B}{A} = -0{,}7452 \pm 0{,}0008$$

Como a incerteza é desprezível em relação à de A, podemos calcular diretamente:

$$\boxed{B = (-10 \pm 6)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}}$$

(e) Da equação da velocidade radial:

$$d = \frac{v_r}{A \sin 2l}$$

Como a única fonte de incerteza é A:

$$\Delta v_r = \frac{v_r}{A} \Delta A$$

Assim, podemos realizar os cálculos para todas as estrelas, obtendo:

#	d(kpc)	Δd(kpc)
1	0.47	0.25
2	0.47	0.25
3	0.46	0.25
4	0.47	0.25
5	0.46	0.25
6	0.47	0.25
7	0.47	0.25
8	0.46	0.25
9	0.46	0.25
10	0.47	0.25
11	0.47	0.25
12	0.47	0.25
13	0.47	0.25
14	0.46	0.25
15	0.47	0.25
16	0.46	0.25
17	0.47	0.25
18	0.47	0.25
19	0.47	0.25
20	0.47	0.25

Tabela 5: Distâncias das estrelas ao Sol e suas incertezas

Da tabela, podemos perceber que as estrelas estão provavelente localizadas em distâncias muito similares ao Sol, se distribuindo aproximadamente em um anel de raio 0,47 kpc.

(f) Assumindo uma distribuição normal de probabilidades, a probabilidade de a distância da primeira estrela estar dentro do intervalo considerado é dada por

$$\boxed{p(0{,}3 < x < 1{,}3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{0{,}3}^{1{,}3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx}$$

Onde x corresponde à distância d, μ ao ser valor estimado e σ a incerteza associada a ele.

(g) Subtraindo a equação de A pela equação de B:

$$A - B = \frac{V}{R}$$

$$V = R(A - B)$$

De forma que podemos obter a velocidade de rotação V para cada um dos sistemas estelares da tabela e plotar o seguinte gráfico:

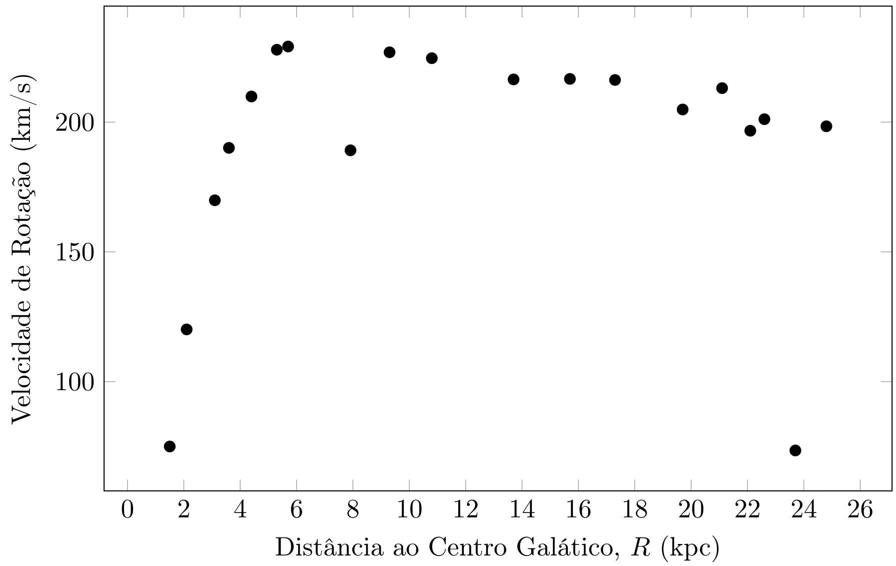

Figura 6: Curva de rotação da Via Láctea obtida através dos dados

Percebemos que há 2 pontos estranhos: um correspondendo à linha 18 da tabela 2 e outro correspondendo ao Sol, provavelmente devido ao método impreciso para determinar a constante de Oort A.