

## Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 2 horas;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos);;
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

## Formulário

- Para uma função real  $y(x)$  cuja taxa de variação é diretamente proporcional ao valor da função, é válido que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \cdot y \rightarrow y = y(0) \cdot e^{\alpha x}$$

- Podemos reescrever  $(1+x)^n$  como um polinômio de grau tendendo ao infinito:

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \dots$$

Se desprezarmos os termos de ordem superior em  $x$ , obtemos:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

- Podemos reescrever  $e^x$  como um polinômio de grau tendendo ao infinito:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Se desprezarmos os termos de ordem superior em  $x$ , obtemos:

$$e^x \approx 1 + x$$

- O desvio padrão de uma amostra de dados  $x_i$  é calculado da seguinte forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Em que  $\bar{x}$  é o valor médio (média aritmética simples) da amostra, e  $N$  o tamanho do conjunto amostral.

- As seguintes constantes físicas podem vir a serem úteis:

Constante da gravitação universal:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Massa solar:  $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Parsec:  $1 \text{ pc} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$

**1. LIGO (60 pontos)** Praticamente todos os modelos de evolução estelar preveem que a densidade numérica de buracos negros (e, por conseguinte, também de binários formados por buracos negros) por unidade de volume diminui drasticamente com o aumento da massa dos buracos negros. As observações feitas pelo Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser (LIGO) confirmam essa hipótese. Quando plotamos os dados inferidos pelo LIGO sobre a frequência de colisões de sistemas binários de buracos negros por  $\text{Gpc}^3$  por ano, percebemos que conforme a massa aumenta, o número de colisões diminui drasticamente.

Porém, quando olhamos a lista de colisões encontradas pelo LIGO em maio, percebemos que a grande maioria delas está relacionada a buracos negros massivos. Aparentemente, a lista corresponde ao que esperamos que não ocorra. Nessa questão, mostraremos com alguns cálculos simples que o nosso detector tende a detectar eventos de colisão entre buracos negros mais massivos, ou seja, ele é naturalmente enviesado. Para esse propósito, consideramos três tipos de buracos negros. Suas informações são dadas na tabela abaixo.

$m_1, m_2 (M_\odot)$	$f_{max}$ (Hz)	Número de colisões por unidade de volume por ano ( $\text{Gpc}^{-3}\text{ano}^{-1}$ )
5	1000	20
25	200	0,4
75	60	0,006

Nesta tabela, estão apresentados a massa dos dois membros do binário (supostas iguais), a **frequência orbital** máxima perto do momento de colisão e a densidade numérica de colisões por unidade de volume por ano. Assuma que essa densidade não se altera ao longo do tempo, isto é, ignore a expansão cosmológica. Além disso, por simplicidade, assumamos que o plano orbital de todos os buracos negros é perpendicular à nossa linha de visada. Abaixo encontra-se a relação entre o tamanho da onda gravitacional (deformação ou "strain") e o tempo de observação em termos da **frequência da onda**  $f_{gw}$ , das massas  $m_1$  e  $m_2$ , e da distância  $r$  do observador até o binário:

$$h(f_{gw}, M_c, r) = \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3} \cos(2\pi f_{gw}t + \varphi)$$

Onde

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$

A tabela a seguir também mostra a sensibilidade do detector LIGO correspondente às três frequências orbitais  $f_{max}$  da tabela anterior (note que  $f_{max}$  não é necessariamente igual à frequência da onda gravitacional):

$f_{max}$ (Hz)	Sensibilidade do LIGO
1000	$10^{-23}$
200	$10^{-23,8}$
60	$10^{-23,6}$

Sabemos que o detector só registra ondas cuja amplitude excede a sensibilidade do aparelho nessa frequência.

- (a) **(50 pontos)** Calcule quantas colisões o detector LIGO registra de cada um dos tipos de buracos negros por ano.
- (b) **(10 pontos)** Argumente por que o detector tende a detectar colisões de buracos negros mais massivos, mas somente até um certo limite.

**Solução:**

- (a) Seja  $s$  a sensibilidade do LIGO correspondente a frequência orbital máxima  $f_{max}$  de um binário formado por buracos negros de massa  $m$ . Do enunciado sabemos que a detecção só ocorre se

$$s < h(f_{gw}, M_c, r)$$

$$s < \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3} \cos(2\pi f_{gw}t + \varphi)$$

Como o valor máximo do termo da direita ocorre quando o cosseno é igual a 1, uma condição mais adequada para a detecção é

$$s < \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3}$$

Onde  $M_c$  é dado por

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{m}{2^{1/5}}$$

Ainda, perceba que a frequência da onda gravitacional emitida pelo binário é o dobro de sua frequência orbital (isto é,  $f_{gw} = 2f_{max}$ ). Isso ocorre porque, a cada meio período orbital, o sistema volta para a mesma configuração, já que os buracos negros assumem a posição um do outro. Dessa forma, substituindo as expressões:

$$s < \frac{4}{r} \left( \frac{Gm}{2^{1/5}c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{2\pi f_{max}}{c} \right)^{2/3}$$

Que pode ser escrita como uma condição para a distância do binário:

$$r < \frac{2^{7/3}}{s} \left( \frac{Gm}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f_{max}}{c} \right)^{2/3} = r_{max}$$

Ou seja, para valores dados de  $f_{max}$ ,  $m$  e  $s$ , o binário não pode estar a uma distância maior que  $r_{max}$  para que ocorra detecção. O número  $N$  de buracos negros com massa  $m$  detectados por ano está diretamente relacionado a  $r_{max}$  e o número  $n$  de colisões por unidade de volume por ano:

$$N = \frac{4}{3} \pi r_{max}^3 n$$

Substituindo a expressão de  $r_{max}$ :

$$N = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{2^7}{s^3} \left( \frac{Gm}{c^2} \right)^5 \left( \frac{\pi f_{max}}{c} \right)^2 n$$

$$N = \frac{512\pi^3 G^5 m^5 f_{max}^2 n}{3 s^3 c^{12}}$$

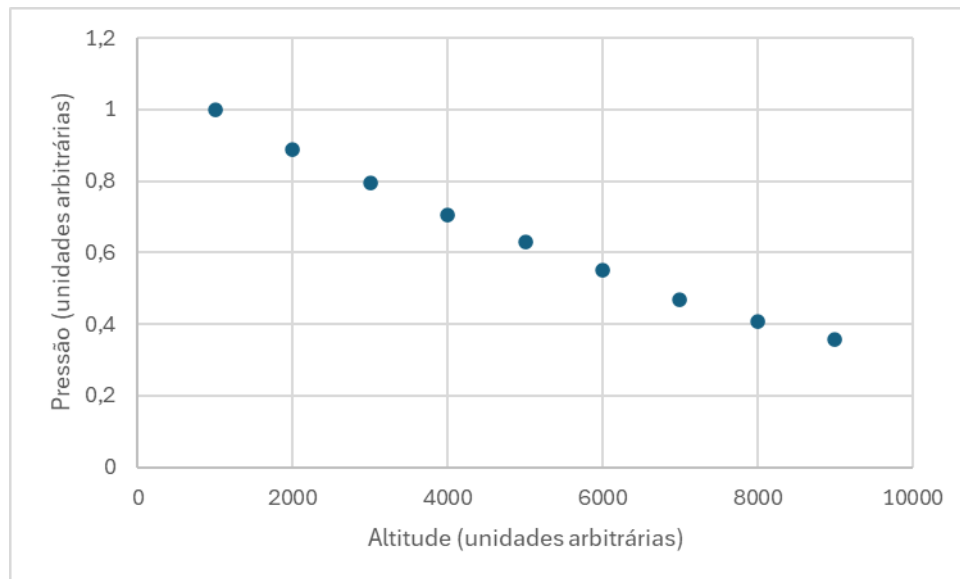
Como todos os valores na equação acima foram fornecidos nas tabelas do enunciado, podemos criar uma nova tabela com as respostas desse item:

$m_1, m_2 (M_\odot)$	Número de colisões detectadas por ano ( $\text{ano}^{-1}$ )
5	$8,72 \cdot 10^5$
25	$5,48 \cdot 10^8$
75	$4,52 \cdot 10^7$

- (b) A chave para responder esse item está nos expoentes na fórmula para o número  $N$  de colisões detectadas. Dentre os parâmetros  $n$ ,  $s$ ,  $f_{max}$  e  $m$ , percebemos que aqueles que têm uma maior influência em  $N$  são  $m$  e  $s$ . Logo, esperamos que os buracos negros que possuem maior  $m$  e menor  $s$  tenham um maior número de detecções, o que corresponde a massas intermediárias. Para massas muito grandes, a sensibilidade não acompanha o crescimento da massa, ou seja, a diminuição na frequência e na densidade acabam dominando o número de detecções. Para buracos negros de massa pequena, temos que  $m$  baixo e  $s$  alto diminuem o valor de  $N$ . Dessa forma, apesar de a densidade de colisões ser muito maior para buracos negros de massa pequena, esperamos detectar mais buracos negros de massa intermediária, mas também não muito alta.

2. **Atmosfera planetária (90 pontos)** Em um planeta muito, muito distante, um grupo de estudantes de engenharia executou a missão FiboSat, que consistiu no lançamento de um minissatélite por balão, a fim de estudar as propriedades atmosféricas de seu planeta. Seguem alguns dos dados coletados, em unidades arbitrárias:

<b>i</b>	<b>r</b>	<b>P</b>	
1	1000	$P_1$	1
2	2000	$P_2$	0,889
3	3000	$P_3$	0,796
4	4000	$P_4$	0,704
5	5000	$P_5$	0,629
6	6000	$P_6$	0,553
7	7000	$P_7$	0,469
8	8000	$P_8$	0,409
9	9000	$P_9$	0,357



Considere os dois modelos de atmosfera a seguir. Em ambos, o núcleo é considerado grande o suficiente para criar uma gravidade constante na atmosfera.

- (i) A atmosfera é isotérmica.
- (ii) A atmosfera segue um perfil politrópico do tipo:

$$P \cdot \rho^{-n} = P_0 \cdot \rho_0^{-n}$$

Seja  $P_0$  e  $\rho_0$  a Pressão e a densidade atmosférica na superfície, o perfil de pressão, em função da altitude  $r$ , seria dado por:

$$P_{poli}(r) = P_0 \cdot \left( 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r \right)^{n/(n-1)}$$

A partir das informações fornecidas, responda ao que se pede.

- (a) **(10 pontos)** Prove que o perfil de pressão do planeta para o modelo (i) é dado por:

$$P_{iso}(r) = P_0 \cdot e^{-g\rho_0 r/P_0}$$

- (b) **(10 pontos)** Para os valores de  $P_i$  fornecidos no enunciado, crie uma tabela com as seguintes colunas:

$$f(P_i, P_{i+1}) = \frac{P_i}{P_{i+1}}$$

$$g(P_i, P_{i+1}) = P_i^{(n-1)/n} - P_{i+1}^{(n-1)/n}$$

Para  $n = 1,8$ .

Ao fim, calcule o desvio padrão sobre a média para cada uma dessas colunas.

- (c) **(23 pontos)** Suponha que os dados  $P_i$  e  $P_{i+1}$  estejam sujeitos a perturbações aleatórias  $\delta P_i, \delta P_{i+1} \ll P_i, P_{i+1}$ :

$$P_{i+1} = P_{i+1,ideal} + \delta P_{i+1}$$

$$P_i = P_{i,ideal} + \delta P_i$$

Para o modelo politrópico, calcule  $f(P_i, P_{i+1})$  e  $g(P_i, P_{i+1})$ , desprezando os termos em  $r$  de ordem superior a um, a fim de deixar suas respostas na forma:

$$A + B \cdot \delta P_i + C \cdot \delta P_{i+1}$$

Com  $A$  em função de parâmetros constantes no problema,  $B$  em função de constantes e de  $P_i$  (ou  $P_{i,ideal}$ ), e  $C$  em função de constantes e de  $P_{i+1}$  (ou  $P_{i+1,ideal}$ ).

- (d) **(8 pontos)** Uma estimativa do desvio padrão sobre a média para cada uma das funções,  $f$  e  $g$ , é:

$$\xi = \sqrt{\frac{B^2 + C^2}{2}} \cdot \frac{1}{A} \cdot O(\delta P)$$

Em que  $O(\delta P)$  é a ordem de grandeza típica de  $\delta P$ . Com base nisso, responda: o modelo politrópico está em desacordo com o resultado do item (b)?

- (e) **(12 pontos)** Para o modelo politrópico, prove que  $f_{poli}(P_{i,ideal}, P_{i+1,ideal})$  é crescente com  $i$ .  
 (f) **(12 pontos)** Para o modelo isotérmico, prove que  $g_{iso}(P_{i,ideal}, P_{i+1,ideal})$  é decrescente com  $i$ .  
 (g) **(15 pontos)** Qual dos modelos melhor corresponde aos dados apresentados? Justifique sua resposta analisando a tabela construída no item (b).

**Solução:**

- (a) No modelo de atmosfera isotérmica, teremos que:

$$\frac{P + \Delta P}{\rho + \Delta \rho} = \frac{P}{\rho}$$

$$1 + \frac{\Delta P}{P} = 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Pela lei de Estevão, podemos substituir  $\Delta P = -g\rho\Delta h$ :

$$-\frac{g\rho\Delta h}{P} = \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Como a atmosfera como um todo é isotérmica, encontramos  $P = P_0\rho/\rho_0$ :

$$-\frac{g\rho_0}{P_0} \cdot \rho \Delta h = \Delta \rho$$

$$-\frac{\Delta \rho}{\Delta h} = \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot \rho$$

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-g\rho_0 \cdot h/P_0}$$

$$P = P_0 \cdot e^{-g\rho_0 \cdot h/P_0}$$

(b) .

i	f	g
1	1,124	0,0507
2	1,118	0,0459
3	1,130	0,0477
4	1,120	0,0420
5	1,138	0,0455
6	1,179	0,0541
7	1,147	0,0423
8	1,144	0,0390

Desvio padrão para  $f$ : 0,0199

Média de  $f$ : 1,1375

**Erro relativo de  $f$ : 0,0175**

Desvio padrão para  $g$ : 0,0,00492

Média de  $g$ : 0,0459

**Erro relativo de  $g$ : 0,107**

- (c) Como o erro relativo de  $f$  é muito menor que o de  $g$ , isso pode nos induzir a pensar que a função que tornaria  $f$  constante (modelo isotérmico) é mais provável do que aquela que tornaria  $g$  constante (modelo politrópico). Para avaliar isso, precisamos estimar como o modelo politrópico prevê o funcionamento do erro relativo para ambas as funções.

Começaremos pela função  $f$ :

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) = \frac{P_i}{P_{i+1}}$$

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) = \frac{P_{i,ideal} + \delta P_i}{P_{i+1,ideal} + \delta P_{i+1}}$$

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) = \frac{P_{i,ideal}}{P_{i+1,ideal}} \cdot \frac{1 + \delta P_i/P_{i,ideal}}{1 + \delta P_{i+1}/P_{i+1,ideal}}$$

Como vamos desprezar os termos em  $\delta P$  de ordem superior:

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \frac{P_{i,ideal}}{P_{i+1,ideal}} \cdot \left( 1 + \frac{\delta P_i}{P_{i,ideal}} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1,ideal}} \right)$$



$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \frac{P_{i,ideal}}{P_{i+1,ideal}} \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i - \delta P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1} - \delta P_{i+1}}\right)$$

Novamente, pelo desprezo da ordem superior em  $\delta P$ :

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \frac{P_{i,ideal}}{P_{i+1,ideal}} \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1}}\right)$$

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \frac{P_0 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r\right)^{n/(n-1)}}{P_0 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot (r + \Delta r)\right)^{n/(n-1)}} \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1}}\right)$$

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \left(\frac{1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r}{1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot (r + \Delta r)}\right)^{n/(n-1)} \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1}}\right)$$

Pelo desprezo das ordens superiores em  $r$ :

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot (r + \Delta r)\right)^{n/(n-1)} \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1}}\right)$$

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot \Delta r\right)^{n/(n-1)} \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1}}\right)$$

Novamente pelo desprezo das ordens superiores em  $r$ :

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \left(1 + \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot \Delta r\right) \cdot \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_i} - \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1}}\right)$$

$$f_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx e^{g\rho_0 \cdot \Delta r / P_0} + \frac{e^{g\rho_0 \cdot \Delta r / P_0}}{P_i} \cdot \delta P_i - \frac{e^{g\rho_0 \cdot \Delta r / P_0}}{P_{i+1}} \cdot \delta P_{i+1}$$

Agora analisaremos a função  $g$ :

$$g_{poli}(P_i, P_{i+1}) = P_i^{(n-1)/n} - P_{i+1}^{(n-1)/n}$$

$$g_{poli}(P_i, P_{i+1}) = (P_{i,ideal} + \delta P_i)^{(n-1)/n} - (P_{i+1,ideal} + \delta P_{i+1})^{(n-1)/n}$$

$$g_{poli}(P_i, P_{i+1}) = P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \left(1 + \frac{\delta P_i}{P_{i,ideal}}\right)^{(n-1)/n} - P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n} \left(1 + \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1,ideal}}\right)^{(n-1)/n}$$

$$g_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\delta P_i}{P_{i,ideal}}\right) - P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n} \left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\delta P_{i+1}}{P_{i+1,ideal}}\right)$$

$$g_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx P_{i,ideal}^{(n-1)/n} + \frac{n-1}{n} \cdot \delta P_i \cdot P_{i,ideal}^{-1/n} - P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n} - \frac{n-1}{n} \cdot \delta P_{i+1} \cdot P_{i+1,ideal}^{-1/n}$$

$$g_{poli}(P_i, P_{i+1}) \approx \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot \Delta r + \frac{n-1}{n} \cdot P_i^{-1/n} \cdot \delta P_i - \frac{n-1}{n} \cdot P_{i+1}^{-1/n} \cdot \delta P_{i+1}$$

- (d) Dado que só estamos atrás de uma estimativa, podemos realizar algumas aproximações. Em primeiro lugar, como os termos do erro são inversamente proporcionais à pressão, podemos utilizar as primeiras amostras para aproximar o valor de  $A$ :

$$A_f \approx f(P_1, P_2) \approx 1$$

$$A_g \approx g(P_1, P_2) \approx 0,03$$

Em segundo lugar, como só queremos uma estimativa, podemos utilizar a média aritmética simples da pressão no lugar de  $P_i$  e  $P_{i+1}$ , isto é, 0,8.

Assim:

$$\frac{\xi_f}{O(\delta P)} \approx 1,5$$

$$\frac{\xi_g}{O(\delta P)} \approx 11$$

Esse resultado condiz com as razões de desvio padrão sobre média para a tabela do item (b). Na tabela, a proporção é de 1:6. Em nossa abordagem, estimamos 1:7.

- (e) Por culpa de um erro de digitação, as funções  $f$  e  $g$  infelizmente acabaram invertidas no documento original. Sendo assim, os itens (e) e (f) tiveram que ser anulados. Evitando prejuízos aos candidatos, todos receberam pontuação cheia nesses itens. Como alguns candidatos puderam perceber, as funções  $f$  e  $g$  foram projetadas para serem constantes nos modelos isotérmico e politrópico, respectivamente. Sendo assim, o intuito do item era demonstrar o comportamento não constante de cada função quando aplicada fora de seu modelo, para tentar identificar esse comportamento nos dados da tabela. A fim de minimizar prejuízos aos candidatos que tentaram desenvolver esses itens, à demonstração da constância das funções ou do comportamento crescente/decrecente correto, foram atribuídos pontos extras, que podem compensar outros desvios cometidos no decorrer da prova.

Considere a multiplicação:

$$P_{i,ideal} \cdot P_{i+2,ideal} = P_0 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r_i\right)^{n/(n-1)} \cdot P_0 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r_{i+2}\right)^{n/(n-1)}$$

$$P_{i,ideal} \cdot P_{i+2,ideal} = P_0^2 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot (r_i + r_{i+2}) + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{g^2\rho_0^2}{P_0^2} \cdot r_i r_{i+2}\right)^{n/(n-1)}$$

Como as altitudes estão em progressão aritmética:

$$P_{i,ideal} \cdot P_{i+2,ideal} = P_0^2 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot 2r_{i+1} + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{g^2\rho_0^2}{P_0^2} \cdot r_i r_{i+2}\right)^{n/(n-1)}$$

Agora considere a multiplicação:

$$P_{i+1,ideal}^2 = \left( 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot 2r_{i+1} + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{g^2\rho_0^2}{P_0^2} \cdot r_{i+1}^2 \right)^{n/(n-1)}$$

Sabemos, pela desigualdade das médias:

$$r_{i+1}^2 > r_i r_{i+2}$$

O que implica:

$$P_{i+1,ideal}^2 > P_{i,ideal} \cdot P_{i+2,ideal}$$

$$\frac{P_{i,ideal}}{P_{i+1,ideal}} < \frac{P_{i+1,ideal}}{P_{i+2,ideal}}$$

$$f_{poli}(P_{i,ideal}, P_{i+1,ideal}) < f_{poli}(P_{i+1,ideal}, P_{i+2,ideal})$$

(f) Pela desigualdade das médias:

$$\frac{P_{i,ideal}^{(n-1)/n} + P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n}}{2} > \sqrt{P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \cdot P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n}}$$

Perceba que:

$$P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \cdot P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n} = e^{-g\rho_0(n-1) \cdot r_i/P_0n} \cdot e^{-g\rho_0(n-1) \cdot r_{i+2}/P_0n}$$

$$P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \cdot P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n} = e^{-g\rho_0(n-1) \cdot (r_i+r_{i+2})/P_0n}$$

Novamente, como as altitudes estão em PA:

$$P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \cdot P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n} = e^{-g\rho_0(n-1) \cdot 2r_{i+1}/P_0n}$$

$$P_{i,ideal}^{(n-1)/n} \cdot P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n} = \left[ P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n} \right]^2$$

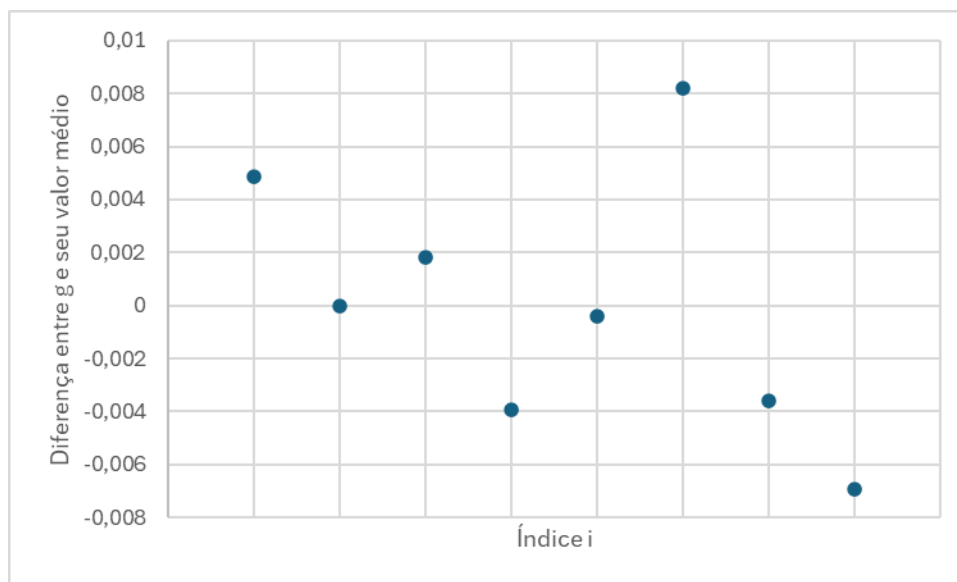
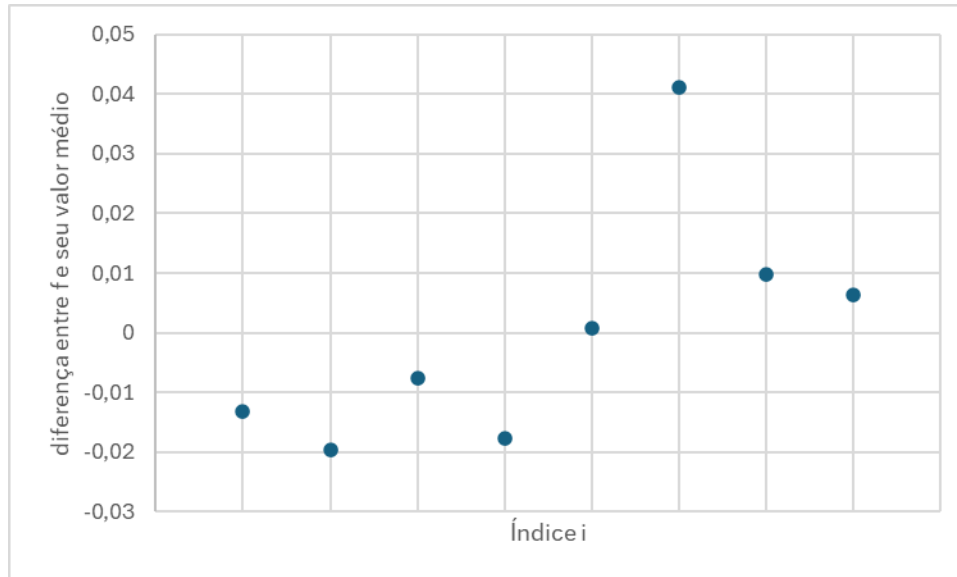
Assim:

$$P_{i,ideal}^{(n-1)/n} + P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n} > 2P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n}$$

$$P_{i,ideal}^{(n-1)/n} - P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n} > P_{i+1,ideal}^{(n-1)/n} - P_{i+2,ideal}^{(n-1)/n}$$

$$g_{iso}(P_{i,ideal}, P_{i+1,ideal}) > g(P_{i+1,ideal}, P_{i+2,ideal})$$

- (g) Na tabela do item (b), percebemos que  $f$  gradualmente aumenta, enquanto  $g$  aumenta em módulo (o erro é inversamente proporcional à pressão), mas varia em torno da média. Desse comportamento, podemos concluir que, entre os dois modelos propostos, o politrópico é o mais adequado.



Caso o candidato confie nas informações que se solicitou demonstração nos itens anteriores, poderia, por exemplo, perceber que  $f$  visivelmente não tem comportamento decrescente, como se solicitou demonstrar para o modelo isotérmico, concluindo assim pelo modelo politrópico. Ou poderia concluir que nenhum dos modelos era adequado, visto que  $g$  não apresenta comportamento crescente, como se solicitou demonstrar.

A fim de não prejudicar os candidatos, a conclusão não precisaria estar certa para obter pontuação cheia. Em suma, a justificativa deveria ser uma comparação coerente entre as

previsões (que o candidato deduziu ou assumiu) e os dados da tabela, de modo a ser logicamente consistente.