LISTA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, totalizando 130 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco"e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

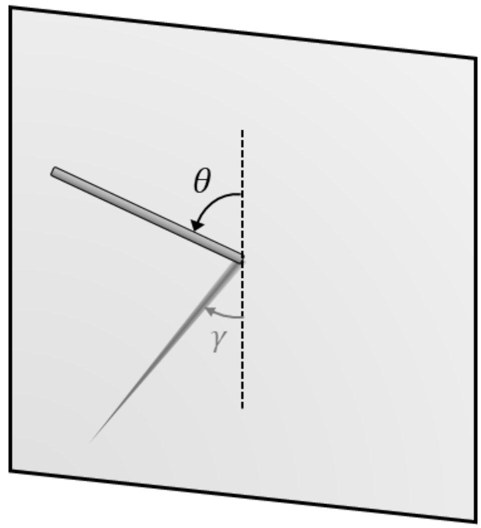
Prazo: 22/04/2024 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2$\cdot$kg^{-2}	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	8,314 N $\cdot$ m $\cdot$ mol^{-1}$\cdot$K^{-1}	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m^{-2}$\cdot$K^{-4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K	
Constante de Hubble (H_0)	67,8 km $\cdot$ s^{-1}$\cdot$Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Relógio de Sol (20 pontos)** Considere um relógio de Sol composto por um mostrador vertical e um gnômon, conforme representado na figura.



(a) Suponha um relógio de Sol vertical cujo gnômon esteja corretamente apontado para o sul. Seja φ a latitude do observador, H o ângulo horário do Sol e δ a declinação solar. Determine a relação entre θ e γ em função dessas variáveis.

(b) Com base no item anterior, qual deve ser o valor de θ para que o relógio funcione o ano todo?

(c) Utilizando o valor correto para θ, determine a relação entre γ e H, em função apenas de φ.

2. **(Equação do Tempo - 35 pontos)** Nessa questão, derivaremos um método para encontrar a equação do tempo em um planeta cuja órbita possui parâmetros arbitrários. Por simplicidade, chamaremos a estrela de nosso planeta de Sol. Os sistemas de coordenadas altazimutal, equatorial e eclíptico desse planeta são definidos de forma análoga aos da Terra.

a) Sabendo que a latitude eclíptica do Sol é definida como $\beta = 0$, demonstre o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \tan\alpha = \cos\varepsilon \tan\lambda \\ \cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda \\ \sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda \end{cases}$$

Onde α é a ascensão reta do Sol, λ a sua longitude eclíptica, δ a sua declinação e ε a obliquidade da eclíptica.

b) Considere que, em certo tempo t, o Sol possua coordenadas equatoriais α e δ e longitude eclíptica λ. Num momento posterior $t + \Delta t$, onde Δt é muito pequeno, o Sol se move para suas novas coordenadas equatoriais $\alpha + \Delta\alpha$ e $\delta + \Delta\delta$ e longitude eclíptica. Suponha que a variação em suas coordenadas seja muito pequena. Através das equações obtidas no item anterior, demonstre que

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\cos\varepsilon}{1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}$$

Dica: Você pode utilizar que, para um dado x muito pequeno, $\sin x \approx x$ e $\cos x \approx 1$.

c) Utilizando a conservação de momento angular, encontre a velocidade angular $\Delta\lambda/\Delta t$ do Sol verdadeiro em seu movimento na eclíptica. Você deve deixar sua resposta em termos da massa M do Sol, do semi-eixo maior a da órbita elíptica do planeta, de sua excentricidade

e, da longitude eclíptica λ e da longitude γ do periélio, isto é, o ângulo entre o ponto vernal e o periélio.

d) Obtenha uma expressão para a velocidade do Sol verdadeiro em ascensão reta, $\Delta\alpha/\Delta t$. Deixe sua resposta em termos de M, a, e, ε, λ e γ.

e) A equação obtida no item c) pode ser resolvida para obter uma expressão para o tempo t desde o equinócio vernal em função da longitude eclíptica do Sol λ:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\lambda-\gamma}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin(\lambda-\gamma)}{1+e\cos(\lambda-\gamma)}\right] + t_0$$

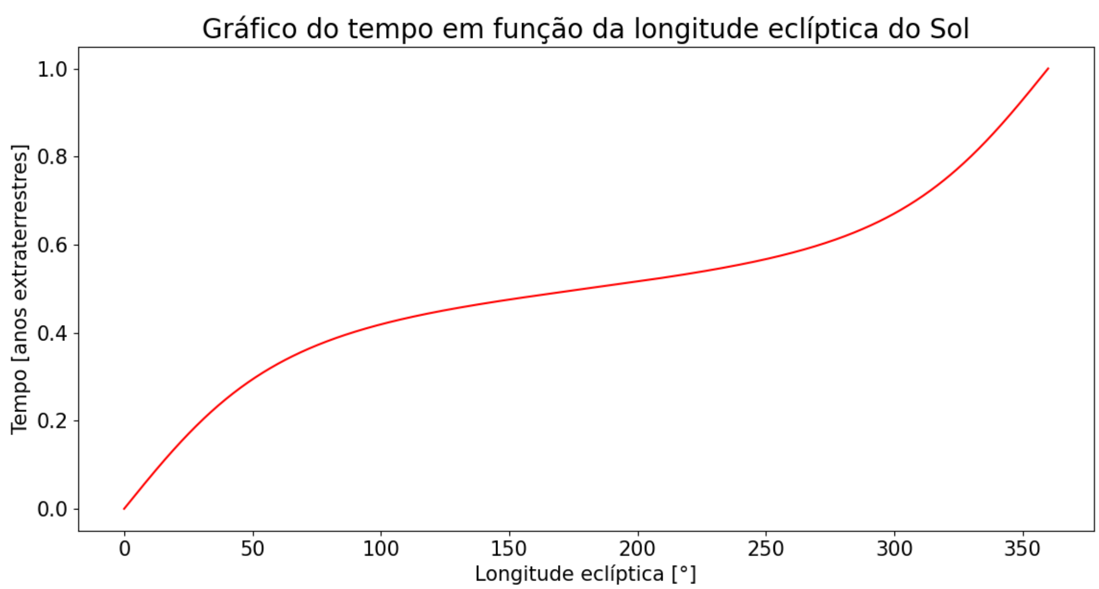
Onde t_0 é dado por

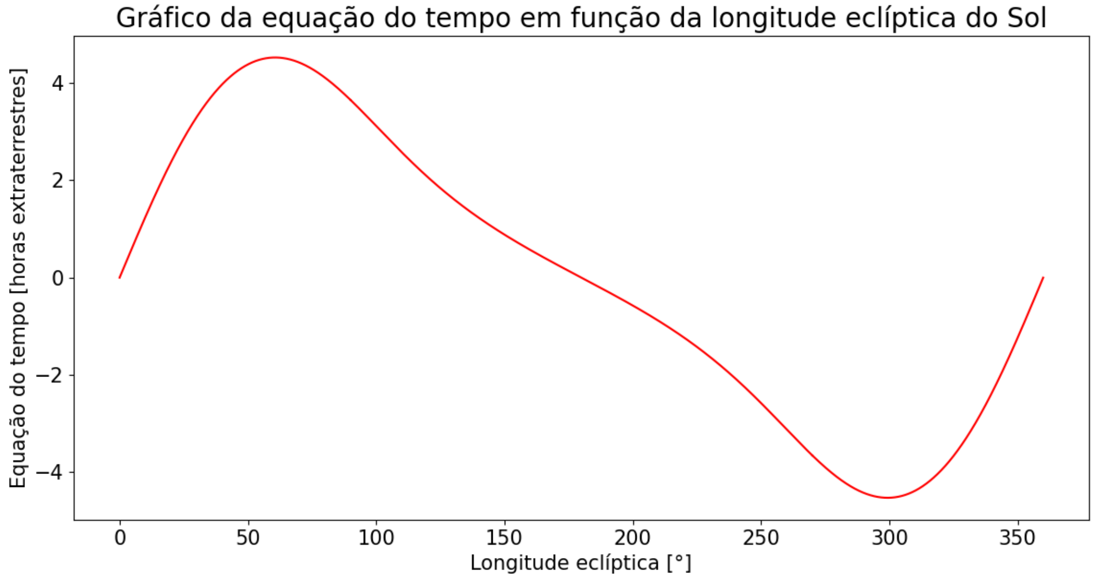
$$t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\gamma}{1+e\cos\gamma}\right]$$

Utilizando a equação para t, obtenha uma expressão para a equação do tempo E_T em função de λ, t e ε.

f) Obtenha também uma expressão para a taxa de variação $\Delta E_T/\Delta t$ da equação do tempo em função da longitude eclíptica do Sol e das constantes do problema. Essa expressão não é estritamente necessária para plotarmos o gráfico da equação do tempo no item seguinte, mas pode nos fornecer uma boa ideia de como a curva deveria ser.

g) Com tudo que obtemos até aqui, estamos prontos para obter graficamente a equação do tempo E_T de qualquer planeta em função do tempo t desde o equinócio vernal. A seguir, temos dois gráficos para os quais foram utilizados os dados de um planeta fictício com $\gamma = 180°$, $\varepsilon = 45°$ e $e = 0{,}5$.





Construa uma tabela com 10 valores equiespaçados de tempo junto da longitude eclíptica e da equação do tempo correspondentes a cada tempo, começando em $t = 0$ e terminando em $t = 1\,\text{ano}$. A partir dessa tabela, esboce um gráfico da equação do tempo (medida em horas extraterrestres) do planeta fictício em função do tempo (medido em anos extraterrestres).

3. Seleno Amori (30 pontos) Gaia, a Terra, apaixonou-se por Selena, a Lua. Conforme param os ponteiros do relógio terrestre para admirar a beleza lunar, o clima esquenta, e os dias parecem se elongar. O amor, porém, não é recíproco; já há tempo que Selena se afasta aos poucos. Nessa questão, vamos entender esses efeitos.

Primeiramente, adotaremos um modelo super simplificado: os únicos astros a serem considerados são a Terra e a Lua (despreze o Sol e qualquer outro corpo), e a rotação da Terra é coplanar à translação da Lua. A Terra é uma esfera maciça de massa M_T e raio R integralmente coberta por um oceano líquido de massa M_A. Já a Lua será um ponto material de massa M_L a uma distância d.

Além disso, a maré alta sempre está aproximadamente alinhada com a Lua. Como o período de rotação terrestre é menor que o de translação lunar, a velocidade da crosta é maior que a do fundo do mar. A velocidade relativa gera atrito, que impulsiona o Oceano à frente da Lua. Como as atrações gravitacionais das marés são distintas, daquele desalinhamento surge uma resultante tangencial, que acelera a Lua, realinhando o sistema.

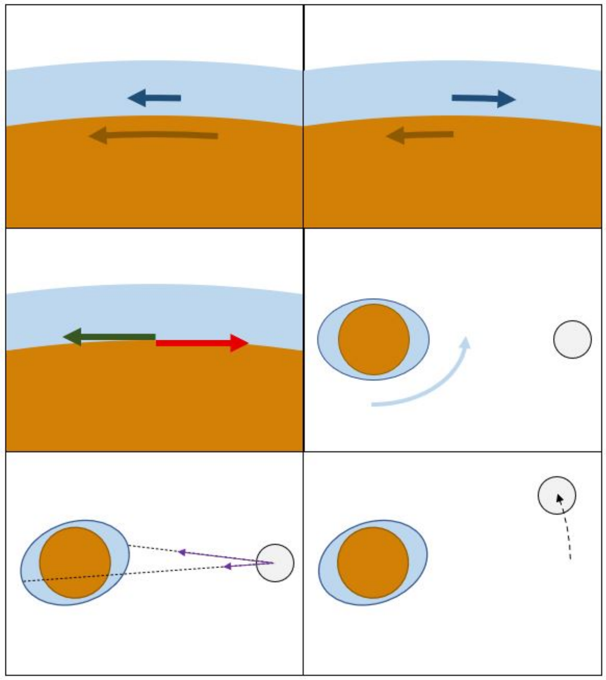


Figura 1: Primeiro e segundo quadros representam as velocidades angulares da Crosta e do Oceano; o segundo quadro ilustra o movimento relativo. O terceiro quadro indica o sentido do atrito. Os últimos três quadros retratam o movimento do Oceano e da Lua.

(a) Observações mostram que o dia sideral é acrescido, em média, 2 milissegundos por século. Sabendo disso, estime o torque que o atrito exerce na crosta terrestre.

Dado: O momento de inércia de uma esfera maciça de raio R e massa M é dado por:

$$I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$$

(b) Calcule em quantos centímetros a Lua se afasta da Terra a cada ano.

(c) Calcule a potência dissipada pelo efeito de maré, comparando esse valor com a potência que o Sol irradia sobre a Terra, ou seja, sua resposta final deve ser a razão entre as potências.

4. CR4b-2023 (45 pontos) CR4b-2023 é uma sonda em órbita heliocêntrica que foi construida e lançada em 2023 pelo jovem prodígio Caranguejo. O objetivo da sonda era estudar as tempestades solares e captar dados para que Caranguejo analisasse em seu observatório no Espírito Santo. CR4b-2023, porém, durante uma de suas expedições ao Sol, foi atingida por uma tempestade solar e sofreu uma danificação grave. Devido a isso, a sonda se desorientou e, assim, teve todos seus parâmetros orbitais alterados, de maneira que Caranguejo não soubesse mais sua localização. Visando traquear a posição de CR4b-2023 novamente, Caranguejo utilizou-se de seu observatório para coletar os valores das separações angulares $\Delta\phi$ entre a sonda e o Sol e os valores do diâmetro angular θ_S da sonda, tudo em função do tempo t. A tabela obtida por Caranguejo pode ser vista abaixo.

Tabela 3: Valores medidos por Caranguejo

$\Delta\phi$ (Graus)	θ_S (mas)	t (Dias)
0,000	99,27	0,00
4,889	103,67	1,79
17,354	104,72	7,43
29,015	93,06	20,62
27,793	81,18	25,41
19,140	79,77	45,98
11,539	77,97	51,61
6,864	74,60	53,41
4,246	74,46	54,53
2,656	74,80	55,31
3,719	77,03	56,59
7,177	83,06	58,43
10,120	96,31	61,77
22,464	132,36	80,59
13,783	103,02	108,43

Considere que, no momento inicial $t_0 = 0$ em que a sonda é atingida pela tempestade solar, o Sol estava exatamente no ponto de libra e o movimento da sonda era ascendente em relação ao plano da eclíptica. Além disso, considere que o raio da sonda, suposta esférica, é dado por $R = 30$ km. Para essa questão, não é necessário fazer análise de erros (apesar de ser **importante** tentar utilizar de métodos visando diminuir erros estatísticos). Com base no que foi apresentado:

(a) Calcule os parâmetros orbitais da órbita de CR4b-2023, ou seja, seu semi-eixo maior a, excentricidade e, inclinação i, longitude do nodo ascendente Ω e argumento do periélio ω. Como em todas as questões de analise de dados, você deve fornecer tabelas de dados claramente rotuladas, gráficos claramente rotulados e derivações de fórmulas suficientes para deixar claro o que você mediu e como está derivando seus resultados visando reduzir erros estatísticos.

(b) Considerando (x', y', z') como as coordenadas de CR4b-2023 em um sistema cartesiano de mão direita em que o plano $x'y'$ se localiza no plano da órbita da sonda, o Sol de localiza na origem, e o eixo x' aponta para o ponto vernal, escreva, em uma tabela, os valores de pelo menos 5 pontos (x', y', z') distintos. Com base nos dados encontrados, esboce, em um gráfico, a órbita de CR4b-2023, indicando as coordenadas de seu centro.

(c) Considerando agora um novo sistema de coordenadas de mão direita (x,y,z), no qual o Sol se localiza na origem, o plano xy representa o plano da eclíptica, e o eixo x aponta para o ponto vernal, escreva as coordenadas do centro da órbita de CR4b-2023. Por fim, calcule a distância d_{TC} entre o centro da orbita terreste o centro da órbita da sonda.