LISTA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, totalizando 130 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco"e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

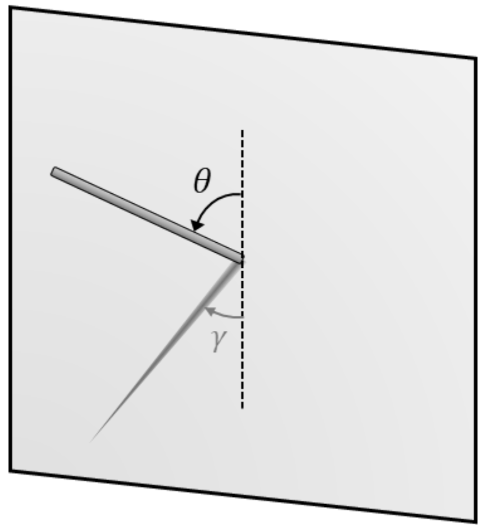
Prazo: 22/04/2024 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	9,8 m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Relógio de Sol (20 pontos)** Considere um relógio de Sol composto por um mostrador vertical e um gnômon, conforme representado na figura.



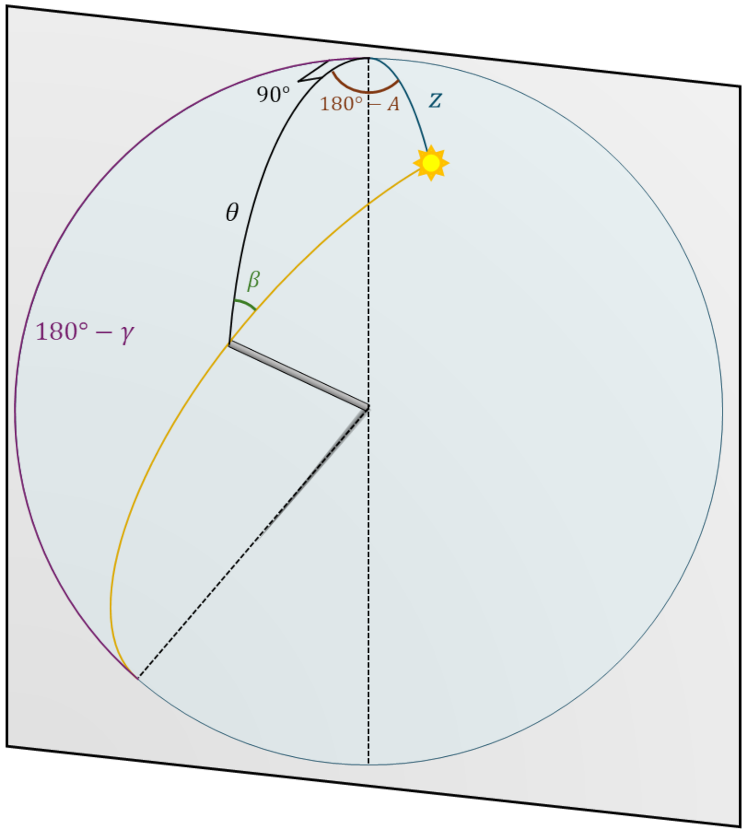
(a) Suponha um relógio de Sol vertical cujo gnômon esteja corretamente apontado para o sul. Seja φ a latitude do observador, H o ângulo horário do Sol e δ a declinação solar. Determine a relação entre θ e γ em função dessas variáveis.

(b) Com base no item anterior, qual deve ser o valor de θ para que o relógio funcione o ano todo?

(c) Utilizando o valor correto para θ, determine a relação entre γ e H, em função apenas de φ.

Solução:

(a) Vamos construir uma esfera com centro no ponto em que o gnômon está apoiado. Na figura, consideramos o azimute do ponto cardeal norte em direção ao ponto cardeal leste.



Vamos aplicar a lei dos quatro elementos no triângulo com o Sol, o gnômon e o zênite:

$$\cos(\theta)\cos(180^\circ - A) = \text{sen}(\theta)\cot(z) - \text{sen}(180^\circ - A)\cot(\beta)$$

$$\cot(\beta) = \frac{\cos(\theta)\cos(A)\text{sen}(z) + \text{sen}(\theta)\cos(z)}{\text{sen}(A)\text{sen}(z)}$$

Mas, pela transformação de coordenadas altazimutais em equatoriais, sabemos que:

$$\cos(A)\text{sen}(z) = \frac{\text{sen}(\delta) - \text{sen}(\varphi)\cos(z)}{\cos(\varphi)}$$

$$\cos(z) = \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\delta) + \cos(\varphi)\cos(\delta)\cos(H)$$

$$\text{sen}(A)\text{sen}(z) = -\text{sen}(H)\cos(\delta)$$

Assim:

$$\cot(\beta) = \frac{\cos(\theta)\text{sen}(\delta) - \cos(\theta)\text{sen}(\varphi)\cos(z) + \text{sen}(\theta)\cos(z)\cos(\varphi)}{-\text{sen}(H)\cos(\delta)\cos(\varphi)}$$

$$\cot(\beta) = \frac{\cos(\theta)\text{sen}(\delta) + \cos(z)\text{sen}(\theta - \varphi)}{-\text{sen}(H)\cos(\delta)\cos(\varphi)}$$

$$\cot(\beta) = \frac{\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\varphi-\theta)-\cos(\theta)}{\text{sen}(H)\cos(\varphi)}\tan(\delta)+\cot(H)\text{sen}(\varphi-\theta)$$

Aplicando lei dos quatro elementos no triângulo com o gnômon, a sombra e o zênite:

$$\cos(\theta)\cos(90^\circ) = \text{sen}(\theta)\cot(180^\circ-\gamma)-\text{sen}(90^\circ)\cot(180^\circ-\beta)$$

$$\text{sen}(\theta)\cot(\gamma) = \cot(\beta)$$

$$\cot(\gamma) = \frac{\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\varphi-\theta)-\cos(\theta)}{\text{sen}(H)\cos(\varphi)\text{sen}(\theta)}\tan(\delta)+\frac{\cot(H)\text{sen}(\varphi-\theta)}{\text{sen}(\theta)}$$

(b) Se queremos que o relógio funcione o ano todo, o termo que depende de δ precisa zerar:

$$\frac{\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\varphi-\theta)-\cos(\theta)}{\text{sen}(H)\cos(\varphi)\text{sen}(\theta)} = 0$$

$$\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\varphi-\theta)-\cos(\theta) = 0$$

$$\text{sen}^2(\varphi)\cos(\theta)-\text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\text{sen}(\theta)-\cos(\theta) = 0$$

$$\cos(\theta)\cos(\varphi)+\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}+\varphi$$

Assim, o gnômon fica apontado "para baixo", com seu eixo paralelo ao polo.

(c) Para encontrar o ângulo γ, basta substituir na equação do item (a):

$$\cot(\gamma) = -\frac{\cot(H)}{\cos(\varphi)}$$

2. **(Equação do Tempo - 35 pontos)** Nessa questão, derivaremos um método para encontrar a equação do tempo em um planeta cuja órbita possui parâmetros arbitrários. Por simplicidade, chamaremos a estrela de nosso planeta de Sol. Os sistemas de coordenadas altazimutal, equatorial e eclíptico desse planeta são definidos de forma análoga aos da Terra.

   a) Sabendo que a latitude eclíptica do Sol é definida como $\beta = 0$, demonstre o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\lambda \\ \cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda \\ \sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda \end{cases}$$

   Onde α é a ascensão reta do Sol, λ a sua longitude eclíptica, δ a sua declinação e ε a obliquidade da eclíptica.

   b) Considere que, em certo tempo t, o Sol possua coordenadas equatoriais α e δ e longitude eclíptica λ. Num momento posterior $t+\Delta t$, onde Δt é muito pequeno, o Sol se move para suas novas coordenadas equatoriais $\alpha+\Delta\alpha$ e $\delta+\Delta\delta$ e longitude eclíptica. Suponha que a variação em suas coordenadas seja muito pequena. Através das equações obtidas no item anterior, demonstre que

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\cos\varepsilon}{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}$$

Dica: Você pode utilizar que, para um dado x muito pequeno, $\sin x \approx x$ e $\cos x \approx 1$.

c) Utilizando a conservação de momento angular, encontre a velocidade angular $\Delta\lambda/\Delta t$ do Sol verdadeiro em seu movimento na eclíptica. Você deve deixar sua resposta em termos da massa M do Sol, do semi-eixo maior a da órbita elíptica do planeta, de sua excentricidade e, da longitude eclíptica λ e da longitude γ do periélio, isto é, o ângulo entre o ponto vernal e o periélio.

d) Obtenha uma expressão para a velocidade do Sol verdadeiro em ascensão reta, $\Delta\alpha/\Delta t$. Deixe sua resposta em termos de M, a, e, ε, λ e γ.

e) A equação obtida no item c) pode ser resolvida para obter uma expressão para o tempo t desde o equinócio vernal em função da longitude eclíptica do Sol λ:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\lambda-\gamma}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin(\lambda-\gamma)}{1+e\cos(\lambda-\gamma)}\right] + t_0$$

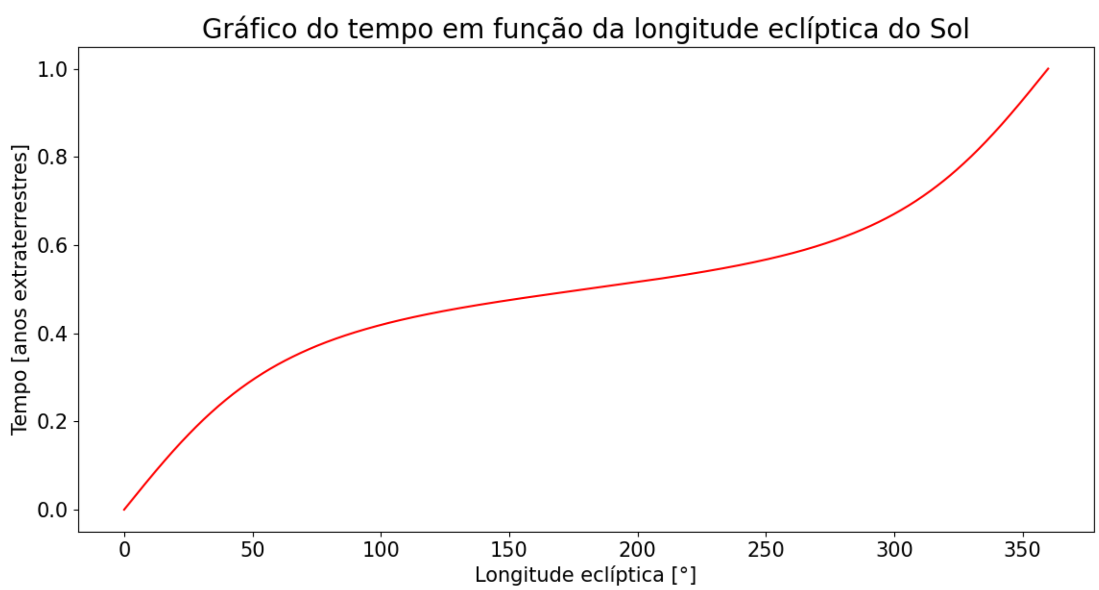
Onde t_0 é dado por

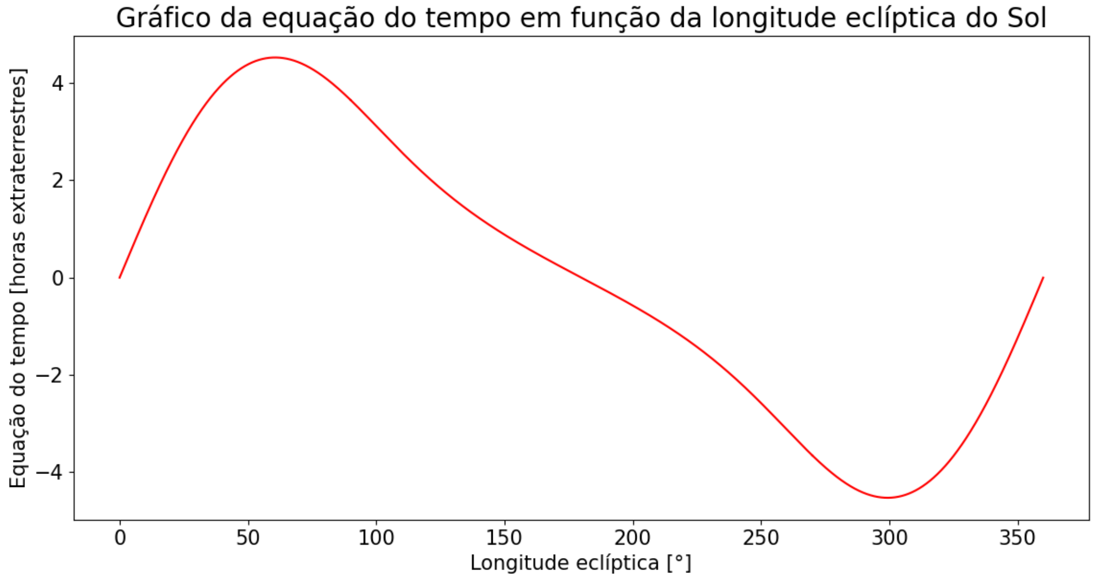
$$t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\gamma}{1+e\cos\gamma}\right]$$

Utilizando a equação para t, obtenha uma expressão para a equação do tempo E_T em função de λ, t e ε.

f) Obtenha também uma expressão para a taxa de variação $\Delta E_T/\Delta t$ da equação do tempo em função da longitude eclíptica do Sol e das constantes do problema. Essa expressão não é estritamente necessária para plotarmos o gráfico da equação do tempo no item seguinte, mas pode nos fornecer uma boa ideia de como a curva deveria ser.

g) Com tudo que obtemos até aqui, estamos prontos para obter graficamente a equação do tempo E_T de qualquer planeta em função do tempo t desde o equinócio vernal. A seguir, temos dois gráficos para os quais foram utilizados os dados de um planeta fictício com $\gamma = 180°$, $\varepsilon = 45°$ e $e = 0{,}5$.

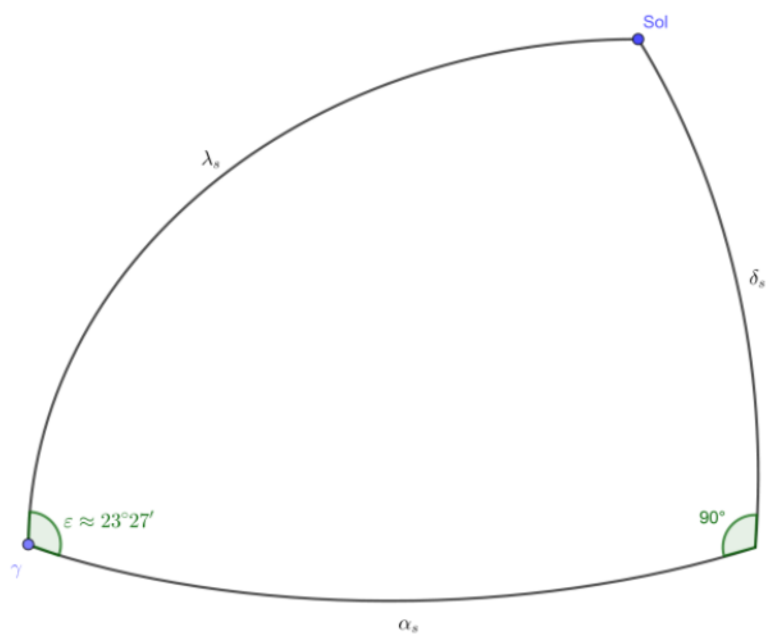




Construa uma tabela com 10 valores equiespaçados de tempo junto da longitude eclíptica e da equação do tempo correspondentes a cada tempo, começando em $t = 0$ e terminando em $t = 1$ ano. A partir dessa tabela, esboce um gráfico da equação do tempo (medida em horas extraterrestres) do planeta fictício em função do tempo (medido em anos extraterrestres).

Solução:

a) Consideremos o triângulo esférico a seguir, representando a posição do Sol na eclíptica ($\beta = 0$).



Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\lambda}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

$$\boxed{\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda}$$

Pela lei dos cossenos:

$$\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha + \sin\delta\sin\alpha\cos 90^\circ$$

$$\boxed{\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha}$$

Finalmente, pela lei dos 4 elementos:

$$\cot 90^\circ \sin\varepsilon + \cos\varepsilon\cos\alpha = \cot\lambda\sin\alpha$$

$$\boxed{\tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\lambda}$$

b) Consideremos a primeira equação do sistema do item anterior. Inicialmente, temos:

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\lambda$$

No momento posterior:

$$\tan(\alpha+\Delta\alpha) = \cos\varepsilon\tan(\lambda+\Delta\lambda)$$

$$\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\cos(\alpha+\Delta\alpha)} = \cos\varepsilon\frac{\sin(\lambda+\Delta\lambda)}{\cos(\lambda+\Delta\lambda)}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\Delta\alpha + \sin\Delta\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\Delta\alpha - \sin\alpha\sin\Delta\alpha} = \cos\varepsilon\frac{\sin\lambda\cos\Delta\lambda + \sin\Delta\lambda\cos\lambda}{\cos\lambda\cos\Delta\lambda - \sin\lambda\sin\Delta\lambda}$$

Como $\Delta\alpha$ e $\Delta\lambda$ são muito pequenos, podemos utilizar as aproximações do enunciado:

$$\frac{\sin\alpha + \Delta\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \Delta\alpha\sin\alpha} = \cos\varepsilon\frac{\sin\lambda + \Delta\lambda\cos\lambda}{\cos\lambda - \Delta\lambda\sin\lambda}$$

$$\frac{\tan\alpha + \Delta\alpha}{1 - \Delta\alpha\tan\alpha} = \cos\varepsilon\frac{\tan\lambda + \Delta\lambda}{1 - \Delta\lambda\tan\lambda}$$

Multiplicando cruzado, cortando termos de ordem 0 e desprezando termos de segunda ordem:

$$-\Delta\lambda\tan\alpha\tan\lambda + \Delta\alpha = \Delta\lambda\cos\varepsilon - \Delta\alpha\cos\varepsilon\tan\alpha\tan\lambda$$

Rearranjando os termos:

$$\Delta\alpha(1 + \cos\varepsilon\tan\alpha\tan\lambda = \Delta\lambda(\cos\varepsilon + \tan\alpha\tan\lambda)$$

Utilizando a equação original:

$$\Delta\alpha(1+\tan^2\alpha) = \Delta\lambda\cos\varepsilon(1+\tan^2\lambda)$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha} = \Delta\lambda\cos\varepsilon\frac{\Delta\lambda}{\cos^2\lambda}$$

Utilizando a segunda equação do sistema do primeiro item:

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda\frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\delta}$$

Dividindo ambos os lados por Δt e substituindo δ em função de λ, obtemos a equação desejada:

$$\boxed{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\cos\varepsilon}{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}}$$

c) O momento angular do planeta é dado por

$$L = mv_t r$$

Onde v_t é a velocidade tangencial do planeta. No periélio:

$$L = mv_p r_p = m\sqrt{GM\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a(1-e)}\right)}a(1-e)$$

$$L = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$$

Conservando o momento angular:

$$mr^2\frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{r^2}$$

Utilizando a fórmula de r em função da anomalia verdadeira:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = (1 + e\cos\theta)^2\sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}}$$

Como $\theta = \lambda - \gamma$:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = (1 + e\cos(\lambda-\gamma))^2\sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}}$$

d) Utilizando a equação do item c) e substituindo a expressão encontrada no item d):

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\delta}\cdot(1 + e\cos(\lambda-\gamma))^2\sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}}$$

Pela terceira equação do sistema do item a), $\cos^2\delta = 1 - \sin^2\lambda\sin^2\varepsilon$. Assim,

$$\boxed{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\cos\varepsilon}{1-\sin^2\lambda\sin^2\varepsilon}(1 + e\cos(\lambda-\gamma))^2\sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}}}$$

e) Sabemos que a equação do tempo é dada por

$$E_T = \alpha_M - \alpha$$

Onde α_M é a ascensão reta do Sol médio. Podemos obtê-la por meio seguinte equação:

$$\alpha_M = \omega_M t = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}t$$

Como sabemos o valor de $\tan\alpha$ tomaremos a tangente de ambos os lados da equação do tempo:

$$\tan E_T = \tan(\alpha_M - \alpha) = \frac{\tan\alpha_M - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha_M\tan\alpha}$$

Substituindo as expressões:

$$\boxed{E_T = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\left(\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t\right) - \sin\varepsilon\sin\lambda}{1 + \sin\varepsilon\sin\lambda\tan\left(\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t\right)}\right]}$$

f) Pela expressão da equação do tempo:

$$\frac{\Delta E_T}{\Delta t} = \frac{\Delta \alpha_M}{\Delta t} - \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \omega_M - \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

Substituindo as expressões encontradas anterioremente:

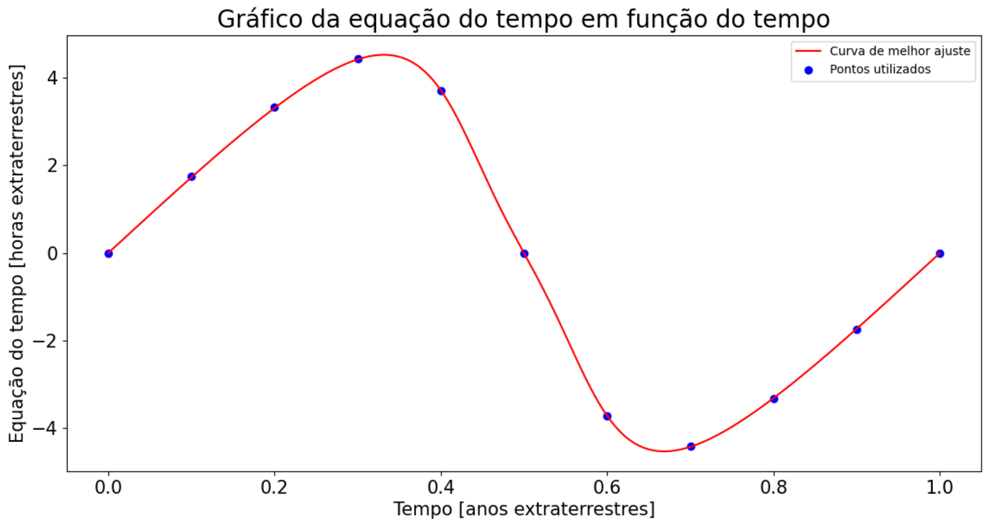
$$\boxed{\frac{\Delta E_T}{\Delta t} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} - \frac{\cos \varepsilon}{1 - \sin^2 \lambda \sin^2 \varepsilon}(1 + e \cos(\lambda - \gamma))^2 \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}}}$$

g) ERRATA: No enunciado pensado inicialmente, seriam pedidos **11 pontos** igualmente espaçados no intervalo de $t = 0$ até $t = 1$ ano, e não 10. Isso faria com que pontos consecutivos estivessem em intervalos $\Delta t = 0{,}1$ s um do outro, o que seria mais conveniente para os gráficos fornecidos. Porém, devido ao erro de digitação, **duas soluções serão aceitas**.
Solução pensada originalmente (utilizando 11 pontos):
Pelos gráficos do enunciado podemos obter a seguinte tabela:

t [anos]	λ [°]	E_T [horas]
0,0	0,0	0,00
0,1	14,3	1,75
0,2	29,8	3,33
0,3	51,3	4,44
0,4	88,3	3,71
0,5	178,1	0,00
0,6	270,1	-3,72
0,7	307,5	-4,41
0,8	330,3	-3,32
0,9	345,4	-1,74
1,0	360,0	0,00

Tabela 1: Valores obtidos a partir dos gráficos

Da tabela, podemos plotar os pontos obtidas e esboçar uma curva para a equação o tempo:

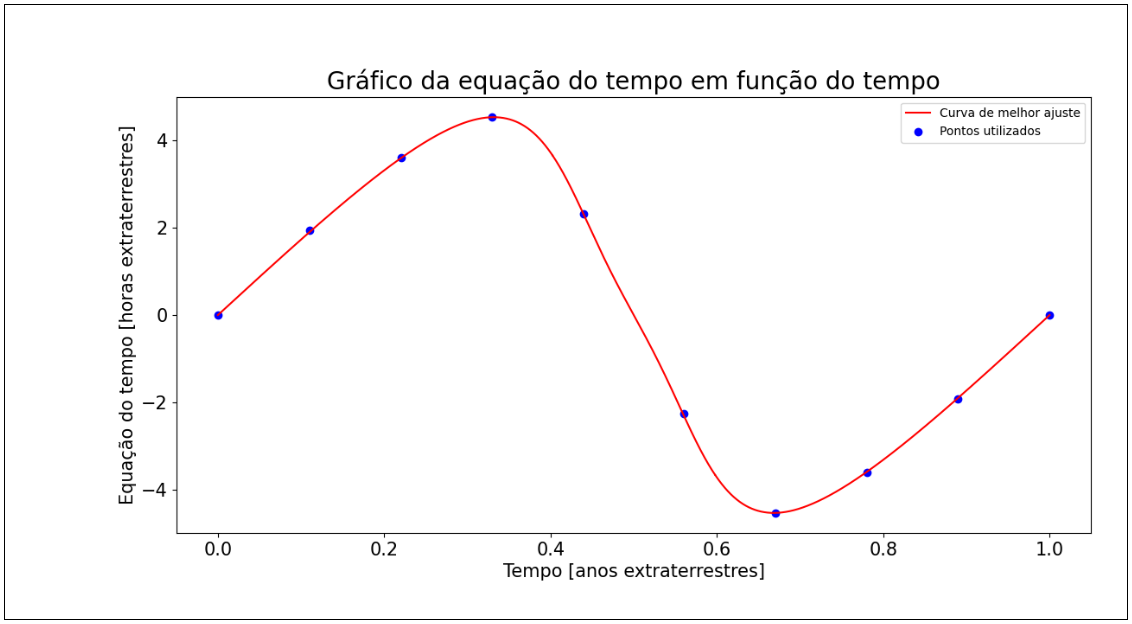


Soluções que apresentam 10 pontos dentre os apresentados na Tabela 1 (por ex.: 0,0; 0,1;...;0,9) também serão consideradas corretas.
Segunda solução (utilizando 10 pontos):
Pelos gráficos do enunciado podemos obter a seguinte tabela:

t [anos]	λ [°]	E_T [horas]
0,00	0,0	0,00
0,11	15,0	1,93
0,22	34,1	3,61
0,33	60,6	4,54
0,44	119,0	2,32
0,56	239,4	-2,25
0,67	297,8	-4,53
0,78	324,7	-3,60
0,89	343,8	-1,92
1,00	360,0	0,00

Tabela 2: Valores obtidos a partir dos gráficos

Da tabela, podemos plotar os pontos obtidas e esboçar uma curva para a equação o tempo:



3. **Seleno Amori (30 pontos)** Gaia, a Terra, apaixonou-se por Selena, a Lua. Conforme param os ponteiros do relógio terrestre para admirar a beleza lunar, o clima esquenta, e os dias parecem se elongar. O amor, porém, não é recíproco; já há tempo que Selena se afasta aos poucos. Nessa questão, vamos entender esses efeitos.

   Primeiramente, adotaremos um modelo super simplificado: os únicos astros a serem considerados são a Terra e a Lua (despreze o Sol e qualquer outro corpo), e a rotação da Terra é coplanar à translação da Lua. A Terra é uma esfera maciça de massa M_T e raio R integralmente coberta por um oceano líquido de massa M_A. Já a Lua será um ponto material de massa M_L a uma distância d.

   Além disso, a maré alta sempre está aproximadamente alinhada com a Lua. Como o período de rotação terrestre é menor que o de translação lunar, a velocidade da crosta é maior que a do fundo do mar. A velocidade relativa gera atrito, que impulsiona o Oceano à frente da Lua. Como as atrações gravitacionais das marés são distintas, daquele desalinhamento surge uma resultante tangencial, que acelera a Lua, realinhando o sistema.

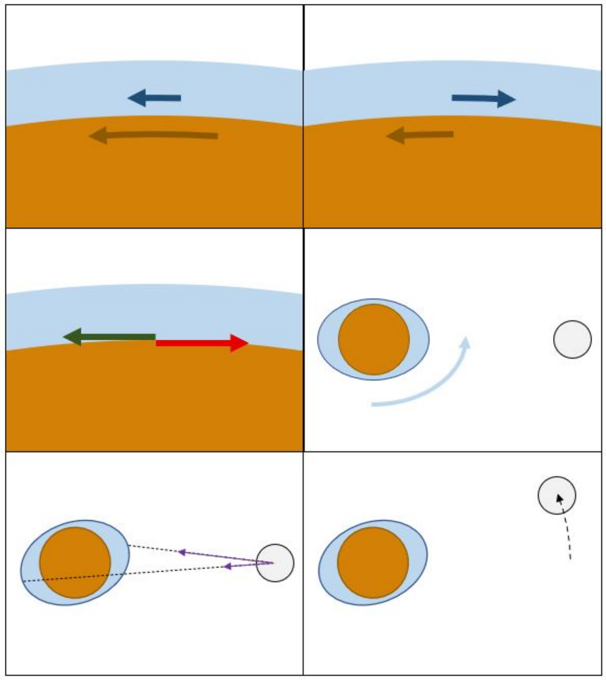


Figura 1: Primeiro e segundo quadros representam as velocidades angulares da Crosta e do Oceano; o segundo quadro ilustra o movimento relativo. O terceiro quadro indica o sentido do atrito. Os últimos três quadros retratam o movimento do Oceano e da Lua.

(a) Observações mostram que o dia sideral é acrescido, em média, 2 milissegundos por século. Sabendo disso, estime o torque que o atrito exerce na crosta terrestre.

Dado: O momento de inércia de uma esfera maciça de raio R e massa M é dado por:

$$I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$$

(b) Calcule em quantos centímetros a Lua se afasta da Terra a cada ano.

(c) Calcule a potência dissipada pelo efeito de maré, comparando esse valor com a potência que o Sol irradia sobre a Terra, ou seja, sua resposta final deve ser a razão entre as potências.

Solução:

(a) Seja τ o torque que as forças de atrito exercem sobre a crosta terrestre.

A desaceleração angular é dada por:

$$\tau_T = I_T \cdot \alpha_T$$

$$\tau_T = \frac{2}{5} \cdot M_T \cdot R^2 \cdot \alpha_T$$

$$\alpha_T = \frac{5 \cdot \tau}{2 \cdot M_T \cdot R^2}$$

Em um século, teremos:

$$\Delta\omega = -\alpha_T \cdot 100 \cdot T_{ano}$$

$$\frac{2\cdot\pi}{t_{dia,2}} - \frac{2\cdot\pi}{t_{dia,1}} = -\frac{5\cdot\tau}{2\cdot M_T\cdot R^2}\cdot 100\cdot T_{ano}$$

$$\frac{1}{t_{dia,2}} - \frac{1}{t_{dia,1}} = -\frac{5\cdot\tau}{4\cdot\pi\cdot M_T\cdot R^2}\cdot 100\cdot T_{ano}$$

$$\frac{-\Delta t_{dia}}{t_{dia,1}\cdot t_{dia,2}} = -\frac{5\cdot\tau}{4\cdot\pi\cdot M_T\cdot R^2}\cdot 100\cdot T_{ano}$$

Como $t_{dia,2} \approx t_{dia,1} = t_{dia} = 24h$:

$$\frac{-\Delta t_{dia}}{t_{dia}^2} = -\frac{5\cdot\tau}{4\cdot\pi\cdot M_T\cdot R^2}\cdot 100\cdot T_{ano}$$

$$\tau = \frac{4\cdot\pi\cdot\Delta t_{dia}\cdot M_T\cdot R^2}{500\cdot t_{dia}^2\cdot T_{ano}}$$

$$\boxed{\tau = 5\cdot 10^{16}\,\mathrm{N\,m}}$$

(b) O momento de inércia do sistema Oceano e Lua é:

$$I_{O+L} = I_O + I_L$$

$$I_{O+L} = k\cdot M_A\cdot R^2 + M_L\cdot d^2$$

A constante k depende da geometria do Oceano. É sabido, porém, que a massa de água na Terra é na ordem de um décimo da massa da Lua, enquanto o raio da Terra é da ordem de um centésimo da distância Terra-Lua. É esperado, portanto, que o momento de inércia da Lua seja próximo de 100.000 vezes o momento de inércia do Oceano. Sendo assim, iremos desprezar o primeiro termo.

$$I_{O+L} \approx M_L\cdot d^2$$

Por conservação de momento angular, o torque no sistema Oceano + Lua tem mesmo módulo, mas sentido oposto, do torque na crosta terrestre. Como visto no enunciado, esse torque acelera a rotação:

$$\tau_{O+L} = I_{O+L}\cdot\alpha_{O+L}$$

$$\alpha_{O+L} = \frac{\tau}{\cdot M_L\cdot d^2}$$

Se continuarmos a resolução como no item anterior, estaríamos cometendo um erro conceitual. Ao escrever que a aceleração angular vezes o tempo era a diferença de velocidades angulares, estávamos supondo que o raio de rotação permanece o mesmo, o que é verdade para o caso da crosta terrestre, mas não para o da Lua. Ao tentar um equacionamento similar, obteríamos que, como a aceleração angular é prógrada, o período de rotação estaria diminuindo, e, pela lei harmônica, a distância estaria diminuindo. Um resultado parecido também seria obtido se tentássemos encontrar a variação de velocidade linear da Lua e, por meio da equação vis-viva, tentássemos derivar a variação de distância. O erro ocorreria, pois a equação vis-viva pressupõe a conservação de energia, o que não ocorre na situação.

A interpretação física condizente é que o torque resultante sobre o sistema Oceano + Lua está fornecendo energia por meio de um trabalho motor. Vamos calcular a energia fornecida a partir do resultado encontrado, e derivar, pela equação de energia de uma órbita, a variação de raio orbital.

A variação de velocidade linear da Lua será:

$$\Delta v = \alpha_{O+L} \cdot d \cdot T_{ano}$$

$$\Delta v = \frac{\tau}{M_L \cdot d} \cdot T_{ano}$$

A variação de energia cinética fornecida será:

$$\Delta K = \frac{M_L \cdot \left(v_2^2 \breve{}\, v_1^2\right)}{2}$$

$$\Delta K = \frac{M_L \cdot (v_2 + v_1)\,(v_2 \breve{}\, v_1)}{2}$$

Como $v_2 \approx v_1 = v$:

$$\Delta K \approx M_L \cdot v \cdot \Delta v$$

$$\Delta K \approx M_L \cdot v \cdot \frac{\tau}{M_L \cdot d} \cdot T_{ano}$$

$$\frac{\Delta K}{T_{ano}} = \frac{\tau \cdot v}{d}$$

A energia fornecida será a variação de energia mecânica:

$$\Delta K = \Delta E$$

$$M_L \cdot v \cdot \Delta v = -\frac{G \cdot M_T \cdot M_L}{2 \cdot d_2} - \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot M_L}{2 \cdot d_1}\right)$$

$$v \cdot \Delta v = \frac{G \cdot M_T}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$$

$$v \cdot \Delta v = \frac{G \cdot M_T}{2} \cdot \frac{\Delta d}{d_1 \cdot d_2}$$

Como $d_2 \approx d_1 = d$:

$$v \cdot \Delta v = \frac{G \cdot M_T \cdot \Delta d}{2 \cdot d^2}$$

$$v \cdot \frac{\tau}{M_L \cdot d} \cdot T_{ano} = \frac{G \cdot M_T \cdot \Delta d}{2 \cdot d^2}$$

$$\Delta d = \frac{2 \cdot \tau \cdot d \cdot v \cdot T_{ano}}{\cdot G \cdot M_L \cdot M_T}$$

$$\Delta d = 4\,cm$$

(c) Pela terceira lei de Newton, as forças de atrito exercidas sobre a crosta e sobre o Oceano devem ter mesmo módulo, mas sentidos opostos. Sendo assim, a potência é diretamente proporcional à velocidade:

$$\frac{P_{crosta}}{P_{Oceano}} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{t_{dia}} \cdot \frac{d}{v \cdot R}$$

Pelo item anterior, sabemos que:

$$P_{Oceano} = \frac{\tau \cdot v}{d}$$

Logo:

$$P_{crosta} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot \tau}{t_{dia}}$$

Uma parte da potência é fornecida ao sistema Oceano+Lua, enquanto outra parte é convertida em calor. A parcela convertida em calor, portanto:

$$P_1 = (-P_{crosta}) - P_{Oceano}$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \tau}{t_{dia}} - \frac{\tau \cdot v}{d}$$

$$P_1 = 3{,}5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{J}$$

Para encontrarmos a potência que a Terra absorve do Sol. Primeiramente encontramos o fluxo solar:

$$F = \frac{L_\odot}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

A potência que atinge a Terra é:

$$P_2 = F \cdot \pi \cdot R^2$$

$$P_2 = \frac{L_\odot \cdot R^2}{4 \cdot r^2}$$

E a potência absorvida pelo planeta:

$$P_3 = \frac{L_\odot \cdot R^2 \cdot (1 - A)}{4 \cdot r^2}$$

$$P_3 = 1 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$$

Nossa resposta final é:

$$\boxed{\frac{P_1}{P_3} = 3 \cdot 10^{-5}}$$

4. **CR4b-2023 (45 pontos)** CR4b-2023 é uma sonda em órbita heliocêntrica que foi construida e lançada em 2023 pelo jovem prodígio Caranguejo. O objetivo da sonda era estudar as tempestades solares e captar dados para que Caranguejo analisasse em seu observatório no Espírito Santo. CR4b-2023, porém, durante uma de suas expedições ao Sol, foi atingida por uma tempestade solar e sofreu uma danificação grave. Devido a isso, a sonda se desorientou e, assim, teve todos seus parâmetros orbitais alterados, de maneira que Caranguejo não soubesse mais sua localização. Visando traquear a posição de CR4b-2023 novamente, Caranguejo utilizou-se de seu observatório para coletar os valores das separações angulares $\Delta\phi$ entre a sonda e o Sol e os valores do diâmetro angular θ_S da sonda, tudo em função do tempo t. A tabela obtida por Caranguejo pode ser vista abaixo.

Tabela 3: Valores medidos por Caranguejo

$\Delta\phi$ (Graus)	θ_S (mas)	t (Dias)
0,000	99,27	0,00
4,889	103,67	1,79
17,354	104,72	7,43
29,015	93,06	20,62
27,793	81,18	25,41
19,140	79,77	45,98
11,539	77,97	51,61
6,864	74,60	53,41
4,246	74,46	54,53
2,656	74,80	55,31
3,719	77,03	56,59
7,177	83,06	58,43
10,120	96,31	61,77
22,464	132,36	80,59
13,783	103,02	108,43

Considere que, no momento inicial $t_0 = 0$ em que a sonda é atingida pela tempestade solar, o Sol estava exatamente no ponto de libra e o movimento da sonda era ascendente em relação ao plano da eclíptica. Além disso, considere que o raio da sonda, suposta esférica, é dado por $R = 30$ km. Para essa questão, não é necessário fazer análise de erros (apesar de ser **importante** tentar utilizar de métodos visando diminuir erros estatísticos). Com base no que foi apresentado:

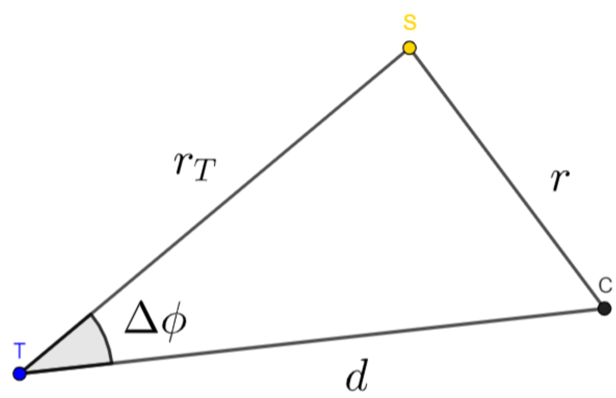
(a) Calcule os parâmetros orbitais da órbita de CR4b-2023, ou seja, seu semi-eixo maior a, excentricidade e, inclinação i, longitude do nodo ascendente Ω e argumento do periélio ω. Como em todas as questões de analise de dados, você deve fornecer tabelas de dados claramente rotuladas, gráficos claramente rotulados e derivações de fórmulas suficientes para deixar claro o que você mediu e como está derivando seus resultados visando reduzir erros estatísticos.

(b) Considerando (x', y', z') como as coordenadas de CR4b-2023 em um sistema cartesiano de mão direita em que o plano $x'y'$ se localiza no plano da órbita da sonda, o Sol de localiza na origem, e o eixo x' aponta para o ponto vernal, escreva, em uma tabela, os valores de pelo menos 5 pontos (x', y', z') distintos. Com base nos dados encontrados, esboce, em um gráfico, a órbita de CR4b-2023, indicando as coordenadas de seu centro.

(c) Considerando agora um novo sistema de coordenadas de mão direita (x,y,z), no qual o Sol se localiza na origem, o plano xy representa o plano da eclíptica, e o eixo x aponta para o ponto vernal, escreva as coordenadas do centro da órbita de CR4b-2023. Por fim, calcule a distância d_{TC} entre o centro da orbita terreste o centro da órbita da sonda.

Solução:

(a) Perceba que, com os valores de θ_S e $\Delta\phi$, conseguimos calcular os valores da distância $r(t)$ da Sonda ao Sol, em função do tempo. Analisando o gráfico de $r(t) \times t$, conseguimos obter as distância r_{max} e r_{min}, e consequentemente o semi-eixo maior a e excentricidade e da órbita de CR4b-2023. Pela figura abaixo, definindo d como a distância entre a Terra e a sonda,



temos que:

$$r = \sqrt{r_T^2 + d^2 - 2r_T d \cos(\Delta\phi)}$$

mas, sabendo que,

$$\theta_S = \frac{2R}{d}$$

conseguimos encontrar uma fórmula para d:

$$d = \frac{2R}{\theta_S}$$

Perceba que θ_S deve ser convertido para radiano. Substituindo os valores dados no enunciado, podemos montar a seguinte tabela contendo os valores de $r(t) \times t$:

Tabela 4: Valores de $r(t) \times t$

r (UA)	t (Dias)
0,167	0,00
0,216	1,79
0,341	7,43
0,485	20,62
0,485	25,41
0,341	45,98
0,216	51,61
0,167	53,41
0,136	54,53
0,117	55,31
0,100	56,59
0,125	58,43
0,216	61,77
0,485	80,59
0,292	108,43

Plotando um gráfico da relação acima, obtemos:

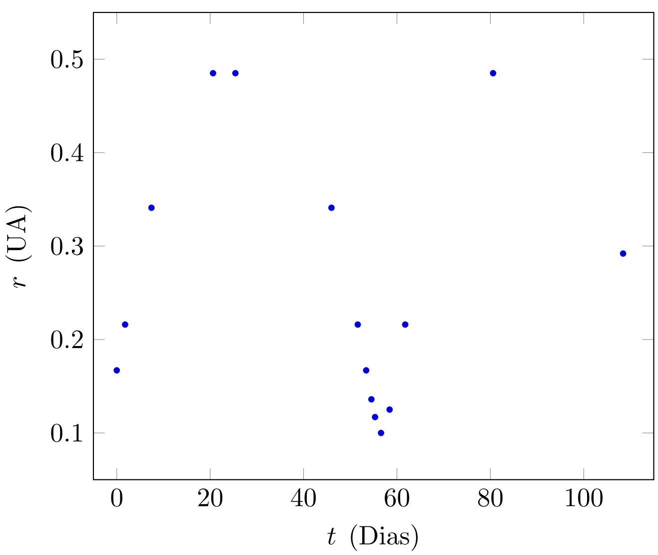


Gráfico 1: Valores de $r(t) \times t$

de onde concluímos que $r_{min} \approx 0{,}100$ UA e $r_{max} \approx 0{,}500$ UA. Então:

$$\boxed{a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} \approx 0{,}300 \text{ UA}}$$

e

$$\boxed{e = \frac{r_{max} - r_{min}}{2a} \approx 0{,}67}$$

Caso o aluno meça r_{max} e r_{min} apenas analisando os dados da tabela (sem plotar um gráfico), ele encontrará valores com erros extremamente altos e, portanto, terá pontos descontados. Soluções alternativas, como medir período, que não utilizam de gráfico, também serão penalizadas. Já para calcular o valor da longitude do nodo ascendente Ω e argumento do periélio ω, devemos nos reparar que, no instante inicial $t_0 = 0$, a separação angular entre CR4b-2023 e o Sol é nula, $\Delta\phi = 0$, o que significa que CR4b-2023, nesse momento, se situa no plano da eclíptica, ou seja, se situa no nodo ascendente de sua órbita (já que seu movimento, no início, é ascendente). Devido à isso, a longitude do nodo ascendente da sonda será igual a longitude eclíptica da Terra naquele momento. Como sabemos, pelo enunciado, que o Sol, no instante inicial, está sobre o ponto de libra, teremos que:

$$\boxed{\Omega = 0^\circ}$$

Além disso, pelos valores do enunciado, conseguimos inspecionar que a sonda se translada no mesmo sentido da Terra. Logo, no instante inicial, sabemos que r_0 é dado por:

$$r_0 = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(360^\circ - \omega)}$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos:

$$\cos(360^\circ - \omega) \approx 0$$

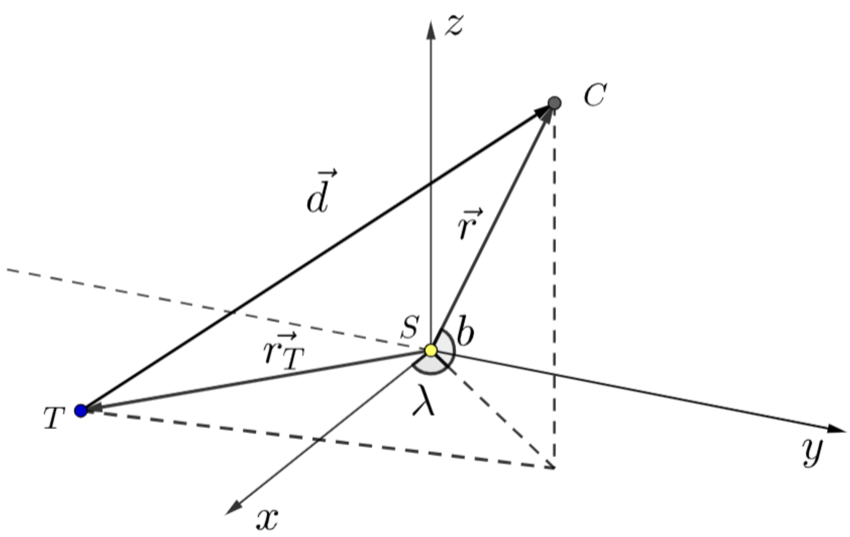
assim:

$$360^\circ - \omega = 90^\circ$$

e, portanto:

$$\boxed{\omega = 270^\circ}$$

Perceba que, caso $\omega = 90^\circ$, teríamos um absurdo.
Já para calcular a inclinação i da órbita, apresentaremos duas soluções:
Solução 1 (Vetores):



Pela figura,

$$\vec{r} = r\left(\cos b\cos\lambda\hat{x} + \cos b\sin\lambda\hat{y} + \sin b\hat{z}\right)$$

e

$$\vec{r_T} = r_T\left(\cos(\omega_\oplus t)\hat{x} + \sin(\omega_\oplus t)\hat{y}\right)$$

Consequentemente:

$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{r_T}$$

Substituindo os valores:

$$\vec{d} = (r\cos b\cos\lambda - r_T\cos(\omega_\oplus t)\hat{x} + r\cos b\sin\lambda - r_T\sin(\omega_\oplus t)\hat{y} + r\sin b\hat{z})$$

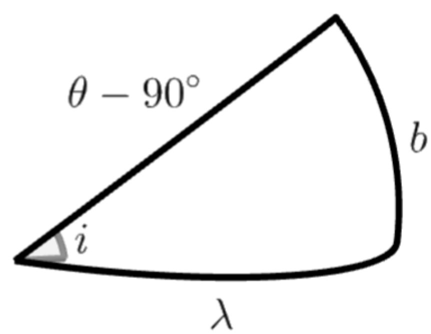
Calculando o módulo do vetor $\vec{d}$, obtemos que:

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{r_T^2 + r^2 - 2r_T r\cos b\cos(\lambda - \omega_\oplus t)}$$

Portanto:

$$\cos b\cos(\lambda - \omega_\oplus t) = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r}$$

Mas, pelo triângulo esférico formado por CR4b-2023, o nodo ascendente de sua órbita e o plano da eclíptica,



obtemos que:

$$\sin\theta = \cos b\cos\lambda$$

em que θ é a anomalia verdadeira da órbita de CR4b-2023. Logo:

$$\cos b = \frac{\sin\theta}{\cos\lambda}$$

Substituindo na equação anterior, obtemos que:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\lambda}\cos(\lambda - \omega_\oplus t) = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r}$$

Manipulando algebricamente:

$$\cos(\omega_\oplus t) + \sin(\omega_\oplus t)\tan\lambda = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r\sin\theta}$$

Por fim,

$$\lambda = \arctan\left(\frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r\sin\theta\sin(\omega_\oplus t)} - \cot(\omega_\oplus t)\right)$$

e

$$b = \arccos\left(\frac{\sin\theta}{\cos\lambda}\right)$$

onde,

$$\theta = \arccos\left(\frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e}\right)$$

Assim, substituindo os valores numéricos, conseguimos montar uma tabela com os valores de λ e b:

Tabela 5: Valores de λ e b

λ (Graus)	b (Graus)
0,000	0,00
17,495	9,847
45,905	22,521
78,492	29,499
101,508	29,499
134,095	22,521
163,504	9,847
180,000	0,000
197,495	-9,847
216,005	-18,747
270	-30
333,435	-14,478
17,495	9,847
78,492	29,499
143,994	18,747

Para encontrar o valor de i, perceba que, pelo triângulo esférico anterior e pela Lei dos Quatro Elementos, podemos chegar na seguinte relação:

$$\cos\lambda\cos 90^\circ = \sin\lambda\cot b - \sin 90^\circ \cot i$$

ou seja:

$$\underbrace{\tan b}_{y} = \underbrace{0}_{A} + \underbrace{\tan i}_{B}\,\underbrace{\sin\lambda}_{x}$$

Visando diminuir erros estatísticos na determinação de i, podemos plotar um gráfico linearizado de $\tan b \times \sin\lambda$, e calcular o valor de $\tan i$ pelo coeficiente angular da reta do gráfico. Para isso, utilizaremos os valores:

Tabela 6: Linearização de $\tan b \times \sin\lambda$

$\tan b$	$\sin\lambda$
0,000	0,000
0,174	0,301
0,415	0,718
0,566	0,980
0,566	0,980
0,415	0,718
0,174	0,301
0,000	0,000
-0,174	-0,300
-0,340	-0,588
-0,578	-1,000
-0,258	-0,447
0,174	0,301
0,566	0,980
0,340	0,588

Assim, temos o gráfico:

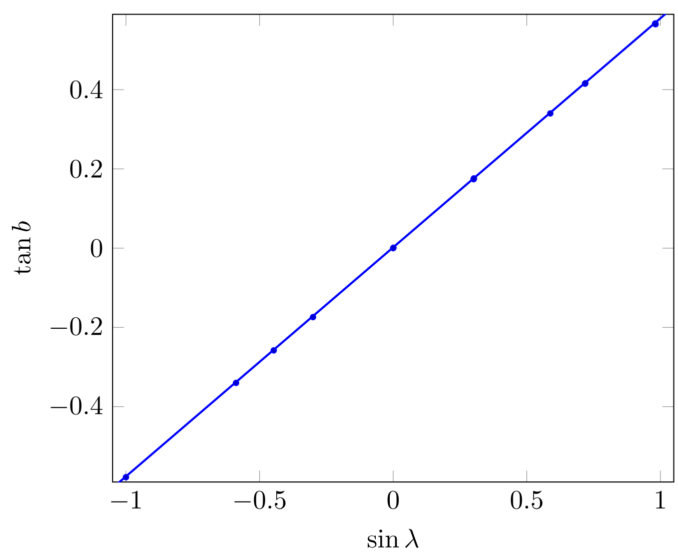


Gráfico 2: Linearização de $\tan b \times \sin\lambda$

Pelo método dos mínimos quadrados, sendo $y = A + Bx$ a equação da reta, obtemos que:

$$B \approx 0{,}578$$

e, então:

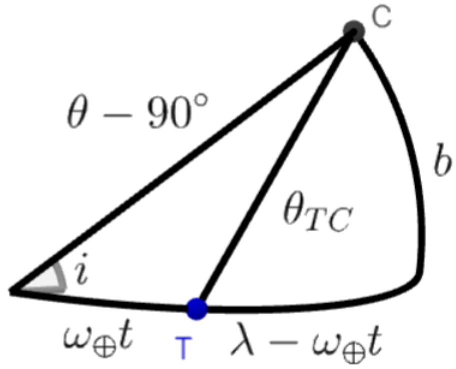
$$i = \arctan B$$

tal que:

$$\boxed{i \approx 30^\circ}$$

Solução 2 (Astronomia de Posição):

À seguir, segue uma solução alternativa e correta que poderia ser utilizada. Considere o seguinte triângulo esférico:



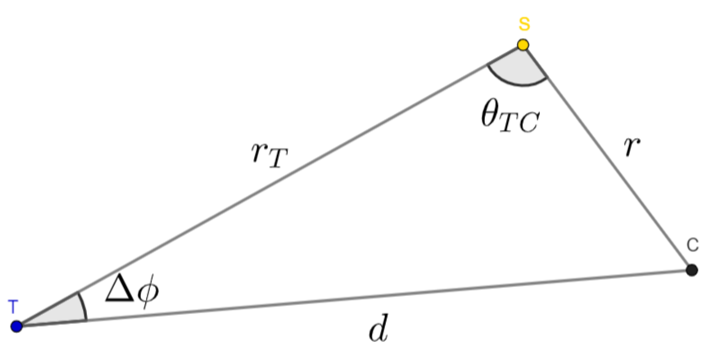
Pela lei dos cossenos, temos que:

$$\cos\theta_{TC} = \cos(\omega_\oplus t)\sin\theta - \sin(\omega_\oplus t)\cos\theta\cos i$$

Linearizando,

$$\underbrace{\frac{\cos\theta_{TC}}{\sin(\omega_\oplus t)\cos\theta}}_{y} = \underbrace{-\cos i}_{A} + \underbrace{1}_{B}\underbrace{\cot(\omega_\oplus t)\tan\theta}_{x}$$

logo, devemos plotar um gráfico de $\cos\theta_{TC}/\sin(\omega_\oplus t)\cos\theta \times \cot(\omega_\oplus t)\tan\theta$ visando diminuir erros estatísticos na determinação de i. Repare que θ_{TC} pode ser obtido pelo triângulo formado pelo Sol, a Terra e CR4b-2023:



Pela lei dos cossenos,

$$d^2 = r_T^2 + r^2 - 2r_T r\cos\theta_{TC}$$

então:

$$\theta_{TC} = \arccos\left(\frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r}\right)$$

Com base nisso, podemos montar uma tabela com valores linearizados e, uma vez de posse de um gráfico, conseguimos, pelo método dos mínimos quadrados, encontrar o mesmo resultado obtido anteriormente para a inclinação ($i = 30°$).

Soluções equivalentes (ie que utilizam método gráfico ou equações análogas às utilizadas no gabarito) também serão consideradas. O aluno que medir o valor de i apenas por uma medição, ou calcular i através da média aritmética de diversas medições, não percebendo a necessidade de se plotar um gráfico para diminuir erros estatísticos, será penalizado.

(b) Como o Sol se localiza na origem, os valores de x' e y' podem ser calculados por:

$$x' = r \sin\theta$$

e

$$y' = -r \cos\theta$$

Escrevendo em uma tabela cinco valores diferentes de x' e y', obtemos que:

Tabela 7: Valores de x' e y'

x' (UA)	y' (UA)
0,167	0,000
0,084	0,478
-0,219	0,261
-0,203	0,074
0,000	-0,100

Perceba que quaisquer valores, desde que corretos, de x' e y' podem ser utilizados. Além do mais, é importante aumentar o espaçamento entre os valores de x' e y' visando diminuir os erros associados ao esboço da órbita. Com base nisso, podemos plotar o gráfico:

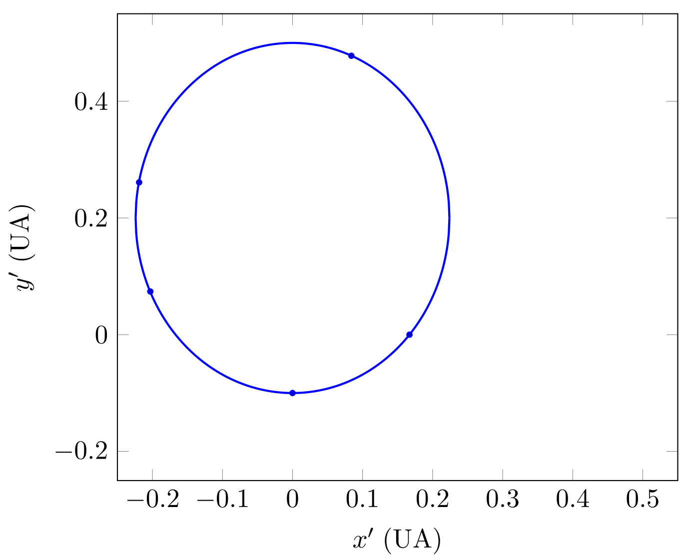


Gráfico 4: Órbita de CR4b-2023

Concluímos, por fim, que as coordenadas (x', y', z') do centro da elipse são dadas por $\boxed{(0.000, 0.200, 0.000)}$.

(c) Nesse caso, para encontrar as coordenadas (x, y, z) do centro da órbita de CR4b-2023, basta rotacionar suas coordenadas (x',y',z') por $-i = -30°$, em torno do eixo x'. Logo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30° & \sin 30° \\ 0 & -\sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Então,

$$x = x'$$

$$y = y' \cos 30° + z' \sin 30°$$

$$z = -y' \sin 30° + z' \cos 30°$$

Substituindo os valores númericos, obtemos que as coordenadas (x, y, z) do centro de CR4b-2023 são dadas por $\boxed{(0.000, 0.173, -0.100)}$.

Por fim, obtemos então que a distância entre o centro da órbita terrestre e o centro da órbita da sonda é dada por:

$$d = |x^2 + y^2 + z^2|$$

ou seja:

$$\boxed{d = 0.200 \text{ UA}}$$

Parabéns! Você acabou de localizar a órbita de CR4b-2023 e ajudar o grande astrônomo Caranguejo a realizar sua missão. Agora comemore sua conquista!