LISTA 2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 3 problemas, totalizando 90 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco"e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

Prazo: 28/04/2024 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	

Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	

Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	

Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	

Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Zona convectiva (20 pontos)** Nessa questão, estudaremos um modelo simplificado para o funcionamento de uma zona convectiva no interior estelar. Para isso, a porção de matéria em movimento será tratada como uma bolha de gás ideal submetida a processos adiabáticos, com coeficiente de Poisson γ. Nos próximos itens, o sub-índice "b"se refere à bolha, e "v", à vizinhança.

   Dado: equação dos gases ideais:

$$P \cdot \mu = \rho \cdot \kappa_B \cdot T$$

   Nos itens a seguir, você sempre pode tratar μ e κ_B como constantes para deixar suas respostas em função.

   (a) Partindo da primeira lei da termodinâmica, deduza as seguintes expressões, válidas para transformações adiabáticas:

$$P_b \cdot \rho_b^{-\gamma} = P_{b,0} \cdot \rho_{b,0}^{-\gamma}$$

$$P_b \cdot T_b^{\gamma/(1-\gamma)} = P_{b,0} \cdot T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)}$$

   (b) Suponha que a estrela possa ser dividida em cascas esféricas, cada uma com propriedades uniformes ao longo da casca. Determine a taxa de variação da pressão, dP_v/dr, numa casca de densidade $\rho_{v,0}$ e aceleração gravitacional g (em módulo). Considere que dr é positivo à medida que se afasta do centro.

   (c) Suponha que nossa bolha seja deslocada radialmente de seu lugar origem por um espaço dr, encontre as variações de temperatura dT_b e de densidade $d\rho_b$, em função de γ, $\rho_{v,0}$, $T_{v,0}$, g e dr

   (d) Encontre a taxa de variação da densidade da vizinhança, $d\rho_v/dr$, em função de $\rho_{v,0}$, $T_{v,0}$, g e dT_V/dr. Assuma apenas que se trata de um gás ideal.

   (e) Encontre a taxa de aceleração da bolha, $d\ddot{r}/dr$, em função de $T_{v,0}$, g, dT_b/dr e dT_v/dr. Considere que as forças atuantes sobre a bolha sejam somente a gravidade e o empuxo. Com base em seu resultado, responda: existe a possibilidade de convexão invertida, isto é, de gás frio subindo e gás quente descendo?

2. **Gás de Férmions degenerado** (40 pontos)

   O estudo dos gases de Férmions degenerados remonta ao início do século XX, quando físicos como Albert Einstein, Wolfgang Pauli e Satyendra Nath Bose desenvolveram as bases teóricas para compreender o comportamento das partículas fundamentais, como elétrons e prótons, em condições extremas de temperatura e densidade. A aplicação desses conceitos tem sido essencial para a compreensão de fenômenos astrofísicos, como o colapso de estrelas em anãs brancas e estrelas de nêutrons. Nessa questão, exploraremos um modelo simplificado para estudar o fenômeno.

   Observação: Para todos os itens, à exceção do último, desconsidere efeitos relativísticos.

   Observação: Para todos os itens algébricos, deixe sua resposta em função das variáveis solicitadas e de constantes físicas, a saber, a massa do elétron, m_e, a massa do próton/nêutron, m_p, a constante de Planck reduzida, $\hbar$, a constante da Gravitação, G, a constante de Boltzmann, k_B, e a velocidade da luz, c.

   (a) Considere um modelo em que um elétron em estado estacionário está preso dentro de um cubo no qual o potencial é nulo. Encontre os possíveis valores de energia do elétron. Deixe sua resposta em função da aresta L do cubo e de inteiros não-negativos N_x, N_y e N_z.

(b) Suponha agora que haja $N_e \gg 1$ elétrons dentro do cubo. Pelo princípio da exclusão de Pauli, dois elétrons não podem apresentar o mesmo conjunto de números quânticos (N_x, N_y, N_z e o número de spin, $\pm 1/2$) simultaneamente. Supondo que o cubo está em seu estado fundamental, determine a máxima energia, ε_F, de um elétron no cubo. Deixe sua resposta em função do número atômico médio Z, do número de massa médio A, e da densidade, ρ.

Dica: você vai precisar contar a quantidade de soluções naturais de uma inequação. Pense numa analogia geométrica: qual o lugar geométrico dos reais que seguem essa condição? O que as triplas naturais representariam nesse espaço?

(c) O gás de elétrons é dito degenerado quando a energia térmica média é inferior à energia do primeiro estado não ocupado. Determine a relação entre a temperatura, T, e a densidade, ρ, a fim de que haja degeneração. Deixe sua resposta em função do número atômico médio, Z, e do número de massa médio, A.

(d) Considere o seguinte modelo para a pressão de degeneração: os elétrons são tratados como partículas clássicas colidindo elasticamente com as paredes de um recipiente cúbico de aresta L. A energia média de um elétron é $3 \cdot \varepsilon_F/5$. Encontre uma expressão para a pressão de degeneração. Deixe sua resposta em função do número atômico médio, Z, do número de massa médio, A, e da densidade, ρ.

(e) Estime uma relação entre a massa e o raio de um núcleo degenerado. Para tal, assuma que o núcleo tenha densidade homogênea e que seu **centro** seja sustentado exclusivamente pela pressão de degeneração. Deixe sua resposta em função do número atômico médio, Z, e do número de massa médio, A.

(f) Avalie o raio de uma anã-branca de carbono-oxigênio de uma massa solar. Compare sua resposta com o valor esperado.

Dados:

- Massa do elétron: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- Massa do próton/nêutron: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Constante de Planck reduzida: $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
- Constante Gravitacional: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- Massa solar: $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio de uma anã-branca de carbono-oxigênio de uma massa solar (valor experimental): $M_{ab} = 6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$

(g) Percebe-se que nosso modelo não prevê um limite de Chandrasekhar. Uma das hipóteses que traçamos foi o regime não-relativístico. Avalie a velocidade associada ao máximo momentum de um elétron no núcleo da estrela do exercício anterior (utilize o raio experimental). Os efeitos relativísticos poderiam ter sido desprezados? Quais outras simplificações podem ter contribuído para essa imprecisão?

Dado: A velocidade de uma partícula relativística se relaciona com seu momentum da seguinte forma:

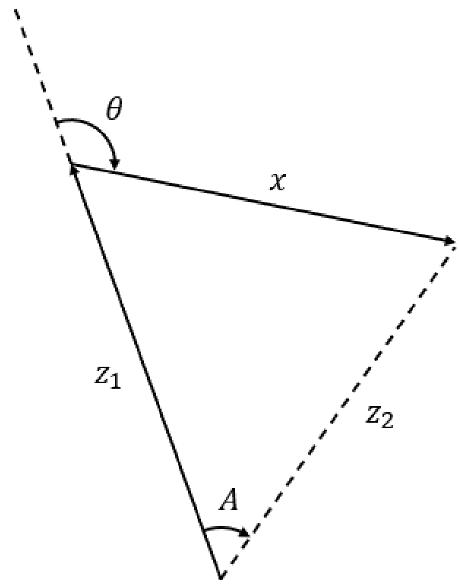
$$p = m_0 \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dado: Velocidade da luz: $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

3. Parte 1: Ferramentário (10 pontos)

Ao longo de seus estudos sobre cartas celestes, você deve ter desenvolvido ferramentas para construções gráficas dentro desses objetos. Nessa primeira parte, exploraremos mais uma: como traçar um círculo máximo a partir de um ponto e uma tangente. Assuma projeção de Ayris.

Considere dois pontos, de distâncias zenitais z_1 e z_2. Vamos definir um sistema de azimute que parte do vertical do primeiro ponto, em direção ao vertical do segundo, de tal modo que o primeiro ponto sempre tenha azimute nulo, e o segundo azimute $0 \leqslant A \leqslant 180°$. Além disso, vamos definir uma medida x, **feita com régua sobre a carta**, que representa a distância física entre as representações dos pontos na carta (assumindo $R = \pi/2\,\mathrm{u}$). Por fim, a medida θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 180$), **feita com transferidor sobre a carta**, representa o ângulo entre dois segmentos orientados: o que liga o zênite à representação do ponto 1, e o que liga as representações dos pontos 1 e 2.



(a) Considere o círculo máximo que passa pelos pontos 1 e 2, em que intervalo se encontra o azimute A_0 do polo visível desse círculo máximo? Com base em sua resposta, avalie A_0 em função da $\tan^{-1}(\tan(A_0))$, e avalie $\cos(A_0)$ em função da $\tan(A_0)$.

(b) Seja z_0 a distância zenital do referido Polo, prove as seguintes igualdades:

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - \cos(A)\tan(z_2)}{\operatorname{sen}(A)\tan(z_2)}$$

$$\cot(z_0) = \frac{\tan(z_1)}{\sqrt{1 + \tan^2(A_0)}}$$

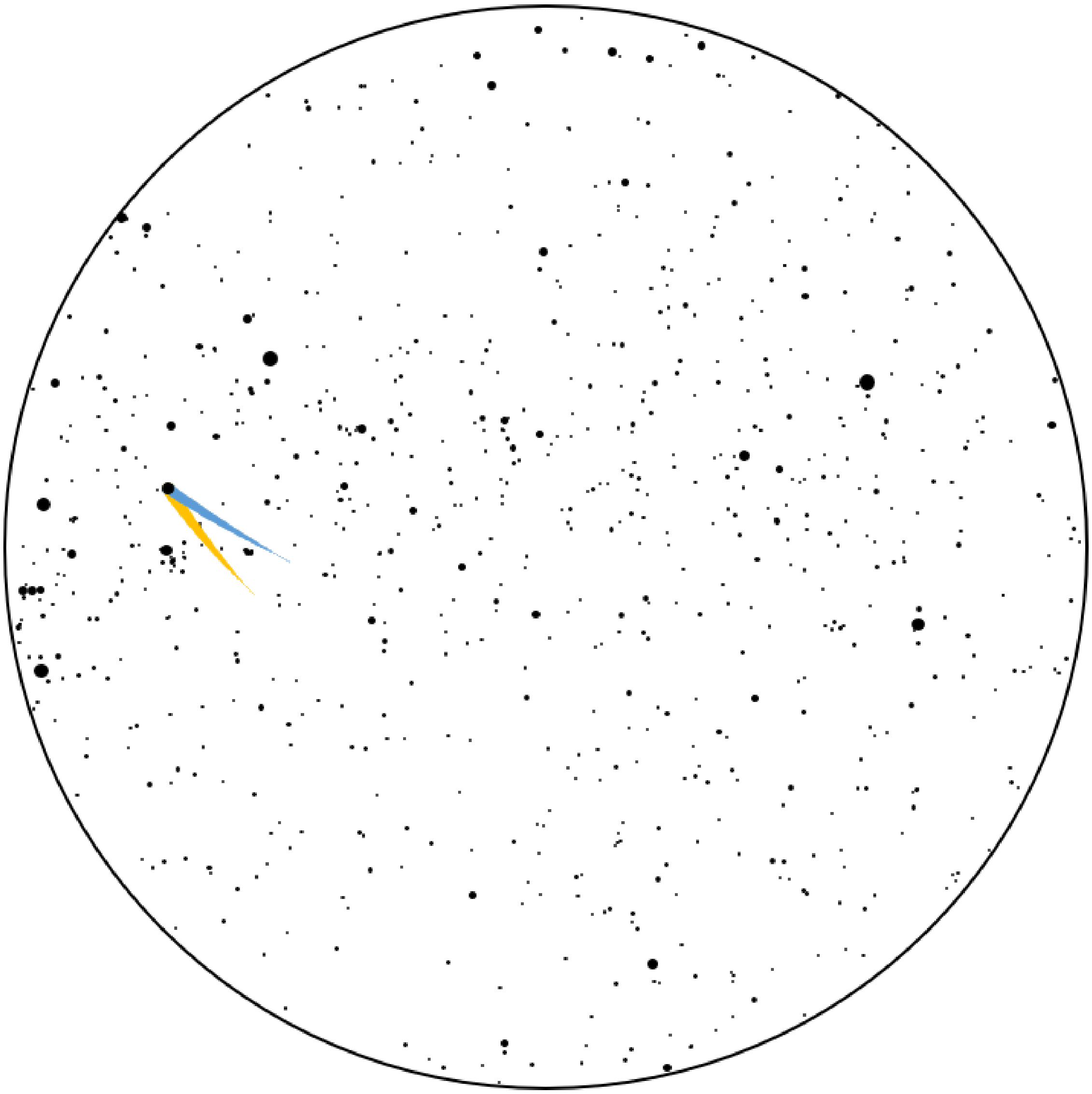
(c) No limite quando x tende a zero, e convertendo z_1 em radianos, prove que essas equações convergem para:

$$\tan(A_0) = \frac{-2 \cdot z_1 \cdot \cot(\theta)}{\operatorname{sen}(2z_1)}$$

$$\cot(z_0) = \frac{2\operatorname{sen}^2(z_1)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2z_1) + 4z_1^2 \cdot \cot^2(\theta)}}$$

Parte 2: Que horas são? (20 pontos)

A seguinte carta celeste mostra um céu hipotético de uma noite com cometa. A cauda do cometa oposta ao Sol está representada em laranja.



(d) Uma forma de encontrar o Polo Norte Eclíptico é prolongar o arco que liga Almach (γ-And) a Navi (γ-Cas) duas vezes na direção de Navi. Na carta, faça esse prolongamento com uma reta, medindo a razão de 2:1 com régua; denomine-o "PNE_1". Depois, faça o mesmo prolongamento utilizando trigonometria esférica; identifique-o por "PNE_2". Marque cada um dos polos com marcação em X.

(e) Na carta, trace a linha da Eclíptica; identifique-a por "ECL".

(f) Se quisermos traçar o círculo máximo que contém a cauda do cometa oposta ao Sol (laranja), com que precisão você consegue medir o ângulo θ? Justifique sua estimativa. A partir dela, encontre uma faixa de valores para A_0 e z_0.

(g) Os valores reais são $A_0 = 249°$ e $z_0 = 53{,}8°$. Na carta, marque com um X esse polo visível, bem como o círculo máximo; identifique-os por "PV"e "CM".

(h) Determine a hora solar verdadeira no momento de observação.