



LISTA 2  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

---

### Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 3 problemas, totalizando 90 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

Prazo: 28/04/2024 -23h 59min

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo ( $\mu_0$ )	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Problemas

1. **Zona convectiva (20 pontos)** Nessa questão, estudaremos um modelo simplificado para o funcionamento de uma zona convectiva no interior estelar. Para isso, a porção de matéria em movimento será tratada como uma bolha de gás ideal submetida a processos adiabáticos, com coeficiente de Poisson  $\gamma$ . Nos próximos itens, o sub-índice "b" se refere à bolha, e "v", à vizinhança.

**Dado:** equação dos gases ideais:

$$P \cdot \mu = \rho \cdot \kappa_B \cdot T$$

Nos itens a seguir, você sempre pode tratar  $\mu$  e  $\kappa_B$  como constantes para deixar suas respostas em função.

- (a) Partindo da primeira lei da termodinâmica, deduza as seguintes expressões, válidas para transformações adiabáticas:

$$P_b \cdot \rho_b^{-\gamma} = P_{b,0} \cdot \rho_{b,0}^{-\gamma}$$

$$P_b \cdot T_b^{\gamma/(1-\gamma)} = P_{b,0} \cdot T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)}$$

- (b) Suponha que a estrela possa ser dividida em cascas esféricas, cada uma com propriedades uniformes ao longo da casca. Determine a taxa de variação da pressão,  $dP_v/dr$ , numa casca de densidade  $\rho_{v,0}$  e aceleração gravitacional  $g$  (em módulo). Considere que  $dr$  é positivo à medida que se afasta do centro.
- (c) Suponha que nossa bolha seja deslocada radialmente de seu lugar origem por um espaço  $dr$ , encontre as variações de temperatura  $dT_b$  e de densidade  $d\rho_b$ , em função de  $\gamma$ ,  $\rho_{v,0}$ ,  $T_{v,0}$ ,  $g$  e  $dr$
- (d) Encontre a taxa de variação da densidade da vizinhança,  $d\rho_v/dr$ , em função de  $\rho_{v,0}$ ,  $T_{v,0}$ ,  $g$  e  $dT_v/dr$ . Assuma apenas que se trata de um gás ideal.
- (e) Encontre a taxa de aceleração da bolha,  $d\ddot{r}/dr$ , em função de  $T_{v,0}$ ,  $g$ ,  $dT_b/dr$  e  $dT_v/dr$ . Considere que as forças atuantes sobre a bolha sejam somente a gravidade e o empuxo. Com base em seu resultado, responda: existe a possibilidade de convexão invertida, isto é, de gás frio subindo e gás quente descendo?

### Solução:

- (a) Da primeira lei da termodinâmica:

$$dU = dQ - dW$$

Podemos substituir a energia interna e o trabalho por suas respectivas expressões. Além disso, como a transformação é adiabática,  $dQ = 0$ :

$$\frac{f}{2} N \kappa_B dT_b = -P_b dV_b$$

$$\frac{f}{2} N \kappa_B dT_b = -\frac{N \kappa_B T_b}{V_b} dV_b$$

$$-\frac{f}{2} \cdot \frac{dT_b}{T_b} = \frac{dV_b}{V_b}$$

$$-\frac{f}{2} \cdot \ln\left(\frac{T_b}{T_{b,0}}\right) = \ln\left(\frac{V_b}{V_{b,0}}\right)$$

Como a massa não se altera, o volume é inversamente proporcional à densidade:

$$-\frac{f}{2} \cdot \ln\left(\frac{T_b}{T_{b,0}}\right) = \ln\left(\frac{\rho_{b,0}}{\rho_b}\right)$$

$$\left(\frac{T_b}{T_{b,0}}\right)^{-f/2} = \left(\frac{\rho_{b,0}}{\rho_b}\right)$$

$$T_b^{-f/2} \cdot \rho_b = T_{b,0}^{-f/2} \cdot \rho_{b,0}$$

Da definição de coeficiente de Poisson:

$$\gamma = 1 + \frac{2}{f}$$

$$-\frac{f}{2} = \frac{1}{1-\gamma}$$

Assim:

$$T_b^{1/(1-\gamma)} \cdot \rho_b = T_{b,0}^{1/(1-\gamma)} \cdot \rho_{b,0}$$

Dessa expressão, finalmente se deriva as duas requisitadas. Para isso, fazemos surgir a variável  $P$  a partir da multiplicação entre  $T$  e  $\rho$ :

$$\left(T_b^{1/(1-\gamma)} \cdot \rho_b^{1/(1-\gamma)}\right) \cdot \rho_b^{1/(\gamma-1)} \cdot \rho_b = \left(T_{b,0}^{1/(1-\gamma)} \cdot \rho_{b,0}^{1/(1-\gamma)}\right) \cdot \rho_{b,0}^{1/(\gamma-1)} \cdot \rho_{b,0}$$

$$P_b^{1/(1-\gamma)} \cdot \rho_b^{\gamma/(\gamma-1)} = P_{b,0}^{1/(1-\gamma)} \cdot \rho_{b,0}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$P_b \cdot \rho_b^{-\gamma} = P_{b,0} \cdot \rho_{b,0}^{-\gamma}$$

Analogamente:

$$T_b^{1/(1-\gamma)} \cdot T_b^{-1} \cdot (T_b \cdot \rho_b) = T_{b,0}^{1/(1-\gamma)} \cdot T_{b,0}^{-1} \cdot (T_{b,0} \cdot \rho_{b,0})$$

$$T_b^{\gamma/(1-\gamma)} \cdot P_b = T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)} \cdot P_{b,0}$$

$$P_b \cdot T_b^{\gamma/(1-\gamma)} = P_{b,0} \cdot T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)}$$

- (b) Considere a casca de espessura  $dr$ . Ela está sob a ação de três forças: a pressão que a casca de baixo exerce, a pressão que a casca de cima exerce, e a gravidade. Pelo equilíbrio de forças:

$$A \cdot P_{v,0} = mg + A \cdot P_v$$

Se  $dr$  for muito pequeno, podemos considerar que a densidade não varia significativamente e que o volume da casca pode ser aproximado para a área vezes a espessura:

$$A \cdot P_{v,0} = A \cdot dr \cdot \rho_{v,0} \cdot g + A \cdot P_v$$

$$P_{v,0} = dr \cdot \rho_{v,0} \cdot g + P_v$$

$$P_v - P_{v,0} = -\rho_{v,0} g dr$$

$$\boxed{\frac{dP_v}{dr} = -\rho_{v,0} g}$$

- (c) Inicialmente, havia equilíbrio, portanto,

$$P_{b,0} = P_{v,0}$$

$$T_{b,0} = T_{v,0}$$

$$\rho_{b,0} = \rho_{v,0}$$

Como estamos desprezando a resistência da bolha à expansão, o fenômeno ocorre até que as pressões interna e externa se igualem:

$$P_b = P_v$$

$$dP_b = dP_v$$

$$dP_b = \frac{dP_v}{dr} \cdot dr$$

$$dP_b = -\rho_{v,0} g \cdot dr$$

A variação de  $P_b$  pode ser relacionada às variações em  $\rho_b$  e  $T_b$  a partir das fórmulas encontradas no primeiro item:

$$(P_{b,0} + dP_b) \cdot (\rho_{b,0} + d\rho_b)^{-\gamma} = P_{b,0} \cdot \rho_{b,0}^{-\gamma}$$

$$P_{b,0} \cdot \left(1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}}\right) \cdot \rho_{b,0}^{-\gamma} \cdot \left(1 + \frac{d\rho_b}{\rho_{b,0}}\right)^{-\gamma} = P_{b,0} \cdot \rho_{b,0}^{-\gamma}$$

$$\left(1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}}\right) \cdot \left(1 + \frac{d\rho_b}{\rho_{b,0}}\right)^{-\gamma} = 1$$

$$\left(1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}}\right) = \left(1 + \frac{d\rho_b}{\rho_{b,0}}\right)^\gamma$$

$$1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}} \approx 1 + \gamma \frac{d\rho_b}{\rho_{b,0}}$$

$$dP_b \approx \gamma \frac{d\rho_b}{\rho_{b,0}} \cdot P_{b,0}$$

$$dP_b \approx \gamma \frac{d\rho_b}{\rho_{v,0}} \cdot P_{v,0}$$

$$dP_b \approx \gamma \frac{d\rho_b}{\rho_{v,0}} \cdot \frac{\rho_{v,0} \kappa_B T_{v,0}}{\mu}$$

$$dP_b \approx \gamma \frac{\kappa_B T_{v,0}}{\mu} d\rho_b$$

Analogamente:

$$(P_{b,0} + dP_b) \cdot (T_{b,0} + dT_b)^{\gamma/(1-\gamma)} = P_{b,0} \cdot T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)}$$

$$P_{b,0} \cdot \left(1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}}\right) \cdot T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)} \cdot \left(1 + \frac{dT_b}{T_{b,0}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = P_{b,0} \cdot T_{b,0}^{\gamma/(1-\gamma)}$$

$$\left(1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}}\right) \cdot \left(1 + \frac{dT_b}{T_{b,0}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 1$$

$$\left(1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}}\right) = \left(1 + \frac{dT_b}{T_{b,0}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$1 + \frac{dP_b}{P_{b,0}} \approx 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{dT_b}{T_{b,0}}$$

$$dP_b \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{dT_b}{T_{b,0}} \cdot P_{b,0}$$

$$dP_b \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{dT_b}{T_{v,0}} \cdot P_{v,0}$$

$$dP_b \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{dT_b}{T_{v,0}} \cdot \frac{\rho_{v,0} \kappa_B T_{v,0}}{\mu}$$

$$dP_b \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\rho_{v,0} \kappa_B}{\mu} dT_b$$

Finalmente, podemos substituir na expressão de  $dP_b$ . Começaremos pela densidade:

$$\gamma \frac{\kappa_B T_{v,0}}{\mu} d\rho_b = -\rho_{v,0} g \cdot dr$$

$$d\rho_b = -\frac{\mu g}{\gamma \kappa_B} \cdot \frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \cdot dr$$

Para a temperatura:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{\rho_{v,0} \kappa_B}{\mu} dT_b = -\rho_{v,0} g \cdot dr$$

$$dT_b = -\frac{(\gamma - 1)\mu g}{\gamma \kappa_B} \cdot dr$$

(d) Da equação das transformações gasosas:

$$\frac{(T_{v,0} + dT_V)(\rho_{v,0} + d\rho_v)}{P_{v,0} + dP_v} = \frac{T_{v,0}\rho_{v,0}}{P_{v,0}}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{dT_V}{T_{v,0}}\right) \left(1 + \frac{d\rho_v}{\rho_{v,0}}\right)}{1 + \frac{dP_v}{P_{v,0}}} = 1$$

$$\left(1 + \frac{dT_V}{T_{v,0}}\right) \left(1 + \frac{d\rho_v}{\rho_{v,0}}\right) = 1 + \frac{dP_v}{P_{v,0}}$$

Desprezando o termo com a multiplicação  $dT_v \cdot d\rho_v$ :

$$\frac{dT_V}{T_{v,0}} + \frac{d\rho_v}{\rho_{v,0}} = \frac{dP_v}{P_{v,0}}$$

$$\frac{dT_V}{T_{v,0}} + \frac{d\rho_v}{\rho_{v,0}} = \frac{\mu dP_v}{\rho_{v,0} \kappa_B T_{v,0}}$$

Substituindo a expressão para  $dP_v$ :

$$\frac{dT_V}{T_{v,0}} + \frac{d\rho_v}{\rho_{v,0}} = -\frac{\mu \rho_{v,0} g dr}{\rho_{v,0} \kappa_B T_{v,0}}$$

$$\frac{d\rho_v}{\rho_{v,0}} = -\frac{dT_V}{T_{v,0}} - \frac{\mu g}{\kappa_B T_{v,0}} dr$$

$$\frac{d\rho_v}{dr} = -\frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \cdot \frac{dT_V}{dr} - \frac{\mu g \rho_{v,0}}{\kappa_B T_{v,0}}$$

(e) Pela segunda lei de Newton:

$$m \cdot d\ddot{r} = \rho_v \cdot V_b \cdot g - mg$$

$$\rho_b \cdot V_b \cdot d\ddot{r} = \rho_v \cdot V_b \cdot g - \rho_b \cdot V_b \cdot g$$

$$\rho_b \cdot d\ddot{r} = \rho_v \cdot g - \rho_b \cdot g$$

$$(\rho_{b,0} + d\rho_b) \cdot d\ddot{r} = (\rho_{v,0} + d\rho_v) \cdot g - (\rho_{b,0} + d\rho_b) \cdot g$$

Aproveitando que os parâmetros são iguais no equilíbrio:

$$(\rho_{v,0} + d\rho_b) \cdot d\ddot{r} = (d\rho_v - d\rho_b) \cdot g$$

Substituindo as expressões para  $d\rho_v$  e  $d\rho_b$ :

$$(\rho_{v,0} + d\rho_b) \cdot d\ddot{r} = \left( -\frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \cdot \frac{dT_v}{dr} - \frac{\mu g \rho_{v,0}}{\kappa_B T_{v,0}} + \frac{\mu g}{\gamma \kappa_B} \cdot \frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \right) \cdot g \cdot dr$$

$$(\rho_{v,0} + d\rho_b) \cdot d\ddot{r} = \left( -\frac{dT_v}{dr} + \frac{\mu g(1 - \gamma)}{\gamma \kappa_B} \right) \cdot \frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \cdot g \cdot dr$$

Utilizando o resultado obtido em itens anteriores:  $dT_b = \mu g(1 - \gamma)/\gamma \kappa_B$

$$(\rho_{v,0} + d\rho_b) \cdot d\ddot{r} = \left( \frac{dT_b}{dr} - \frac{dT_v}{dr} \right) \cdot \frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \cdot g \cdot dr$$

Assumindo  $d\rho_b \ll \rho_{v,0}$ , podemos desprezar esse termo na soma:

$$\rho_{v,0} \cdot d\ddot{r} = \left( \frac{dT_b}{dr} - \frac{dT_v}{dr} \right) \cdot \frac{\rho_{v,0}}{T_{v,0}} \cdot g \cdot dr$$

$$\boxed{\frac{d\ddot{r}}{dr} = \left( \frac{dT_b}{dr} - \frac{dT_v}{dr} \right) \cdot \frac{1}{T_{v,0}} \cdot g}$$

Da equação, avaliamos que, se a bolha se tornar mais quente que o meio,  $dT_b > dT_v$ , a aceleração será positiva, o que indica que a bolha tenderá a subir. Já se a bolha se tornar mais fria que o meio,  $dT_b < dT_v$ , ela tenderá a descer. Caso uma bolha se locomova no sentido contrário a essa tendência, a força será restauradora, caracterizando um equilíbrio estável. Assim, podemos concluir a impossibilidade de uma convecção invertida, a priori.

## 2. Gás de Férmions degenerado (40 pontos)

O estudo dos gases de Férmions degenerados remonta ao início do século XX, quando físicos como Albert Einstein, Wolfgang Pauli e Satyendra Nath Bose desenvolveram as bases teóricas para compreender o comportamento das partículas fundamentais, como elétrons e prótons, em condições extremas de temperatura e densidade. A aplicação desses conceitos tem sido essencial para a compreensão de fenômenos astrofísicos, como o colapso de estrelas em anãs brancas e estrelas de nêutrons. Nessa questão, exploraremos um modelo simplificado para estudar o fenômeno.

**Observação:** Para todos os itens, à exceção do último, desconsidere efeitos relativísticos.

**Observação:** Para todos os itens algébricos, deixe sua resposta em função das variáveis solicitadas e de constantes físicas, a saber, a massa do elétron,  $m_e$ , a massa do próton/nêutron,  $m_p$ , a constante de Planck reduzida,  $\hbar$ , a constante da Gravitação,  $G$ , a constante de Boltzmann,  $k_B$ , e a velocidade da luz,  $c$ .

- (a) Considere um modelo em que um elétron em estado estacionário está preso dentro de um cubo no qual o potencial é nulo. Encontre os possíveis valores de energia do elétron. Deixe sua resposta em função da aresta  $L$  do cubo e de inteiros não-negativos  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$ .

- (b) Suponha agora que haja  $N_e \gg 1$  elétrons dentro do cubo. Pelo princípio da exclusão de Pauli, dois elétrons não podem apresentar o mesmo conjunto de números quânticos ( $N_x, N_y, N_z$  e o número de spin,  $\pm 1/2$ ) simultaneamente. Supondo que o cubo está em seu estado fundamental, determine a máxima energia,  $\varepsilon_F$ , de um elétron no cubo. Deixe sua resposta em função do número atômico médio  $Z$ , do número de massa médio  $A$ , e da densidade,  $\rho$ .
- Dica:** você vai precisar contar a quantidade de soluções naturais de uma inequação. Pense numa analogia geométrica: qual o lugar geométrico dos reais que seguem essa condição? O que as triplas naturais representariam nesse espaço?
- (c) O gás de elétrons é dito degenerado quando a energia térmica média é inferior à energia do primeiro estado não ocupado. Determine a relação entre a temperatura,  $T$ , e a densidade,  $\rho$ , a fim de que haja degeneração. Deixe sua resposta em função do número atômico médio,  $Z$ , e do número de massa médio,  $A$ .
- (d) Considere o seguinte modelo para a pressão de degeneração: os elétrons são tratados como partículas clássicas colidindo elasticamente com as paredes de um recipiente cúbico de aresta  $L$ . A energia média de um elétron é  $3 \cdot \varepsilon_F/5$ . Encontre uma expressão para a pressão de degeneração. Deixe sua resposta em função do número atômico médio,  $Z$ , do número de massa médio,  $A$ , e da densidade,  $\rho$ .
- (e) Estime uma relação entre a massa e o raio de um núcleo degenerado. Para tal, assuma que o núcleo tenha densidade homogênea e que seu **centro** seja sustentado exclusivamente pela pressão de degeneração. Deixe sua resposta em função do número atômico médio,  $Z$ , e do número de massa médio,  $A$ .
- (f) Avalie o raio de uma anã-branca de carbono-oxigênio de uma massa solar. Compare sua resposta com o valor esperado.

**Dados:**

- Massa do elétron:  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg
  - Massa do próton/nêutron:  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg
  - Constante de Planck reduzida:  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J s
  - Constante Gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>
  - Massa solar:  $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg
  - Raio de uma anã-branca de carbono-oxigênio de uma massa solar (valor experimental):  $M_{ab} = 6 \cdot 10^6$  m
- (g) Percebe-se que nosso modelo não prevê um limite de Chandrasekhar. Uma das hipóteses que traçamos foi o regime não-relativístico. Avalie a velocidade associada ao máximo momentum de um elétron no núcleo da estrela do exercício anterior (utilize o raio experimental). Os efeitos relativísticos poderiam ter sido desprezados? Quais outras simplificações podem ter contribuído para essa imprecisão?

**Dado:** A velocidade de uma partícula relativística se relaciona com seu momentum da seguinte forma:

$$p = m_0 \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**Dado:** Velocidade da luz:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m s<sup>-1</sup>

**Solução:**

- (a) Se o elétron está em estado estacionário, então a aresta do cubo deve ser um múltiplo ou semi-múltiplo do comprimento de onda em cada eixo:

$$L = \frac{N_i}{2} \cdot \lambda_i$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{N_i}{2L}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{N_i \cdot \pi}{L}$$

$$\frac{p_i}{\hbar} = \frac{N_i \cdot \pi}{L}$$

$$p_i = \frac{\hbar \cdot N_i \cdot \pi}{L}$$

O momento total é dado por:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{\hbar \cdot N_x \cdot \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\hbar \cdot N_y \cdot \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\hbar \cdot N_z \cdot \pi}{L}\right)^2}$$

$$p = \frac{\hbar \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

Como o potencial é nulo, a energia do elétron será somente a cinética:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2 \cdot m_e}$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m_e \cdot L^2} \cdot (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2)$$

Em que  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  são inteiros positivos.

- (b) Suponha um octante de raio  $R$  inteiro positivo. Para cada ponto de coordenadas inteiras não-negativas contidas nesse sólido, vamos associar ao vértice de um cubo unitário. Conforme  $R$  tende ao infinito, a soma dos volumes dos cubos tende ao volume do octante.

Sabemos que o octante representa todas as triplas  $(x, y, z)$  tais que:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

$$\frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m_e \cdot L^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \leq \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m_e \cdot L^2} \cdot R^2$$

Se  $R^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$ , então a quantidade de triplas  $(x, y, z)$  inteiras e positivas será a quantidade de estados (sem considerar o spin) para os quais  $\varepsilon \leq \varepsilon_F$ . Ainda, a

quantidade dessas triplas é igual à soma dos volumes dos cubos, que por sua vez tende ao volume do octante. Considerando o spin, basta multiplicar o resultado por dois (cada tripla de  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  pode ser ocupada por dois elétrons, um de spin  $+1/2$ , outro de spin  $-1/2$ ).

$$N_e \approx 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot R^3$$

$$N_e \approx \frac{\pi}{3} \cdot (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2)^{3/2}$$

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 \approx \left( \frac{3 \cdot N_e}{\pi} \right)^{2/3}$$

Substituindo na expressão para a energia:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m_e \cdot L^2} \cdot \left( \frac{3 \cdot N_e}{\pi} \right)^{2/3}$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot \left( 3\pi^2 \cdot \frac{N_e}{L^3} \right)^{2/3}$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot (3\pi^2 \cdot n)^{2/3}$$

A densidade numérica de elétrons pode ser escrita como:

$$n = \frac{\text{elétrons}}{\text{núcleos atômicos}} \cdot \frac{\text{núcleos atômicos}}{\text{massa}} \cdot \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

$$n = Z \cdot \frac{1}{A \cdot m_p} \cdot \rho$$

Assim:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot \left( 3\pi^2 \cdot \frac{Z \cdot \rho}{A \cdot m_p} \right)^{2/3}$$

(c) A energia térmica é dada por:

$$\mathbb{T} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$$

Pela condição exposta no enunciado:

$$\mathbb{T} < \varepsilon_F$$

$$\frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T < \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot \left( 3\pi^2 \cdot \frac{Z \cdot \rho}{A \cdot m_p} \right)^{2/3}$$

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{3 \cdot m_e \cdot k_B} \cdot \left( 3\pi^2 \cdot \frac{Z}{A \cdot m_p} \right)^{2/3}$$

- (d) Vamos analisar o movimento de um único elétron no eixo  $i$ . O tempo entre duas colisões sucessivas em uma mesma parede desse eixo (ou seja, entre ir e voltar) é:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot L}{v_i}$$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot m_e \cdot L}{p_i}$$

Se a colisão é elástica, o elétron alcança a parede com momentum  $p_i$  em um sentido, e se afasta com momentum  $p_i$  em sentido oposto. Logo, a transferência de momentum é  $2 \cdot p_i$ :

$$\Delta p = 2 \cdot p_i$$

A força:

$$F' = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F' = \frac{p_i^2}{m_e \cdot L}$$

A pressão:

$$P' = \frac{p_i^2}{m_e \cdot L^3}$$

Essa é a pressão exercida por um elétron. Para encontrar a pressão total, precisamos contabilizar todos os elétrons:

$$P = \frac{p_i^2}{m_e} \cdot \frac{N_e}{L^3}$$

$$P = \frac{p_i^2}{m_e} \cdot n$$

Em média, o momentum em um eixo se relaciona com o momentum total por meio de:

$$p^2 = 3 \cdot p_i^2$$

Assim:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{p^2}{m_e} \cdot n$$

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{p^2}{2 \cdot m_e} \cdot n$$

Em que  $p^2/2m_e$  representa a energia média de uma partícula:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \varepsilon_F \cdot n$$

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot (3\pi^2 \cdot n)^{2/3} \cdot n$$

$$P = \frac{\hbar^2}{5 \cdot m_e} \cdot (3\pi^2)^{2/3} \cdot n^{5/3}$$

$$P = \frac{\hbar^2}{5 \cdot m_e} \cdot (3\pi^2)^{2/3} \cdot \left( \frac{Z}{A} \cdot \frac{\rho}{m_p} \right)^{5/3}$$

(e) Pelo equilíbrio do núcleo:

$$4\pi r^2 \cdot dP = - \frac{G \cdot (4\pi r^3 \cdot \rho/3) \cdot (4\pi r^2 \cdot dr \cdot \rho)}{r^2}$$

$$dP = - \frac{4\pi G}{3} \cdot \rho^2 \cdot r \cdot dr$$

$$\int_{P_0}^0 dP = - \int_0^R \frac{4\pi G}{3} \cdot \rho^2 \cdot r \cdot dr$$

$$P_0 = \frac{2\pi G}{3} \cdot \rho^2 \cdot R^2$$

Conforme hipótese, a pressão no centro é sustentada pela degeneração:

$$\frac{2\pi G}{3} \cdot \rho^2 \cdot R^2 = \frac{\hbar^2}{5 \cdot m_e} \cdot (3\pi^2)^{2/3} \cdot \left( \frac{Z}{A} \cdot \frac{\rho}{m_p} \right)^{5/3}$$

$$\rho^{1/3} \cdot R^2 = \frac{3 \cdot \hbar^2}{10\pi \cdot G \cdot m_e} \cdot (3\pi^2)^{2/3} \cdot \left( \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{m_p} \right)^{5/3}$$

$$\rho \cdot R^6 = \frac{27 \cdot \hbar^6}{1000 \cdot \pi^3 \cdot G^3 \cdot m_e^3} \cdot (9\pi^4) \cdot \left( \frac{Z^5}{A^5} \cdot \frac{1}{m_p^5} \right)$$

$$\rho \cdot R^6 = \frac{243 \cdot \hbar^6 \cdot \pi \cdot Z^5}{1000 \cdot G^3 \cdot m_e^3 \cdot m_p^5 \cdot A^5}$$

$$\frac{M}{4\pi \cdot R^3/3} \cdot R^6 = \frac{243 \cdot \hbar^6 \cdot \pi \cdot Z^5}{1000 \cdot G^3 \cdot m_e^3 \cdot m_p^5 \cdot A^5}$$

$$M \cdot R^3 = \frac{81 \cdot \hbar^6 \cdot \pi^2 \cdot Z^5}{250 \cdot G^3 \cdot m_e^3 \cdot m_p^5 \cdot A^5}$$

(f) Tanto para o carbono quanto para o oxigênio, temos  $Z/A = 1/2$ . Assim:

$$M \cdot R^3 = \frac{81 \cdot \hbar^6 \cdot \pi^2}{250 \cdot G^3 \cdot m_e^3 \cdot m_p^5 \cdot 2^5}$$

Substituindo valores:

$$R = 3 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Nossa estimativa, portanto, é metade do valor esperado.

(g) Sabemos que:

$$p = m_e \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p^2 = m_e^2 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$p^2 - \frac{p^2}{c^2} \cdot v^2 = m_e^2 \cdot v^2$$

$$\left(\frac{p^2}{c^2} + m_e^2\right) \cdot v^2 = p^2$$

$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_e^2 \cdot c^2}} \cdot c$$

Para encontrar  $p$ , recorreremos às equações vistas no item b):

$$p = \frac{\hbar \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

Em que:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 \approx \left(\frac{3 \cdot N_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

Assim:

$$p = \frac{\hbar \cdot \pi}{L} \cdot \left(\frac{3 \cdot N_e}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$p = \hbar \cdot \left(3 \cdot \frac{N_e}{L^3} \cdot \pi^2\right)^{1/3}$$

$$p = \hbar \cdot \left(3 \cdot \frac{Z \cdot \rho}{A \cdot m_p} \cdot \pi^2\right)^{1/3}$$

$$p = \hbar \cdot \left(3 \cdot \frac{Z}{A \cdot m_p} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \pi^2\right)^{1/3}$$

$$p = \frac{\hbar}{R} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot \pi \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{M}{m_p}\right)^{1/3}$$

Substituindo:

$$p = 2,8 \cdot 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$$

O que implica:

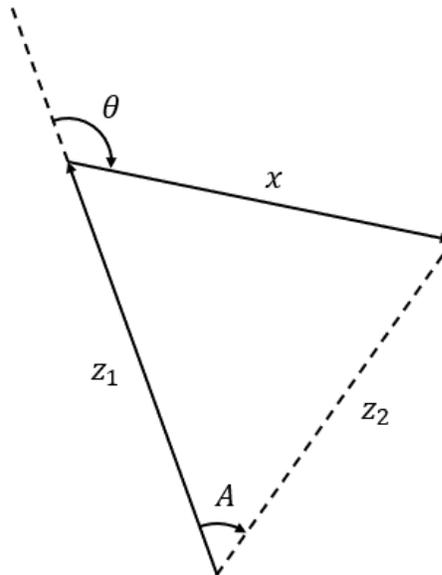
$$v = 0,7 \cdot c$$

Sendo assim, os efeitos relativísticos não poderiam ter sido desprezados. Outros fatores de erro que valem ser citados são o desprezo das interações elétron-elétron e elétron-núcleo, bem como a consideração de densidade homogênea.

**3. Parte 1: Ferramentário** (10 pontos)

Ao longo de seus estudos sobre cartas celestes, você deve ter desenvolvido ferramentas para construções gráficas dentro desses objetos. Nessa primeira parte, exploraremos mais uma: como traçar um círculo máximo a partir de um ponto e uma tangente. Assuma projeção de Ayrís.

Considere dois pontos, de distâncias zenitais  $z_1$  e  $z_2$ . Vamos definir um sistema de azimute que parte do vertical do primeiro ponto, em direção ao vertical do segundo, de tal modo que o primeiro ponto sempre tenha azimute nulo, e o segundo azimute  $0 \leq A \leq 180^\circ$ . Além disso, vamos definir uma medida  $x$ , **feita com régua sobre a carta**, que representa a distância física entre as representações dos pontos na carta (assumindo  $R = \pi/2$  u). Por fim, a medida  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 180$ ), **feita com transferidor sobre a carta**, representa o ângulo entre dois segmentos orientados: o que liga o zênite à representação do ponto 1, e o que liga as representações dos pontos 1 e 2.



- (a) Considere o círculo máximo que passa pelos pontos 1 e 2, em que intervalo se encontra o azimute  $A_0$  do polo visível desse círculo máximo? Com base em sua resposta, avalie  $A_0$  em função da  $\tan^{-1}(\tan(A_0))$ , e avalie  $\cos(A_0)$  em função da  $\tan(A_0)$ .
- (b) Seja  $z_0$  a distância zenital do referido Polo, prove as seguintes igualdades:

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - \cos(A) \tan(z_2)}{\text{sen}(A) \tan(z_2)}$$

$$\cot(z_0) = \frac{\tan(z_1)}{\sqrt{1 + \tan^2(A_0)}}$$

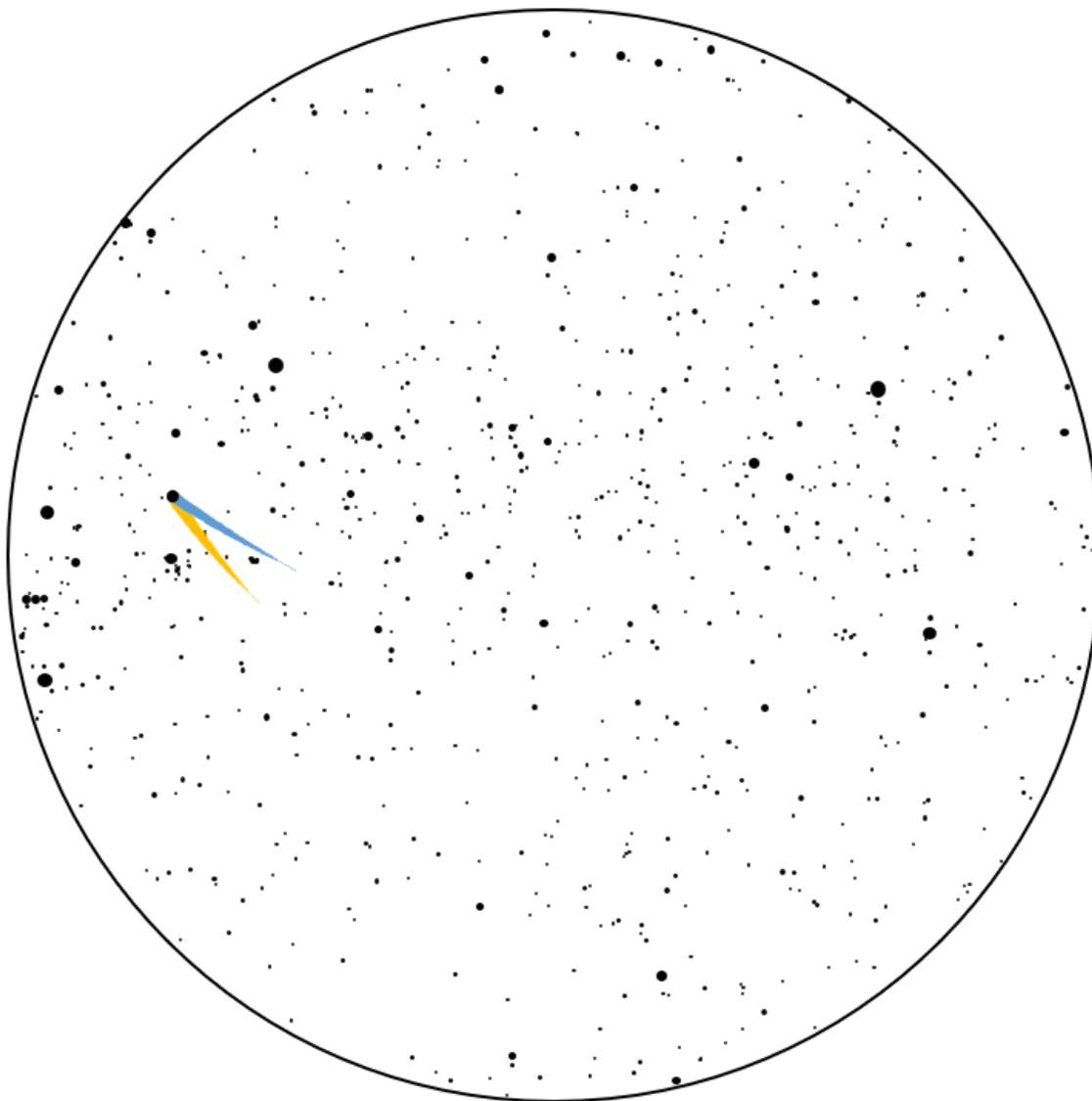
- (c) No limite quando  $x$  tende a zero, e convertendo  $z_1$  em radianos, prove que essas equações convergem para:

$$\tan(A_0) = \frac{-2 \cdot z_1 \cdot \cot(\theta)}{\text{sen}(2z_1)}$$

$$\cot(z_0) = \frac{2\text{sen}^2(z_1)}{\sqrt{\text{sen}^2(2z_1) + 4z_1^2 \cdot \cot^2(\theta)}}$$

**Parte 2: Que horas são?** (20 pontos)

A seguinte carta celeste mostra um céu hipotético de uma noite com cometa. A cauda do cometa oposta ao Sol está representada em laranja.



- (d) Uma forma de encontrar o Polo Norte Eclíptico é prolongar o arco que liga Almach ( $\gamma$ -And) a Navi ( $\gamma$ -Cas) duas vezes na direção de Navi. Na carta, faça esse prolongamento com uma reta, medindo a razão de 2:1 com régua; denomine-o "PNE<sub>1</sub>". Depois, faça o mesmo prolongamento utilizando trigonometria esférica; identifique-o por "PNE<sub>2</sub>". Marque cada um dos polos com marcação em X.
- (e) Na carta, trace a linha da Eclíptica; identifique-a por "ECL".
- (f) Se quisermos traçar o círculo máximo que contém a cauda do cometa oposta ao Sol (laranja), com que precisão você consegue medir o ângulo  $\theta$ ? Justifique sua estimativa. A partir dela, encontre uma faixa de valores para  $A_0$  e  $z_0$ .
- (g) Os valores reais são  $A_0 = 249^\circ$  e  $z_0 = 53,8^\circ$ . Na carta, marque com um X esse polo visível, bem como o círculo máximo; identifique-os por "PV" e "CM".
- (h) Determine a hora solar verdadeira no momento de observação.

**Solução:**

- (a) O círculo máximo conecta pontos opostos do horizonte. O polo está no meridiano zenital perpendicular. Podemos pensar que os limites extremos ocorrem quando os pontos a se conectar estiverem próximos ao limite do horizonte, nesse caso:

$$\frac{\pi}{2} < A_0 \leq \frac{3\pi}{2}$$

Em que  $A_0 = \pi/2$  corresponde a percorrer o azimute no sentido mais próximo do polo, e  $A_0 = 3\pi/2$ , percorrer no sentido mais distante, sendo necessário ultrapassar todo o círculo máximo (metade da carta), além do ângulo reto. Assim:

$$A_0 = \pi + \tan^{-1}(\tan(A_0))$$

$$\cos(A_0) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(A_0)}}$$

- (b) Sabemos que a distância angular entre o Polo e qualquer ponto do círculo máximo é  $90^\circ$ . Pela lei dos cossenos:

$$\cos 90^\circ = \cos(z_1) \cos(z_0) + \sin(z_1) \sin(z_0) \cos(A_0)$$

$$\cos 90^\circ = \cos(z_2) \cos(z_0) + \sin(z_2) \sin(z_0) \cos(A_0 - A)$$

A primeira equação, desenvolvemos:

$$0 = \cos(z_1) \cos(z_0) + \sin(z_1) \sin(z_0) \cos(A_0)$$

$$-\cot(z_1) \cot(z_0) = \cos(A_0)$$

$$\cot(z_1) = -\tan(z_0) \cos(A_0)$$

$$\cot(z_1) = \frac{\tan(z_0)}{\sqrt{1 + \tan^2(A_0)}}$$

Ainda, podemos trabalhar com aquele par de equações:

$$\frac{-\cos(z_2) \cos(z_0)}{-\cos(z_1) \cos(z_0)} = \frac{\sin(z_2) \sin(z_0) \cos(A_0 - A)}{\sin(z_1) \sin(z_0) \cos(A_0)}$$

$$\frac{\cos(z_2)}{\cos(z_1)} = \frac{\sin(z_2) \cos(A_0 - A)}{\sin(z_1) \cos(A_0)}$$

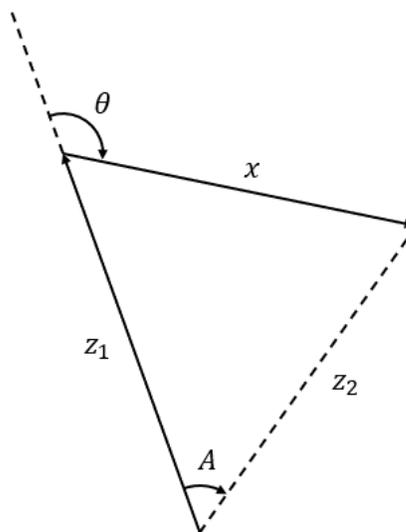
$$\frac{\cot(z_2)}{\cot(z_1)} = \frac{\cos(A_0 - A)}{\cos(A_0)}$$

$$\frac{\tan(z_1)}{\tan(z_2)} = \frac{\cos(A_0) \cos(A) + \sin(A_0) \sin(A)}{\cos(A_0)}$$

$$\frac{\tan(z_1)}{\tan(z_2)} = \cos(A) + \tan(A_0)\text{sen}(A)$$

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - \cos(A) \tan(z_2)}{\text{sen}(A) \tan(z_2)}$$

- (c) Como o raio da carta foi convencionado em  $\pi/2$ , as medidas de um comprimento  $l_1$  que liga o vértice ao ponto 1 é igual à distância zenital  $z_1$ . Vamos relembra a figura:



Lei dos cossenos:

$$z_2^2 = z_1^2 + dx^2 - 2z_1 dx \cos(\pi - \theta)$$

$$(z_2^2 - z_1^2) = dx^2 + 2z_1 dx \cos(\theta)$$

$$(z_2 + z_1)(z_2 - z_1) = dx [dx + 2z_1 \cos(\theta)]$$

Seja  $dz = z_2 - z_1$ :

$$(2z_1 + dz)dz = dx [dx + 2z_1 \cos(\theta)]$$

Desprezando  $dz$  e  $dx$  na comparação com termos que não são arbitrariamente baixos:

$$2z_1 dz = 2z_1 dx \cos(\theta)$$

$$dz = \cos(\theta) dx$$

Agora, aplicando lei dos senos no triângulo:

$$\frac{dx}{dA} = \frac{z_1 + dz}{\text{sen}(\pi - \theta)}$$

Desprezando  $dz$  na comparação com  $z_1$ :

$$dA = \frac{\text{sen}(\theta)}{z_1} dx$$

Agora podemos substituir:

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - \cos(dA) \tan(z_1 + dz)}{\text{sen}(dA) \tan(z_1 + dz)}$$

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - \frac{\tan(z_1) + dz}{1 - \tan(z_1)dz}}{dA \tan(z_1)}$$

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - (\tan(z_1) + dz)(1 + \tan(z_1)dz)}{dA \tan(z_1)}$$

$$\tan(A_0) = \frac{\tan(z_1) - (\tan(z_1) + dz + \tan^2(z_1)dz)}{dA \tan(z_1)}$$

$$\tan(A_0) = \frac{-dz(1 + \tan^2(z_1))}{dA \tan(z_1)}$$

$$\tan(A_0) = \frac{-2dz}{dA \text{sen}(2z_1)}$$

Substituindo  $dz$  e  $dA$ :

$$\tan(A_0) = \frac{-2z_1 \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta) \text{sen}(2z_1)}$$

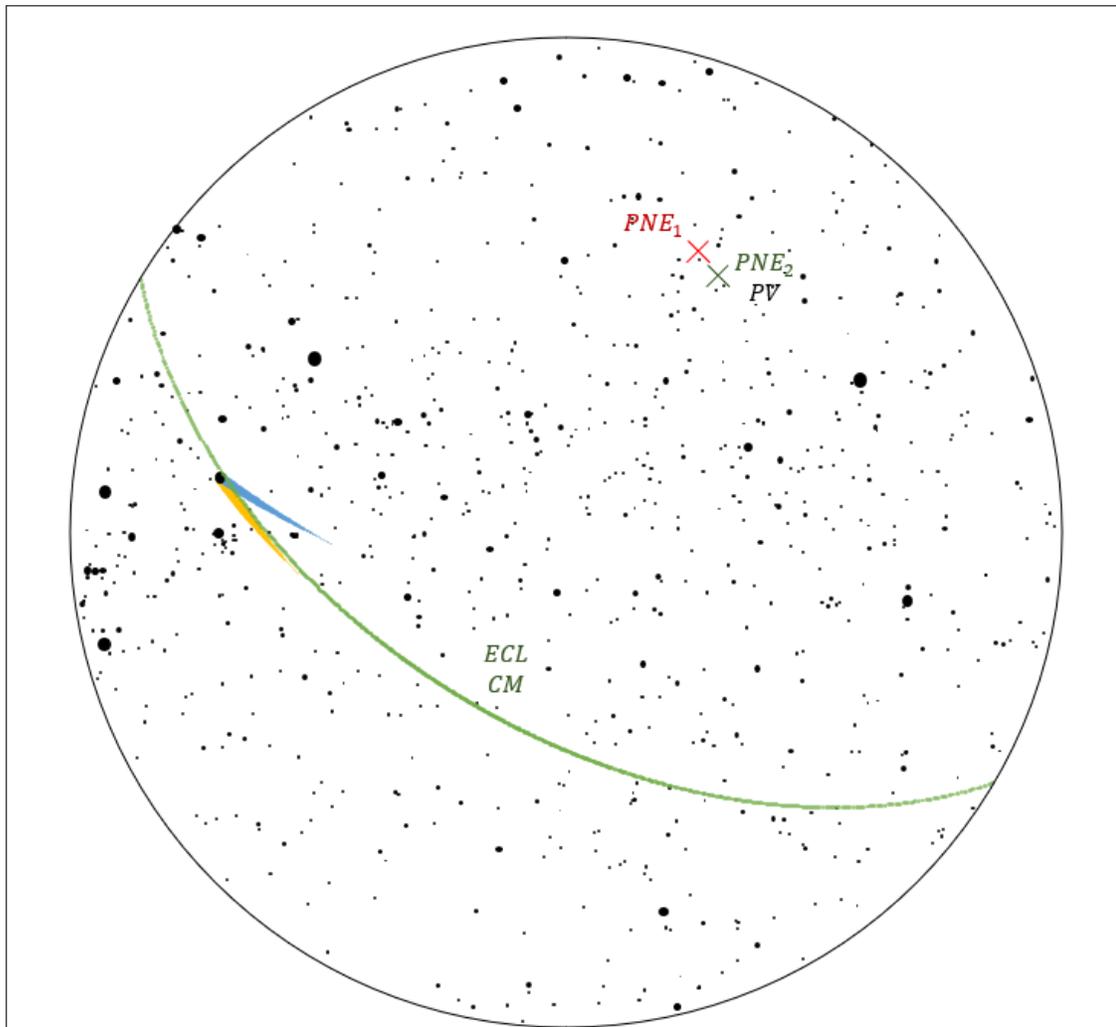
$$\tan(A_0) = \frac{-2 \cdot z_1 \cdot \cot(\theta)}{\text{sen}(2z_1)}$$

Substituindo na expressão para  $z_0$ :

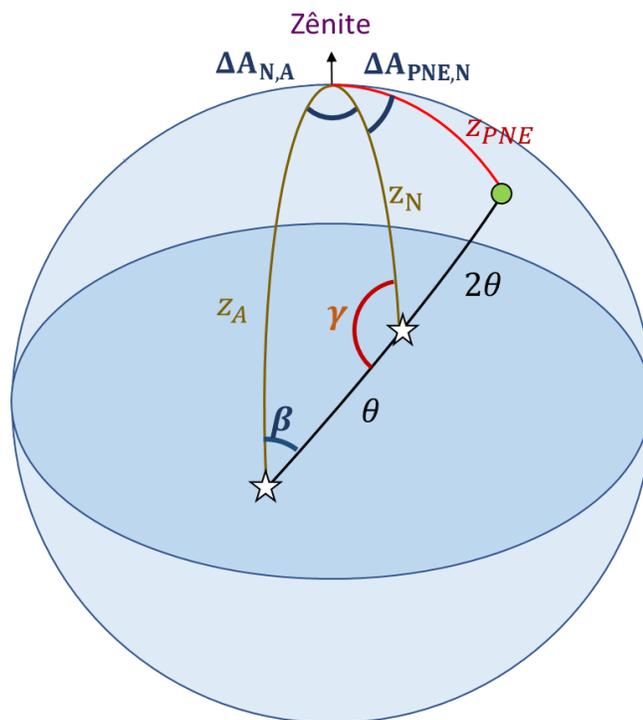
$$\cot(z_0) = \frac{\tan(z_1)}{\sqrt{1 + \tan^2(A_0)}}$$

$$\cot(z_0) = \frac{\text{sen}(2z_1) \tan(z_1)}{\sqrt{\text{sen}^2(2z_1) + 4 \cdot z_1^2 \cdot \cot^2(\theta)}}$$

$$\cot(z_0) = \frac{2\text{sen}^2(z_1)}{\sqrt{\text{sen}^2(2z_1) + 4z_1^2 \cdot \cot^2(\theta)}}$$



(d) A marcação com reta está sendo mostrada. Para a marcação com trigonometria esférica, precisamos utilizar o seguinte triângulo:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(\theta) = \text{sen}(z_N)\text{sen}(z_A) + \cos(z_N)\cos(z_A)\cos(\Delta A_{N,A})$$

Como  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ , a função arcocosseno é suficiente para descrevê-lo:

$$\theta = 21^\circ$$

Pela lei das cotangentes:

$$\cos(z_N)\cos(\Delta A_{N,A}) = \text{sen}(z_N)\cot(z_A) - \text{sen}(\Delta A_{N,A})\cot(\gamma)$$

Como  $0 \leq \gamma \leq 180^\circ$ , a função arcocotangente é suficiente para descrevê-lo:

$$\gamma = 66^\circ$$

Novamente por lei dos cossenos:

$$\cos(z_{PNE}) = \cos(z_N)\cos(2\theta) + \text{sen}(z_N)\text{sen}(2\theta)\cos(180^\circ - \gamma)$$

A função arcocosseno é novamente suficiente para descrever o ângulo, dado que  $0 \leq z_{PNE} \leq 180^\circ$

$$z_{PNE} = 54,3^\circ$$

Novamente por lei das cotangentes:

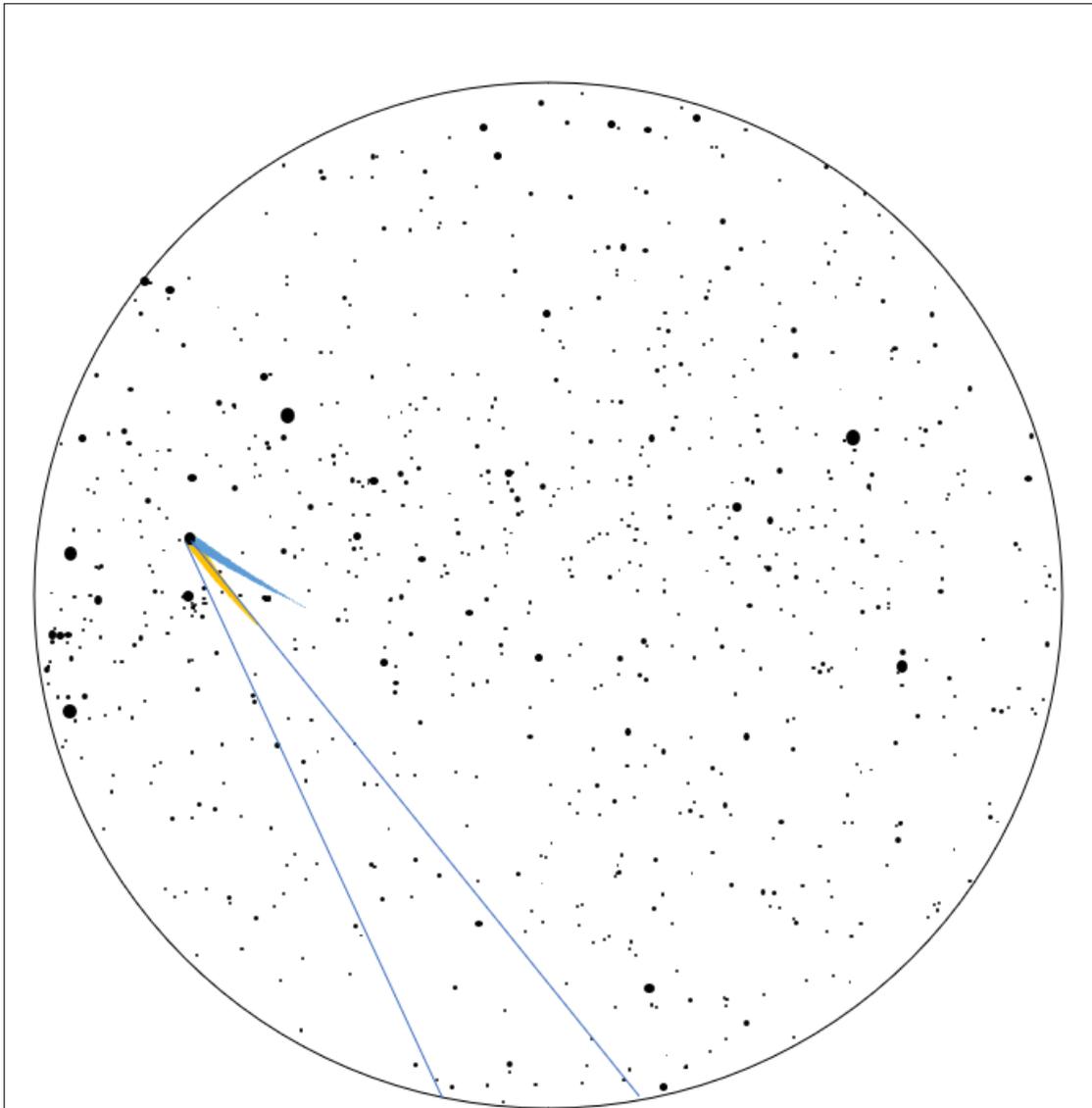
$$\cos(z_N) \cos(180^\circ - \gamma) = \sin(z_N) \cot(2\theta) - \sin(180^\circ - \gamma) \cot(\Delta A_{PNE,N})$$

Graficamente, já podemos descobrir que o ângulo  $\Delta A_{PNE,N}$  será menor que  $180^\circ$ , pois o Polo Norte Eclíptico está na constelação do Dragão, que está contida numa diferença de azimute (partindo de Navi em sentido oposto a Almach) menor que  $180^\circ$ .

Outra forma de observar isso seria afirmar que o seno de  $z_N$ ,  $2\theta$  e  $180^\circ - \gamma$  são todos positivos. Logo, por lei dos senos, o seno de  $\Delta A_{PNE,N}$  também será.

$$\Delta A_{PNE,N} = 48,9^\circ$$

- (e) A Eclíptica está traçada na carta. Para isso, basta observar que ela tem como Polo o ponto  $PNE_2$ . Ou seja, seu cruzamento com o horizonte é perpendicular ao vertical desse Polo, e sua máxima aproximação dista um raio (projeção de Ayris) do mesmo. Outros pontos da Eclíptica podem ser obtidos forçando o ângulo de  $90^\circ$  entre a Eclíptica e o Polo Norte Celeste.
- (f) Existem muitos critérios para os quais se pode estimar uma tangente. Por exemplo, considere a reta que liga o centro do cometa ao final da cauda, bem como aquela que é levemente mais aberta que a parte externa da representação da cauda do cometa. Ambas as retas são secantes ao círculo máximo, mas entre elas está a tangente. Sendo assim, podemos estabelecer:



O maior objetivo desse item é mostrar a imprecisão da medida, e seu efeito no resultado final. Portanto, qualquer heurística válida para conter a reta tangente com uma precisão razoável deve ser avaliada como correta.

Na abordagem que fizemos,

$$124^\circ < \theta < 138^\circ$$

Dessa afirmação, deduzimos:

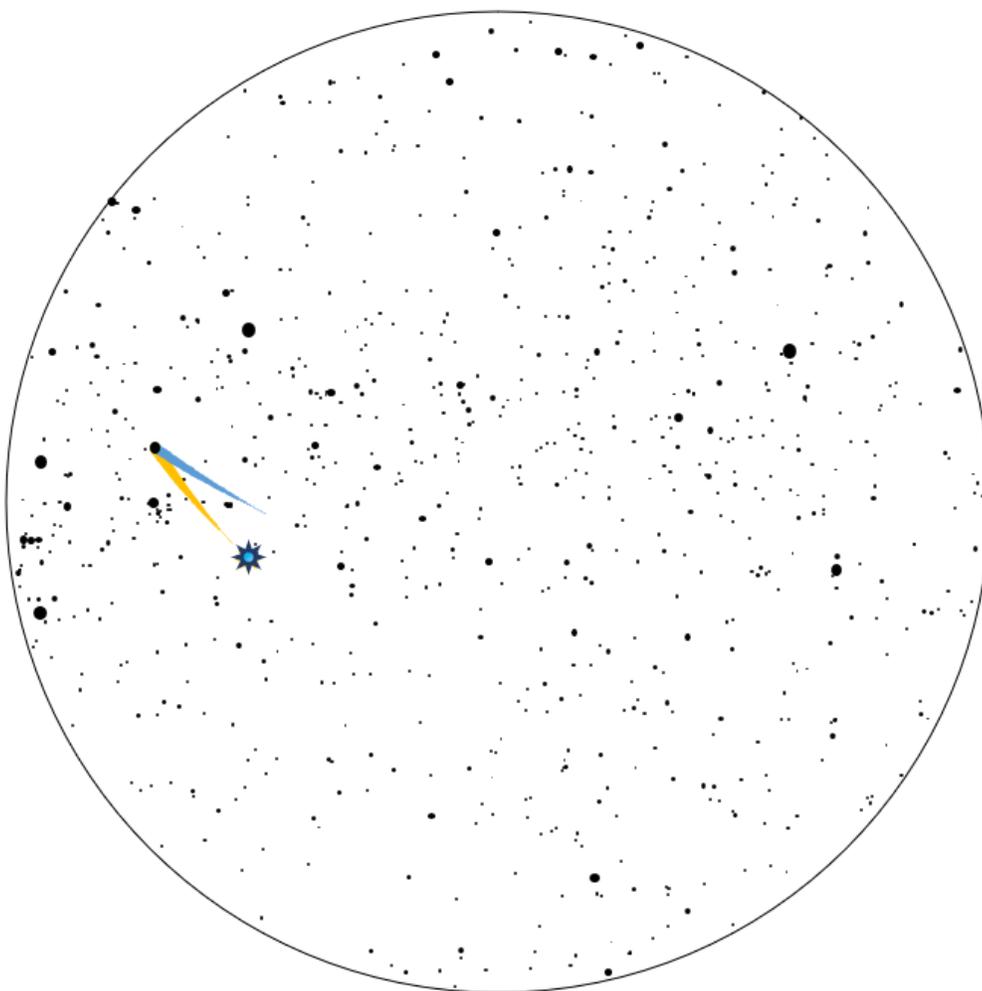
$$242^\circ < A_0 < 252^\circ$$

$$46^\circ < z_0 < 58^\circ$$

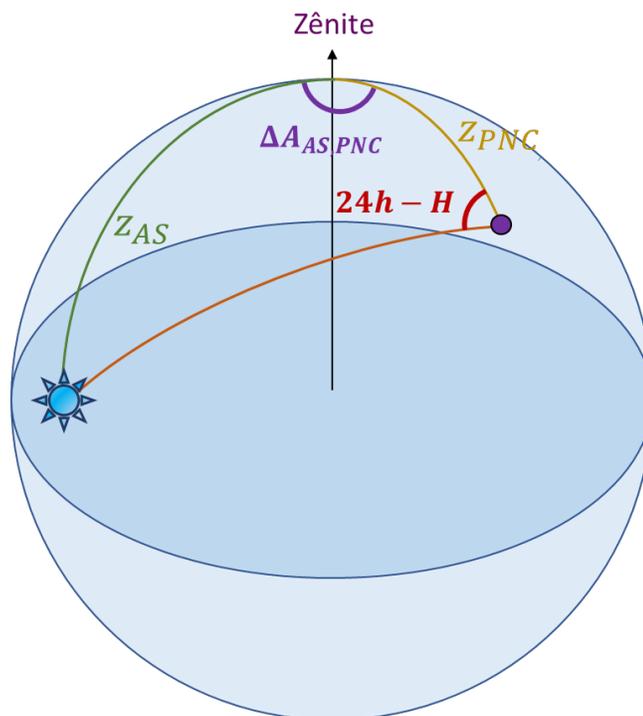
(g) Ao marcarmos o ponto PV, percebemos que ele coincide com o PNE<sub>2</sub>. Assim, o círculo CV coincide com a Eclíptica. As marcações se encontram na Carta logo antes do item (d).

(h) O intuito desse item é comparar a diferença entre as marcações de PNE<sub>1</sub> e PNE<sub>2</sub>.

Perceba que o ponto anti-solar dista  $90^\circ$  do Polo Norte Eclíptico (o Sol está sobre a Eclíptica), bem como  $90^\circ$  de PV (o Sol é coplanar à cauda iônica do cometa). Sendo assim, o Sol é um dos polos do círculo máximo que conecta aqueles dois pontos: PNE e PV. Desse modo, podemos aplicar as equações desenvolvidas no item (b) para encontrar o ponto anti-solar (AS).



Assumindo Polaris como Polo Norte, calculamos o ângulo horário:



$$\cos(z_{PNC}) \cos(\Delta A_{AS,PNC}) = \sin(z_{PNC}) \cot(z_{AS}) - \sin(\Delta A_{AS,PNC}) \cot(24h - H_{AS})$$

Graficamente (ou pelo argumento de que  $\sin(\Delta A_{AS,PNC}) > 0$ ), percebemos que a função arcocotangente é suficiente para descrever o ângulo horário:

$$H_{AS} = 20h40min$$

O ângulo horário do ponto anti-solar é o tempo solar verdadeiro:

$$t = 20h40min$$

Já para  $PNE_2$ , como coincide com PV, o ângulo horário solar é indeterminado!

Como o comando da questão não ficou tão claro, deixando a intuir que a resposta seria um ângulo horário bem determinado a partir de  $PNE_2$ , o item não será pontuado. Provavelmente, o problema teria sido melhor aproveitado com uma imagem na qual PV coincidisse com  $PNE_1$ .