



LISTA 3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, totalizando 50 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

Prazo: 04/05/2024 -23h 59min

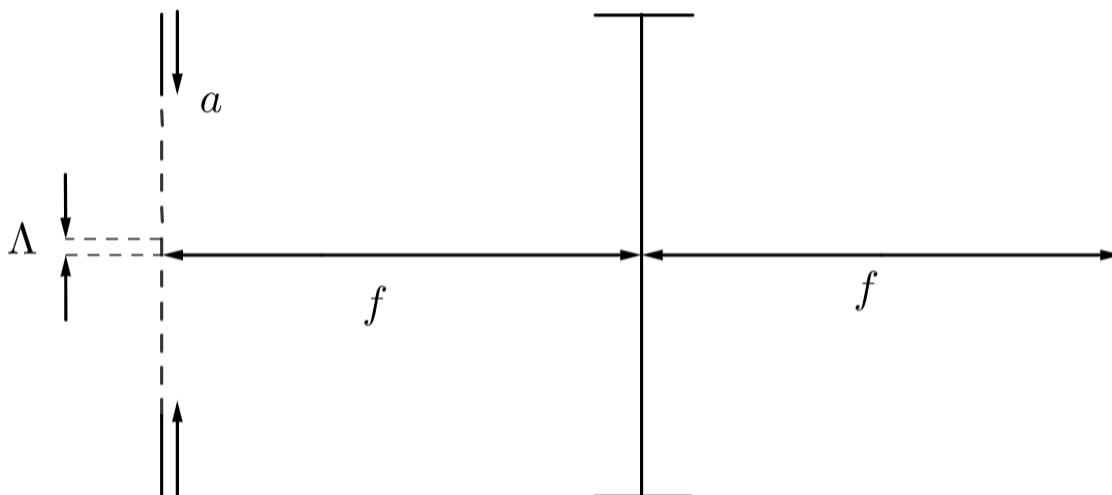
Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. Espectrômetro Estelar (5 pontos)

A figura abaixo mostra o diagrama esquemático de um espectrômetro estelar simples. Ele consiste em uma grade de amplitude sinusoidal com período Λ e tamanho lateral (abertura) a , seguida por uma lente de distância focal f e abertura suficientemente grande. Para analisar esse espectrômetro, vamos assumir que ele é iluminado pela esquerda por ondas de cores diferentes de uma estrela. Paulinho, em seu observatório no Massachusetts Institute of Technology, percebeu que, considerando duas ondas de comprimento λ e $\lambda + \Delta\lambda$, onde $|\Delta\lambda|$ é muito menor que λ , a difração delas pela grade gera ângulos ligeiramente diferentes. Com isso, Paulinho se questionou como produzir dois pontos brilhantes adjacentes, porém suficientemente bem separados, para cada uma das cores espectrais emitidas pela estrela. Considere que as ondas estão sobre o eixo do sistema.



- Com base no que foi visto, determine a abertura mínima da lente para que ela não prejudique o funcionamento do espectrômetro. Deixe sua resposta em função de a , λ , Λ e f .
- Demonstre que, para esse sistema, a condição para os dois pontos de cores diferentes estarem "suficientemente bem" separados é:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < \frac{a}{\Lambda}$$

Por fim, comente sobre o resultado apresentado e sobre o perfil do espectro formado pela estrela nesse espectrômetro.

2. Interior Estelar (10 pontos)

Nessa questão, analisaremos a evolução de uma estrela que possui uma densidade de massa $\rho(r)$ que só depende da distância radial r até o seu centro. Suponha que a estrela de nosso problema possua energia interna U devido ao movimento das partículas que a compõem e energia potencial gravitacional Ω . Ao longo dos itens, caso não indicado o contrário, adote que a estrela possui massa total M e raio R .

- Escreva uma expressão para Ω na forma de integral. Deixe sua resposta em termos da constante gravitacional G , da distância r ao centro da estrela, da massa M_r contida dentro de uma casca esférica de raio r e da massa total da estrela, M .
- Seja $P(r)$ a pressão a uma distância r do centro da estrela. Demonstre que

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho$$

- (c) Assumindo que a pressão na superfície da estrela seja nula, prove que Ω pode ser escrito na seguinte forma:

$$\Omega = -3 \int_0^{V(R)} P dV$$

Onde $V(r)$ é o volume contido dentro de uma casca esférica de raio r .

- (d) Suponha agora que a estrela é composta por um gás ideal. Mostre que a seguinte relação é válida:

$$P = \rho u(\gamma - 1)$$

Onde γ é o coeficiente adiabático do gás e u é a energia interna por unidade de massa do gás.

- (e) Use seus resultados dos itens anteriores para provar que existe a seguinte relação entre a energia interna e a energia potencial gravitacional de uma estrela composta por um gás ideal:

$$\Omega = -3(\gamma - 1)U$$

- (f) Encontre uma expressão para a energia total E da estrela em função de γ e Ω .
- (g) A partir do item anterior, encontre o valor mínimo γ_{min} de γ para que a estrela se mantenha gravitacionalmente ligada.
- (h) Estime o tempo de vida de uma estrela com massa M_{\odot} uniformemente distribuída, raio R_{\odot} e luminosidade L_{\odot} , sabendo que ela é composta por um gás ideal com $\gamma = 5/3$.

3. Aprendendo Cosmologia (15 pontos)

Leia: o livro da Profa. Barbara Ryden capítulos 1-5 e/ou a apostila do Prof. Gastão Neto seções 2.7, 2.7.1, 2.7.2, 2.8 e 2.9 (Aceite os resultados que vierem da Relatividade Geral).

Neste problema, estudaremos a equação de Friedmann, e com ela, também aprenderemos sobre a história da composição do universo e um pouco de cosmografia, ou seja, a medição de estruturas em grande escala no universo.

Entre si, cosmólogos raramente falam da história do universo usando segundos, anos, parsecs ou campos de futebol. Quando eles falam para o grande público eles traduzem para unidades conhecidas! Na verdade, no dia a dia, eles tratam da história do universo, da distância de um objeto e a idade desse objeto usando redshift.

O motivo disso é que tudo que nós podemos observar um objeto em um dado momento é a sua luz, que quando decomposta em um espectro, nos informa o seu redshift. Veremos que, para obter medidas como distância e tempo, precisamos de um modelo cosmológico. Esse modelo é um *modelo*, e não é necessariamente a realidade.

No entanto, ao melhor do nosso entendimento, o modelo Λ CDM descreve bem o nosso universo. Ele nos diz que o universo é formado de aproximadamente por 68% de energia escura e por 32% de matéria (escura e bariônica) e 10^{-4} de radiação. A medição de curvatura tem 0 dentro da sua incerteza. Por isso, desconsideraremos qualquer contribuição de uma geometria não-euclidiana nesse problema. (Obs.: geometria euclidiana é a que você aprendeu na escola!)

O redshift também é conveniente por se relacionar com o fator de escala de maneira simples: $z + 1 = a^{-1}$. Aqui, fixamos $a_0 = 1$, o que será válido neste problema inteiro.

Para os itens (e) e (g), você vai precisar de uma ferramenta de computação numérica onde você possa obter o valor de integrais não calculáveis analiticamente, como Desmos, ou como *Mathematica* ou uma biblioteca/módulo de Python como *Astropy* ou *Scipy*. Nos envie um "print" da sua tela com o seu código/equações/etc.

Sem mais delongas, começemos o problema!

(a) **Lei de Hubble**

Suponha um universo homogêneo e isotrópico em expansão, de tal modo que seu estado em qualquer tempo t seja descrito por um fator de escala $a(t)$, tal que se temos duas galáxias sem velocidade peculiar, que distam r_0 uma da outra, temos que a função que descreve a distância entre elas é $r(t) = a(t)r_0$. A partir disso, **derive** a lei de Hubble:

$$v(t) = H(t)r(t).$$

Mostre que ela é válida para quaisquer galáxias no universo (não importa onde estejam nem a direção entre elas).

(b) **Um plano para o futuro!**

Suponha um universo de geometria euclidiana ("plano") composto apenas de matéria não-relativística, radiação e energia escura. A partir da seguinte forma para a equação de Friedmann:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)$$

derive a seguinte:

$$H(z) = H_0 E(z),$$

onde $E(z) = \sqrt{\Omega_{0,m}(1+z)^3 + \Omega_{0,r}(1+z)^4 + \Omega_{0,\Lambda}}$.

(c) **Igualdade**

Calcule o redshift $z_{m,r}$ no qual houve uma proporção igual de matéria e de radiação, e **também calcule** o redshift $z_{m,\Lambda}$ no qual houve uma proporção igual de matéria e de energia escura. Use o resultado do item (b) e **estime** $H(z_{m,\Lambda})$ e $H(z_{m,r})$. Use $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

(d) **Que seja infinito enquanto dure!**

Definimos o tempo conforme como $d\eta = dt/a(t)$. Ele é simplesmente uma mudança de coordenadas, mas nos permite obter *insights* interessantes.

Imagine que parássemos a expansão do universo agora e lançássemos um fóton até um espelho no limite do universo observável no momento da emissão (note que o limite do universo observável ainda vai crescer). o tempo que mediríamos para que o fóton voltasse seria duas vezes o tempo conforme. Você pode pensar também que a distância que esse fóton percorreu até voltar é duas vezes a distância comóvel. A distância própria seria simplesmente esse tempo ou distância medida em outro momento (imagine que somos astrônomos na primeira era do gelo, ~ 2 bilhões de anos atrás, ou que somos astrônomos num futuro distante, já colonizando outros planetas ou vivendo num mundo pós apocalíptico. Ou seja, no presente, a distância própria e comóvel são iguais!

Agora temos um ponto de partida para definir as distâncias própria e comóvel. Assim, **encontre a expressão** para a **distância própria** $d_p(z)$ e a **distância comóvel** $d_c(z)$, em função do redshift, até uma galáxia que não tem velocidade peculiar em relação à expansão do universo (ou fluxo de Hubble).

Dica: lembre-se do resultado do item (a)! Não pedimos o valor numérico nesse item.

A seguinte relação pode ser útil:

$$\frac{da}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1+z} \right] = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

(e) **CMB**

Estime o quão longe está a radiação cósmica de fundo (CMB, do inglês *Cosmic Microwave Background*) hoje e o quão longe estavam esses mesmos fótons na época da recombinação. Sabe-se que a temperatura do CMB é atualmente $T_{CMB} = 2.725K$ e que a energia de ionização do Hidrogênio é de 13.6 eV. Qual dessas duas (se for alguma) é a distância que os fótons percorreram até chegar até nós?

(f) **Medindo o universo!**

Na cosmologia observacional temos duas distâncias muito importantes, a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular.

A distância de luminosidade $d_L(z)$ é definida tal que:

$$F_{bol} = \frac{L_{bol}}{4\pi d_L^2},$$

onde F_{bol} e L_{bol} são o fluxo e a luminosidade bolométrica, respectivamente.

Já a distância de diâmetro angular $d_A(z)$ é definida tal que:

$$\theta_D = \frac{D}{d_A(z)},$$

onde D e θ_D são o diâmetro/tamanho físico e o diâmetro angular do objeto, respectivamente.

A partir de princípios físicos e geométricos, **explique** a seguinte relação entre as duas distâncias:

$$d_L = (1 + z)^2 d_A.$$

Dica: relacione cada distância com a distância comóvel (ou própria para o redshift atual). Para a distância de luminosidade, reflita sobre como a expansão do universo (o redshift) afeta a luminosidade bolométrica de uma galáxia. Para a distância de diâmetro angular, reflita sobre a jornada do fóton que sai da galáxia e chega até a Terra.

(g) **BAO**

Estime qual é o tamanho angular da oscilação acústica de bárions (BAO, do inglês *Baryon Acoustic Oscillations*) para $z = 0.5$. Sabemos que o tamanho físico da BAO na época da recombinação era de 0.14 Mpc.

4. Termodinâmica Relativística (20 pontos)

No início do século XX, a física parecia se aproximar cada vez mais da completude. Todavia, havia de se propor uma solução para os problemas do eletromagnetismo, no qual a força magnética era inconsistente quando mudava-se de referencial. Também havia a ausência de um referencial para a velocidade da luz demonstrada pelas Equações de Maxwell.

Observando experimentos de diversos cientistas, Einstein formulou a relatividade restrita que trouxe a solução para esses problemas. Ainda assim, nem tudo foi solucionado. Um exemplo disso é a temperatura que, até hoje, não tem uma transformação relativística completamente aceita pela comunidade científica. Ao longo dos anos, diversos cientistas propuseram diferentes saídas:

$$T = \gamma T'$$

$$T = \frac{T'}{\gamma}$$

$$T = T'$$

Sendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Nessa questão, proporemos um modelo simplificado a partir da termodinâmica clássica, visando estudar sistemas termodinâmicos em alta velocidade como estrelas.

Parte A: Demonstrações Mirabolantes

- a) Considere um recipiente cheio de um gás trocando calor dQ' em seu referencial ($S' = S$) com a vizinhança. Agora, o recipiente tem velocidade v e o calor trocado com a vizinhança é dQ para o referencial S que continua fixo em relação ao laboratório. Considerando que a o calor se transforma relativisticamente como a energia de repouso de uma partícula e que a entropia é uma invariante relativística ($S = S'$), prove que:

$$T = \gamma T'$$

Considere também que $dQ = TdS$ e $dQ' = T'dS'$.

- b) Usando a primeira lei da termodinâmica ($dU = TdS - PdV$) para um sistema qualquer com um gás ideal que está se movendo, prove que a pressão se transforma da seguinte forma:

$$P = \gamma^2 P'$$

Considere que a primeira lei da termodinâmica vale para qualquer referencial.

- c) Seja um recipiente cúbico de lado de repouso L' cheio de um gás de número de mols η se movendo com velocidade v para a direita em relação a um referencial S . Uma vez que a Lei dos Gases Ideais vale para o gás quando este está em repouso, prove que, na verdade, ela vale para qualquer referencial. Isto é:

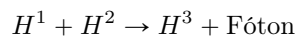
$$PV = \eta RT \quad \text{e} \quad P'V' = \eta RT'$$

Fugindo, por um momento, da termodinâmica, tente:

- d) Usando efeitos fundamentais da relatividade restrita (dilatação do tempo, contração do espaço, transformada de massa, ou outras), demonstre que a luminosidade de uma estrela não depende do referencial ($L = L'$)

Parte B: Reações Termonucleares

Nessa parte da questão, vamos usar as consequências da transformada de temperatura para provar, de outro modo, o que foi achado no item d. Veja a seguinte reação nuclear que acontece em uma das etapas de fusão nuclear em uma estrela comum:



Seja S' o referencial da estrela e S um referencial qualquer que vê a estrela como tendo velocidade constante v . Para simplificação, considere que a reação acima é a única acontecendo na estrela.

- e) Defina a massa molecular μ como sendo $\mu = \frac{m_0}{m}$, em que m_0 é a massa de repouso do núcleo do átomo e m é a massa de repouso de um próton. Assuma nesse modelo que a equipartição da energia da termodinâmica clássica ainda funcione, isto é, a energia cinética translacional de uma molécula em um gás ideal é dada por:

$$K = \frac{\alpha k_b T}{2}$$

Em que α é o número de graus de liberdade da molécula. Daí, prove que o fator de Lorentz que uma partícula do gás parece ter para a estrela é dada por:

$$\gamma'_\mu = 1 + \frac{3k_b T'}{2\mu m c^2}$$

- f) Se o H^1 e o H^2 têm velocidades no mesmo sentido, ao conservar a energia, prove que a frequência do fóton que sai da reação, para a estrela, é dada por:

$$f' = \frac{3k_b T'}{2h}$$

- g) Prove que, considerando as soluções dos itens anteriores, por analogia, pode-se comprovar que a transformada para a frequência do fóton seria:

$$f = \gamma f'$$

- h) Considerando que a estrela esteja num equilíbrio em que a quantidade de energia produzida dentro dela por unidade de tempo é igual a sua luminosidade, demonstre que, então, $L = L'$.