LISTA 3

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, totalizando 50 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco"e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: “Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, “48 - Q1”, e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, “p.1.”
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

Prazo: 04/05/2024 -23h 59min

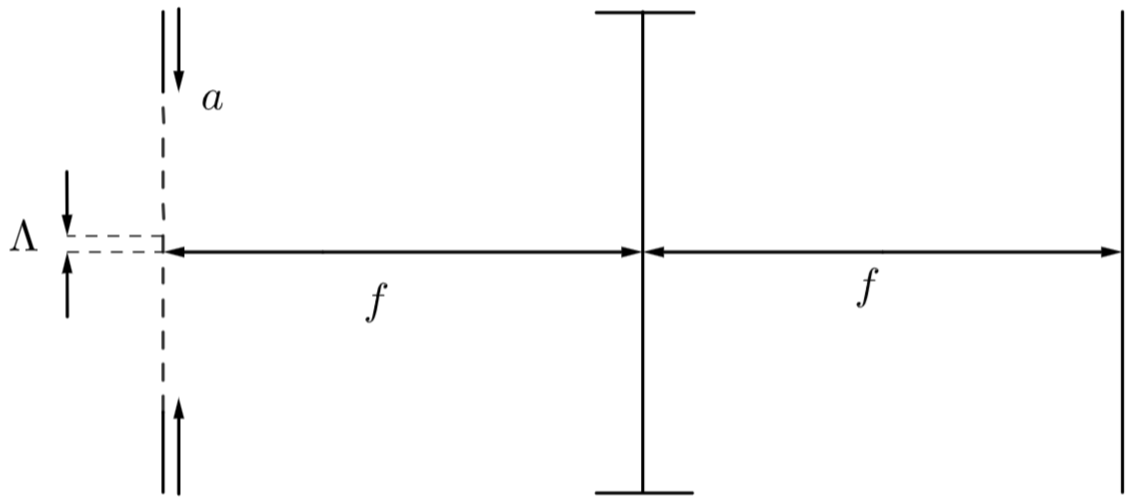
Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. Espectrômetro Estelar (5 pontos)

A figura abaixo mostra o diagrama esquemático de um espectrômetro estelar simples. Ele consiste em uma grade de amplitude sinusoidal com período Λ e tamanho lateral (abertura) a, seguida por uma lente de distância focal f e abertura suficientemente grande. Para analisar esse espectrômetro, vamos assumir que ele é iluminado pela esquerda por ondas de cores diferentes de uma estrela. Paulinho, em seu observatório no Massachussets Institute of Technology, percebeu que, considerando duas ondas de comprimento λ e $\lambda + \Delta\lambda$, onde $|\Delta\lambda|$ é muito menor que λ, a difração delas pela grade gera ângulos ligeiramente diferentes. Com isso, Paulinho se questionou como produzir dois pontos brilhantes adjacentes, porém suficientemente bem separados, para cada uma das cores espectrais emitidas pela estrela. Considere que as ondas estão sobre o eixo do sistema.



(a) Com base no que foi visto, determine a abertura mínima da lente para que ela não prejudique o funcionamento do espectrômetro. Deixe sua resposta em função de a, λ, Λ e f.

(b) Demonstre que, para esse sistema, a condição para os dois pontos de cores diferentes estarem "suficientemente bem" separados é:
$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < \frac{a}{\Lambda}$$
Por fim, comente sobre o resultado apresentado e sobre o perfil do espectro formado pela estrela nesse espectrômetro.

Solução:

(a) Nesse caso, a abertura da lente deve ser capaz de captar o primeiro máximo. Dessa maneira, obtemos que:
$$\frac{A}{2} > \frac{a}{2} + f\tan\theta$$
Perceba que, pela condição do primeiro máximo, sabemos que:
$$\Lambda \sin\theta \approx \Lambda \tan\theta = \lambda$$
ou seja:
$$\tan\theta = \frac{\lambda}{\Lambda}$$

Dessa forma,

$$\frac{A}{2} > \frac{a}{2} + \frac{\lambda f}{\Lambda}$$

então:

$$\boxed{A > a + \frac{2\lambda f}{\Lambda}}$$

(b) Para resolver esse item, perceba que a lente irá focalizar cada ponto em uma tela, onde será observado a difração. O comprimento total de onde é possível observar difração do primeiro máximo pode ser calculado por:

$$\frac{\lambda f}{a} \text{ para } \lambda$$

e

$$\frac{(\lambda + \Delta\lambda) f}{a} \text{ para } \lambda + \Delta\lambda$$

Já a posição dos pontos de cores do primeiro máximo pode ser calculado por:

$$\frac{\lambda f}{\Lambda} \text{ para } \lambda$$

e

$$\frac{(\lambda + \Delta\lambda) f}{\Lambda} \text{ para } \lambda + \Delta\lambda$$

Para serem suficientemente bem separados, a distância entre os pontos de cores devem exceder o comprimento total da difração do primeiro máximo, ou seja:

$$\frac{\Delta\lambda f}{\Lambda} > \frac{\lambda f}{2a} + \frac{(\lambda + \Delta\lambda) f}{2a}$$

Como $\Delta\lambda << \lambda$,

$$\frac{\lambda f}{2a} + \frac{(\lambda + \Delta\lambda) f}{2a} \approx \frac{\lambda f}{a}$$

tal que:

$$\frac{\Delta\lambda f}{\Lambda} > \frac{\lambda f}{a}$$

e então:

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < \frac{a}{\Lambda}}$$

Por se tratar de uma estrela, o espectro é de absorção.

2. Interior Estelar (10 pontos)

Nessa questão, analisaremos a evolução de uma estrela que possui uma densidade de massa $\rho(r)$ que só depende da distância radial r até o seu centro. Suponha que a estrela de nosso problema possua energia interna U devido ao movimento das partículas que a compõem e energia potencial gravitacional Ω. Ao longo dos itens, caso não indicado o contrário, adote que a estrela possui massa total M e raio R.

(a) Escreva uma expressão para Ω na forma de integral. Deixe sua resposta em termos da constante gravitacional G, da distância r ao centro da estrela, da massa M_r contida dentro de uma casca esférica de raio r e da massa total da estrela, M.

(b) Seja $P(r)$ a pressão a uma distância r do centro da estrela. Demonstre que

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

(c) Assumindo que a pressão na superfície da estrela seja nula, prove que Ω pode ser escrito na seguinte forma:

$$\Omega = -3\int_0^{V(R)} P\,dV$$

Onde $V(r)$ é o volume contido dentro de uma casca esférica de raio r.

(d) Suponha agora que a estrela é composta por um gás ideal. Mostre que a seguinte relação é válida:

$$P = \rho u(\gamma - 1)$$

Onde γ é o coeficiente adiabático do gás e u é a energia interna por unidade de massa do gás.

(e) Use seus resultados dos itens anteriores para provar que existe a seguinte relação entre a energia interna e a energia potencial gravitacional de uma estrela composta por um gás ideal:

$$\Omega = -3(\gamma - 1)U$$

(f) Encontre uma expressão para a energia total E da estrela em função de γ e Ω.

(g) A partir do item anterior, encontre o valor mínimo γ_{min} de γ para que a estrela se mantenha gravitacionalmente ligada.

(h) Estime o tempo de vida de uma estrela com massa $M_\odot$ uniformemente distribuída, raio $R_\odot$ e luminosidade $L_\odot$, sabendo que ela é composta por um gás ideal com $\gamma = 5/3$.

Solução:

(a) Para calcular a energia potencial gravitacional da estrela, imaginaremos que ela é gradualmente formada. Em certo passo de sua formação, ela possui raio r e massa M_r distribuída segundo $\rho(r)$. Então, trazemos um elemento de massa dM_r do infinito até a superfície da estrela. Pela lei de Gauss, devido à simetria esférica do problema, podemos escrever a variação de energia potencial do sistema como sendo

$$d\Omega = -\frac{GM_r}{r}\cdot dM_r$$

Integrando:

$$\boxed{\Omega = -\int_0^M \frac{GM_r}{r}\,dM_r}$$

(b) Considere um elemento de volume com área dA e espessura dr a uma distância r do centro da estrela. Para que ele esteja em equilíbrio hidrostático, a pressão em sua face voltada para o centro da estrela deve equilibrar a pressão na outra face e a ação da gravidade:

$$P(r)\cdot dA = P(r+dr)\cdot dA + \frac{GM_r}{r^2}\rho\cdot dA\cdot dr$$

Como $P(r+dr) - P(r) = dP$, podemos reorganizar a equação acima e obter

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho}$$

(c) Para simplificar a expressão para Ω encontrada no item (a), podemos manipular a equação obtida no item anterior,

$$\frac{GM_r}{r} = -\frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr}$$

e substituir na expressão de Ω:

$$\Omega = \int_0^M \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} \, dM_r$$

$$\Omega = \int_{P(0)}^{P(R)} \frac{r}{\rho} \frac{dM_r}{dr} \, dP$$

Pela definição de densidade:

$$\rho = \frac{dM_r}{dV} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_r}{dr}$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Substituindo na integral:

$$\Omega = \int_{P(0)}^{P(R)} 4\pi r^3 \, dP$$

Perceba que $4\pi r^3$ pode ser escrito como $3V$:

$$\Omega = 3 \int_{P(0)}^{P(R)} V \, dP$$

Para mudar a variável de integração, utilizaremos que

$$d(PV) = P \cdot dV + V \cdot dP$$

$$V \cdot dP = d(PV) - P \cdot dV$$

Assim,

$$\Omega = 3 \int_{P(0)V(0)}^{P(R)V(R)} d(PV) - 3 \int_{V(0)}^{V(R)} P \, dV$$

Do enunciado, sabemos que a pressão na superfície é nula, isto é, $P(R) = 0$. Ainda, é evidente que $V(0) = 0$. Temos, finalmente,

$$\boxed{\Omega = -3 \int_0^{V(R)} P \, dV}$$

(d) Seja μ a massa de uma partícula do gás que compõe a estrela. Pela lei do gás ideal:

$$P = \frac{\rho}{\mu} kT$$

Seja c_v a capacidade térmica do gás por unidade de partícula. A energia interna por unidade de massa é dada por

$$u = \frac{c_v T}{\mu}$$

Para encontrar uma expressão para c_v, utilizaremos a definição de γ e a relação de Mayer ($c_p = c_v + k$):

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + k}{c_v}$$

$$c_v = \frac{k}{\gamma - 1}$$

Assim, u é tal que

$$u = \frac{kT}{\mu(\gamma - 1)}$$

$$\frac{kT}{\mu} = u(\gamma - 1)$$

Substituindo na expressão de P:

$$\boxed{P = \rho u(\gamma - 1)}$$

(e) Substituindo a expressão do item anterior na equação obtida no item (c):

$$\Omega = -3(\gamma - 1)\int_0^{V(R)} \rho u \, dV$$

Porém, perceba que $\rho u dV$ é simplesmente dU:

$$\Omega = -3(\gamma - 1)\int_0^{U} dU$$

$$\boxed{\Omega = -3(\gamma - 1)U}$$

(f) Somando a energia potencial gravitacional e a energia interna da estrela:

$$E = \Omega + U = \Omega - \frac{\Omega}{3(\gamma - 1)}$$

$$\boxed{E = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega}$$

(g) Para que a estrela se mantenha gravitacionalmente ligada, sua energia total deve ser negativa, isto é, $E < 0$. Como $\Omega < 0$, devemos ter que

$$3\gamma - 4 > 0$$

$$\boxed{\gamma_{min} = \frac{4}{3}}$$

(h) Para uma estrela com massa uniformemente distribuída, sabemos que a energia potencial gravitacional é

$$\Omega = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Assim,

$$E = -\frac{3\gamma - 4}{5(\gamma - 1)}\frac{GM^2}{R}$$

Podemos estimar o tempo de vida da estrela como sendo

$$t \approx \frac{|E|}{L} = \frac{3\gamma - 4}{5(\gamma - 1)}\frac{GM^2}{LR}$$

Substituindo os valores, obtemos

$$\boxed{t \approx 9{,}4 \cdot 10^6 \text{ anos}}$$

3. Aprendendo Cosmologia (15 pontos)

Leia: o livro da Profa. Barbara Ryden capítulos 1-5 e/ou a apostila do Prof. Gastão Neto seções 2.7, 2.7.1, 2.7.2, 2.8 e 2.9 (Aceite os resultados que vierem da Relatividade Geral).

Neste problema, estudaremos a equação de Friedmann, e com ela, também aprenderemos sobre a história da composição do universo e um pouco de cosmografia, ou seja, a medição de estruturas em grande escala no universo.

Entre si, cosmólogos raramente falam da história do universo usando segundos, anos, parsecs ou campos de futebol. Quando eles falam para o grande público eles traduzem para unidades conhecidas! Na verdade, no dia a dia, eles tratam da história do universo, da distância de um objeto e a idade desse objeto usando redshift.

O motivo disso é que tudo que nós podemos observar um objeto em um dado momento é a sua luz, que quando decomposta em um espectro, nos informa o seu redshift. Veremos que, para obter medidas como distância e tempo, precisamos de um modelo cosmólogico. Esse modelo é um *modelo*, e não é necessariamente a realidade.

No entanto, ao melhor do nosso entendimento, o modelo ΛCDM descreve bem o nosso universo. Ele nos diz que o universo é formado de aproximadamente por 68% de energia escura e por 32% de matéria (escura e bariônica) e 10^{-4} de radiação. A medição de curvatura tem 0 dentro da sua incerteza. Por isso, desconsideraremos qualquer contribuição de uma geometria não-euclideana nesse problema. (Obs.: geometria euclideana é a que você aprendeu na escola!)

O redshift também é conveniente por se relacionar com o fator de escala de maneira simples: $z + 1 = a^{-1}$. Aqui, fixamos $a_0 = 1$, o que será válido neste problema inteiro.

Para os itens (e) e (g), você vai precisar de uma ferramenta de computação numérica onde você possa obter o valor de integrais não calculáveis analiticamente, como Desmos, ou como `Mathematica` ou uma biblioteca/módulo de Python como `Astropy` ou `Scipy`. Nos envie um "print"da sua tela com o seu código/equações/etc.

Sem mais delongas, comecemos o problema!

(a) **Lei de Hubble**

Suponha um universo homogêneo e isotrópico em expansão, de tal modo que seu estado em qualquer tempo t seja descrito por um fator de escala $a(t)$, tal que se temos duas galáxias sem velocidade peculiar, que distam r_0 uma da outra, temos que a função que descreve a distância entre elas é $r(t) = a(t)r_0$. A partir disso, **derive** a lei de Hubble:

$$v(t) = H(t)r(t).$$

Mostre que ela é válida para quaisquer galáxias no universo (não importa onde estejam nem a direção entre elas).

(b) **Um plano para o futuro!**

Suponha um universo de geometria euclidiana ("plano") composto apenas de matéria não-relativística, radiação e energia escura. A partir da seguinte forma para a equação de Friedmann:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)$$

derive a seguinte:

$$H(z) = H_0 E(z),$$

onde $E(z) = \sqrt{\Omega_{0,m}(1+z)^3 + \Omega_{0,r}(1+z)^4 + \Omega_{0,\Lambda}}$.

(c) **Igualdade**

Calcule o redshift $z_{m,r}$ no qual houve uma proporção igual de matéria e de radiação, e **também calcule** o redshift $z_{m,\Lambda}$ no qual houve uma proporção igual de matéria e de energia escura. Use o resultado do item (b) e **estime** $H(z_{m,\Lambda})$ e $H(z_{m,r})$. Use $H_0 = 70$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

(d) **Que seja infinito enquanto dure!**

Definimos o tempo conforme como $d\eta = dt/a(t)$. Ele é simplesmente uma mudança de coordenadas, mas nos permite obter *insights* interessantes.

Imagine que parassemos a expansão do universo agora e lançassemos um fóton até um espelho no limite do universo observável no momento da emissão (note que o limite do universo observável ainda vai crescer). o tempo que medíriamos para que o fóton voltasse seria duas vezes o tempo conforme. Você pode pensar também que a distância que esse fóton percorreu até voltar é duas vezes a distância comóvel. A distância própria seria simplesmente esse tempo ou distância medida em outro momento (imagine que somos astrônomos na primeira era do gelo, ~ 2 bilhões de anos atrás, ou que somos astronômos num futuro distante, já colonizando outros planetas ou vivendo num mundo pós apocalíptico. Ou seja, no presente, a distância própria e comóvel são iguais!

Agora temos um ponto de partida para definir as distâncias própria e comóvel. Assim, **encontre a expressão** para a **distância própria** $d_p(z)$ e a **distância comóvel** $d_c(z)$, em função do redshift, até uma galáxia que não tem velocidade peculiar em relação à expansão do universo (ou fluxo de Hubble).

Dica: lembre-se do resultado do item (a)! Não pedimos o valor numérico nesse item.

A seguinte relação pode ser útil:

$$\frac{da}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1+z}\right] = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

(e) **CMB**

Estime o quão longe está a radiação cósmica de fundo (CMB, do inglês *Cosmic Microwave Background*) hoje e o quão longe estavam esses mesmos fótons na época da recombinação. Sabe-se que a temperatura do CMB é atualmente $T_{CMB} = 2.725K$ e que a energia de ionização do Hidrogênio é de 13.6 eV. Qual dessas duas (se for alguma) é a distância que os fótons percorreram até chegar até nós?

(f) **Medindo o universo!**

Na cosmologia observacional temos duas distâncias muito importantes, a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular.

A distância de luminosidade $d_L(z)$ é definida tal que:

$$F_{bol} = \frac{L_{bol}}{4\pi d_L^2},$$

onde F_{bol} e L_{bol} são o fluxo e a luminosidade bolométrica, respectivamente.

Já a distância de diâmetro angular $d_A(z)$ é definida tal que:

$$\theta_D = \frac{D}{d_A(z)},$$

onde D e θ_D são o diâmetro/tamanho físico e o diâmetro angular do objeto, respectivamente.

A partir de princípios físicos e geométricos, **explique** a seguinte relação entre as duas distâncias:

$$d_L = (1+z)^2 d_A.$$

Dica: relacione cada distância com a distância comóvel (ou própria para o redshift atual). Para a distância de luminosidade, reflita sobre como a expansão do universo (o redshift) afeta a luminosidade bolométrica de uma galáxia. Para a distância de diâmetro angular, reflita sobre a jornada do fóton que sai da galáxia e chega até a Terra.

(g) **BAO**

Estime qual é o tamanho angular da oscilação acústica de bárions (BAO, do inglês *Baryon Acoustic Oscillations*) para $z = 0.5$. Sabemos que o tamanho físico da BAO na época da recombinação era de 0.14 Mpc.

Solução:

(a) Imagine três galáxias, em cada uma delas temos um observador. Para derivar a lei de Hubble, começemos com o vetor da posição relativa entre galáxias:

$$\vec{r}_{1,2}(t) = a(t)\vec{r}_{1,2}(0),$$

$$\vec{r}_{2,3}(t) = a(t)\vec{r}_{2,3}(0),$$

$$\vec{r}_{1,3}(t) = a(t)\vec{r}_{1,3}(0).$$

Derivamos em relação ao tempo:

$$\vec{v}_{1,2}(t) = \dot{a}\vec{r}_{1,2}(0).$$

$$\vec{v}_{2,3}(t) = \dot{a}\vec{r}_{2,3}(0).$$

$$\vec{v}_{1,3}(t) = \dot{a}\vec{r}_{1,3}(0).$$

Sabemos no entanto que $r_0 = r(t)/a(t)$, assim, para cada observador, podemos obter a seguinte relação:

$$v(t) = \frac{\dot{a}}{a}r(t).$$

Finalmente, definimos $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, assim:

$$v(t) = H(t)r(t).$$

Aqui mostramos também que essa lei é válida para quaisquer galáxias em qualquer posição ou direção. Isso porque a derivação pode ser repetida da mesma forma para os três observadores e obtêm-se a mesma constante $H(t)$

(b) Para encontrar a forma desejada da equação de Friedmann, comecemos com a forma dada, válida em universos sem curvatura. Definimos a densidade crítica $/rho_c(t)$ como sendo a densidade em cosmologias de geometria euclidiana. Assim, podemos escrever:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho_c(t),$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{c,0}.$$

Assim, dividimos a equação de Friedmann dada pela última equação obtida, e encontramos:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{c,0}}.$$

Note que também pode-se escrever $\rho_c(t)$ no numerador do lado direito da equação.

Podemos assim escrever:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t)}{\rho_{c,0}},$$

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho_{0,m}a^{-3} + \rho_{0,r}a^{-4} + \rho_{0,\Lambda}}{\rho_{c,0}},$$

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho_{0,m}(1+z)^3 + \rho_{0,r}(1+z)^4 + \rho_{0,\Lambda}}{\rho_{c,0}}.$$

Usando a definição de parâmetro de densidade $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$, temos:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_{0,m}(1+z)^3 + \Omega_{0,r}(1+z)^4 + \Omega_{0,\Lambda}$$

E já que não temos mais dependência temporal explícita, podemos finalmente escrever $H(z)$. A dependência temporal está implícita no redshift.

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_{0,m}(1+z)^3 + \Omega_{0,r}(1+z)^4 + \Omega_{0,\Lambda}}.$$

(c) Para encontrar o redshift de igualdade de matéria e radiação:

$$\Omega_{0,m}(1+z)^3 = \Omega_{0,r}(1+z)^4$$

$$z = \frac{\Omega_{0,m}}{\Omega_{0,r}} - 1$$

$$z \approx 3200$$

Para encontrar o redshift de igualdade de matéria e energia escura:

$$\Omega_{0,m}(1+z)^3 = \Omega_{0,\Lambda}$$

$$z = \left(\frac{\Omega_{0,\Lambda}}{\Omega_{0,m}}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$z \approx 0.28$$

Para estimar o parâmetro de Hubble nas diferentes épocas temos:

$$H(z_{m,\Lambda}) = H_0E(z_{m,\Lambda}) = 81.4$$

$$H(z_{m,r}) = H_0E(z_{m,r}) \approx 10^7$$

(d) Para encontrar a distância comóvel até uma galáxia, utilizaremos a métrica FLRW. Para um fóton que chega até nós vindo de uma galáxia sem velocidade peculiar, temos:

$$ds^2 = 0 = -c^2dt^2 + a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi)],$$

Mas o fóton só se move na coordenada r, então $d\theta = d\varphi = 0$. Assim, temos:

$$dr = c\frac{dt}{a(t)}.$$

Podemos reescrever $H(t) = \dot{a}/a$ como $dt = da/(aH)$. Temos também que $da = -dz/(1+z)^2$. Assim:

$$dr = -c\frac{dz}{H(z)}.$$

$$d_c(z) = \int_0^{d_c(z)} dr = -\frac{c}{H_0}\int_z^0 \frac{dz}{E(z)}.$$

$$d_c(z) = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}.$$

Para a distância própria, temos, simplesmente:

$$d_p(z) = a(t)d_c(z)$$

$$d_p(z) = a(t)\frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}.$$

Note que t é o tempo para o observador, enquanto que z é o redshift do objeto, que mudará com o passar do tempo. Esse fenômeno se chama "deriva do redshift"ou *redshift drift*. Medir essa deriva seria um jeito interessante de medir $H(t)$, e não somente H_0. Posso passar uma leitura sobre isso, caso desejem.

(e) **ERRATA:** A parte a seguir foi **ANULADA**. Já que não foram dadas as orientações e os dados necessários para a resolução correta. Além disso, a equação de Saha não está dentro do que pode ser cobrado sem orientação prévia. Todos os pontos em relação a este item serão conferidos para todos.

A resolução correta é a seguinte: Para fazer isso, primeiro encontraremos o redshift da recombinação. Para isso, vamos encontrar a temperatura, que é inversamente proporcional ao fator de escala. Para encontrar a temperatura, vamos usar a equação de Saha:

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_I}{k_B T}} \tag{1}$$

$$e^{-\frac{E_I}{k_B T}} \approx 1 \tag{2}$$

$$T_r \approx \frac{E_I}{k_B} \tag{3}$$

$$T_r \approx \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{8.617\cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}} \tag{4}$$

$$T_r \approx 1.578\cdot 10^5\,\mathrm{K} \tag{5}$$

$$T_{rec} \approx 3000K$$

Assim, temos:

$$z = \frac{T_{rec}}{T_0} - 1$$

Agora, integrando numericamente, temos:

$$d_c(z) = \frac{c}{H_0}\int_0^{1100} \frac{dz}{E(z)}.$$

$$d_{p,rec} = \frac{1}{1+z} d_c(z) = 12 \text{ Mpc}$$

$$d_{p,0} = d_c(z) = 13.3 \text{ Gpc}$$

$$z \approx 1100.$$

Usando $E = k_B T$

$$T_r \approx \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{8.617 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}} \tag{6}$$

$$T_r \approx 1.578 \cdot 10^5\,\mathrm{K} \tag{7}$$

Assim, temos:

$$z = \frac{T_{rec}}{T_0} - 1$$

Agora, integrando numericamente, temos:

$$d_c(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^{1100} \frac{dz}{E(z)}.$$

$$d_{p,rec} = \frac{1}{1+z} d_c(z) = 12 \text{ Mpc}$$

$$d_{p,0} = d_c(z) = 13.3 \text{ Gpc}$$

(f) Para encontrar a relação entre a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular, primeiro vamos encontrar a relação de cada uma delas à distância comóvel.

Para a distância de luminosidade, vale a pena considerar primeiramente um universo que não está em expansão. Nesse caso, temos:

$$F_{bol} = \frac{L_{bol}}{4\pi d_c^2},$$

onde d_c é a distância comóvel, que é igual à distância própria em todos os instantes nesse universo.

Temos um fator de $1/(1+z)$ na luminosidade bolométrica observada devido ao redshift, e outro fator de $1/(1+z)$ devido à diminuição de incidência de fótons oriundos dessa galáxia. Assim, temos:

$$F_{bol} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{L_{bol}}{4\pi d_c^2},$$

o que implica:

$$d_L = (1+z) d_c.$$

Para a distância de diâmetro angular, pensemos no fóton que estamos vendo. Ele foi emitido quando a galáxia estava mais próxima de nós. O seu redshift nos informa o quanto o universo expandiu desde o momento da sua emissão, já que $a(t_{em}) = \frac{1}{1+z}$. Ou seja, a distância da galáxia até nós no momento da emissão do fóton é $a(t_{em}) d_c = \frac{d_c}{1+z}$. Note que essa distância é a distância de diâmetro angular. Assim:

$$d_A = \frac{d_c}{1+z}.$$

Agora, é evidente que:

$$d_L = (1+z)^2 d_A.$$

(g) Para estimar o tamanho angular das oscilações acústicas de bárions, primeiro vamos encontrar o tamanho físico das oscilações em $z = 0.5$:

$$D = \frac{1 + z_{rec}}{1 + 0.5} 0.14 \text{ Mpc}$$

$$d_A(z) = \frac{1}{1+0.5} \frac{c}{H_0} \int_0^{z=0.5} \frac{dz}{E(z)}$$

Obtemos esse valor com integração numérica: Finalmente:

$$\Delta\theta(z = 0.5) = \frac{D}{d_A(z)}$$

$$\Delta\theta \approx 5^\circ$$

4. Termodinâmica Relativística (20 pontos)

No início do século XX, a física parecia se aproximar cada vez mais da completude. Todavia, havia de se propor uma solução para os problemas do eletromagnetismo, no qual a força magnética era inconsistente quando mudava-se dcie referencial. Também havia a ausência de um referencial para a velodade da luz demonstrada pelas Equações de Maxwell.

Observando experimentos de diversos cientistas, Einstein formulou a relatividade restrita que trouxe a solução para esses problemas. Ainda assim, nem tudo foi solucionado. Um exemplo disso é a temperatura que, até hoje, não tem uma transformação relativística completamente aceita pela comunidade científica. Ao longo dos anos, diversos cientistas propuseram diferentes saídas:

$$T = \gamma T'$$
$$T = \frac{T'}{\gamma}$$
$$T = T'$$

Sendo $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Nessa questão, proporemos um modelo simplificado a partir da termodinâmica clássica, visando estudar sistemas termodinâmicos em alta velocidade como estrelas.

Parte A: Demonstrações Mirabolantes

a) Considere um recipiente cheio de um gás trocando calor dQ' em seu referencial ($S' = S$) com a vizinhança. Agora, o recipiente tem velocidade v e o calor trocado com a vizinhança é dQ para o referencial S que continua fixo em relação ao laboratório. Considerando que a o calor se transforme relativisticamente como a energia de repouso de uma partícula e que a entropia é uma invariante relativística ($S = S'$), prove que:

$$T = \gamma T'$$

Considere também que $dQ = TdS$ e $dQ' = T'dS'$.

b) Usando a primeira lei da termodinâmica ($dU = TdS - PdV$) para um sistema qualquer com um gás ideal que está se movendo, prove que a pressão se transforma da seguinte forma:

$$P = \gamma^2 P'$$

Considere que a primeira lei da termodinâmica vale para qualquer referencial.

c) Seja um recipiente cúbico de lado de repouso L' cheio de um gás de número de mols η se movendo com velocidade v para a direita em relação a um referencial S. Uma vez que a Lei dos Gases Ideais vale para o gás quando este está em repouso, prove que, na verdade, ela vale para qualquer referencial. Isto é:

$$PV = \eta RT \text{ e } P'V' = \eta RT'$$

Fugindo, por um momento, da termodinâmica, tente:

d) Usando efeitos fundamentais da relatividade restrita (dilatação do tempo, contração do espaço, transformada de massa, ou outras), demonstre que a luminosidade de uma estrela não depende do referencial ($L = L'$)

Parte B: Reações Termonucleares

Nessa parte da questão, vamos usar as consequências da transformada de temperatura para provar, de outro modo, o que foi achado no item d. Veja a seguinte reação nuclear que acontece em uma das etapas de fusão nuclear em uma estrela comum:

$$H^1 + H^2 \rightarrow H^3 + \text{Fóton}$$

Seja S' o referencial da estrela e S um referencial qualquer que vê a estrela como tendo velocidade constante v. Para simplificação, considere que a reação acima é a única acontecendo na estrela.

e) Defina a massa molecular μ como sendo $\mu = \dfrac{m_0}{m}$, em que m_0 é a massa de repouso do núcleo do átomo e m é a massa de repouso de um próton. Assuma nesse modelo que a equipartição da energia da termodinâmica clássica ainda funcione, isto é, a energia cinética translacional de uma molécula em um gás ideal é dada por:

$$K = \frac{\alpha k_b T}{2}$$

Em que α é o número de graus de liberdade da molécula. Daí, prove que o fator de Lorentz que uma partícula do gás parece ter para a estrela é dada por:

$$\gamma'_\mu = 1 + \frac{3k_b T'}{2\mu mc^2}$$

f) Se o H^1 e o H^2 têm velocidades no mesmo sentido, ao conservar a energia, prove que a frequência do fóton que sai da reação, para a estrela, é dada por:

$$f' = \frac{3k_b T'}{2h}$$

g) Prove que, considerando as soluções dos itens anteriores, por analogia, pode-se comprovar que a transformada para a frequência do fóton seria:

$$f = \gamma f'$$

h) Considerando que a estrela esteja num equilíbrio em que a quantidade de energia produzida dentro dela por unidade de tempo é igual a sua luminosidade, demonstre que, então, $L = L'$.

Solução:

a) Sabemos que a energia de repouso de uma partícula é $E = \gamma mc^2 = \gamma E'$. Daí, assumindo o que o enunciado sugeriu, obtém-se que $dQ = \gamma dQ'$ e $dS = dS'$. Logo:

$$\begin{aligned} TdS &= \gamma T' dS' \\ T &= \gamma T' \end{aligned}$$

b) Para o referencial do recipiente do gás ideal, $dU' = T'dS' + P'dV'$. Primeiramente, uma vez que é um gás ideal, sabemos que $dU' = C_v\, dT'$ e $dU = C_v\, dT$, em que C_v é a capacidade calorífica a volume constante. Logo, $dU = C_v\, \gamma dT = \gamma dU'$. Pensando no volume do gás como sendo um conjunto de infinitos cubos infinitesimais, perceba que cada cubo sofrerá contração no referencial S apenas na aresta na direção do movimento. Daí, vem que $dV = \dfrac{dV'}{\gamma}$. Sabemos ainda que a entropia é invariante, então $dS = dS'$. A partir dessas transformações, podemos escrever que:

$$\frac{dU}{\gamma} = \frac{T}{\gamma}dS - P'\gamma dV$$
$$dU = TdS - \gamma^2 P'dV$$

Mas, no referencial S, a $dU = TdS - PdV$. Fazendo a comparação entre as equações, obtém-se:

$$P = \gamma^2 P'$$

c) Partindo da equação do referencial S' e usando as transformações já apresentadas:

$$P'V' = \eta RT'$$
$$\frac{P'}{\gamma^2}\gamma V = \eta R\frac{T}{\gamma}$$
$$PV = \eta RT$$

d) Considere que, no referencial da estrela, a cada período infinitesimal dt', seja emitida uma pequena energia $dE' = c^2 dm$. No referencial S, valem as transformações de energia de repouso e tempo: $dE = \gamma dE'$ e $dt = \gamma dt'$. Daí, chegamos no que queremos:

$$L = \frac{dE}{dt}$$
$$L = \frac{\gamma dE'}{\gamma dt'}$$
$$L = \frac{dE'}{dt'}$$
$$L = L'$$

e) Uma vez que todos os isótopos de hidrogênio são monoatômicos, todos eles tem $\alpha = 3$. Da relatividade restrita, sabemos que a energia cinética pode ser escrita como $K = (\gamma - 1)\mu mc^2$. Daí:

$$K' = (\gamma'_\mu - 1)\mu mc^2 = \frac{3k_bT'}{2}$$
$$\gamma'_\mu = 1 + \frac{3k_bT'}{2\mu mc^2}$$

f) Conservando a energia antes e depois:

$$E' = \gamma'_1 mc^2 + 2\gamma'_2 mc^2 = hf' + 3\gamma'_3 mc^2$$
$$\frac{hf'}{mc^2} = 1 + \frac{3k_bT'}{2mc^2} + 2\left(1 + \frac{3k_bT'}{2\cdot 2mc^2}\right) - 3\left(1 + \frac{3k_bT'}{3\cdot 2mc^2}\right)$$
$$f' = \frac{3k_bT'}{2h}$$

g) Perceba que $T = \gamma T'$. Logo, sendo a única diferença para as contas no referencial S, encontra-se $\gamma_\mu = 1 + \frac{3k_b\gamma T'}{2\mu mc^2}$ e, por consequência:

$$f = \frac{3k_b\gamma T'}{2h}$$
$$f = \gamma f'$$

h) Se dN fótons são emitidos num intervalo dt' para a estrela (S'), esse número emitidos em dt deve ser o mesmo para o referencial S, já que não faz sentido que ele mude de um referencial para o outro (sendo uma quantidade matemática). Daí, no referencial S', a energia liberada seria $dE' = hf'dN$ e, para o referencial S, seria $dE = hfdN = \gamma hf'dN = \gamma dE'$. Sabendo que $dt = \gamma dt'$, então vemos que, analogamente ao item d:

$$L' = \frac{dE'}{dt'}$$
$$L = \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma dE'}{\gamma dt'}$$
$$L = \frac{dE'}{dt'} = L'$$
$$L = L'$$