OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

LISTA 4

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, totalizando 50 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco"e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

Prazo: 12/05/2024 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$kg^{-2}	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	8,314 N $\cdot$ m $\cdot$ mol$^{-1} \cdot$K^{-1}	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$K^{-4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K	
Constante de Hubble (H_0)	67,8 km $\cdot$ s$^{-1} \cdot$Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Tamanho Angular em Função do Redshift (10 pontos)**
Um objeto de tamanho linear L (perpendicular à linha de visada) subentende um pequeno ângulo α. Suponha que o o objeto e o observador são ambos comóveis e que o redshift do objeto é z. Para um tamanho linear fixo, o ângulo é uma função do redshift: $\alpha = \alpha(z)$.

   (a) Se $\alpha^2 \ll 1$, $\alpha \propto L$. Encontre a constante de proporcionalidade para um universo de Einstein-de-Sitter ($k = 0$ e $a \propto t^{2/3}$). Deixe sua resposta em termos de z, da velocidade da luz, c, e do tempo atual, t_0.
   Dica: Se necessário, utilize que

$$\int_{x_0}^{x} x^n \, dx = \frac{1}{n+1}(x^{n+1} - x_0^{n+1})$$

   (b) Encontre o valor de z para o qual α é mínimo.
   Dica: Se necessário, utilize que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

   (c) Se as galáxias se formaram há muito tempo e têm um mesmo tamanho típico de 5 kpc, qual é o tamanho angular mínimo de uma galáxia em um universo de Einsten-de-Sitter, em milissegundos de arco (mas)?

2. **Incerteza de Medidas Fotométricas (10 pontos)**
Geométrico planeja determinar a magnitude de várias estrelas na banda B (centrada em $\lambda_B = 436\,\text{nm}$) ao longo de uma semana. Para isso, ele utiliza seu equipamento formado por um telescópio e um detector de fótons. Como os detectores são governados pela estatística de Poisson, quando esperamos observar N fótons vindo de uma fonte num dado intervalo de tempo, o número realmente detectado flutua por um valor de $\pm\sqrt{N}$.

   (a) Em um dos dias da semana, o céu observado por Hemétrio está extremamente limpo, de forma que o ruído de fundo é desprezível. Ele, então, decide determinar a magnitude m_B de uma estrela na banda B. Sabendo que $m_B = 20$, quantos fótons precisam ser detectados para que a medida realizada por Geométrico possua precisão de $\pm 0{,}02$? Você pode utilizar que a eficiência de detecção do sistema telescópio+coletor é igual a 100%.
   Dica: Se necessário, utilize que

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x \ln 10}$$

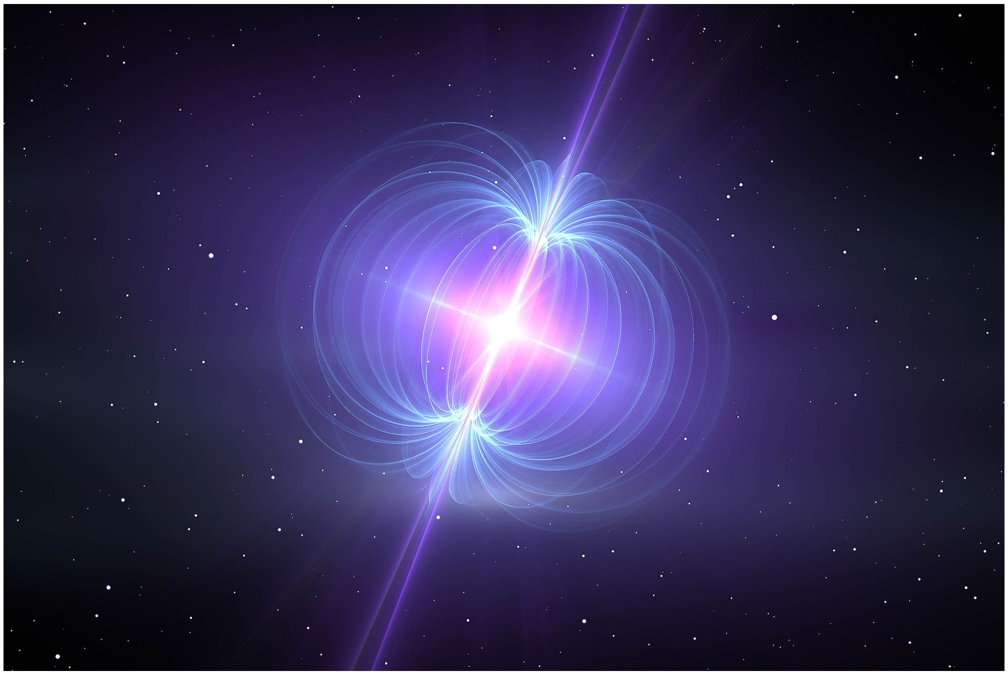
   (b) Qual seria o tempo de exposição necessário com um telescópio de diâmetro igual a 1 m para medir a magnitude $m_B = 20$ com a precisão do item anterior?

   (c) Durante um dia um pouco mais nublado, Geométrico decide observar uma estrela mais fraca do que a anterior ($m'_B = 24$) com a mesma precisão. Assuma que o brilho superficial de fundo do céu é de $22{,}5\,\text{mag} \cdot \text{arcsec}^{-2}$ na banda B e que os efeitos atmosféricos fazem com que a luz das estrelas seja espalhada em um círculo com diâmetro de 1 arcsec. Quantos fótons são necessários para fazer a medida da magnitude dessa estrela?

   (d) Calcule o tempo de exposição necessário para a medição do item anterior com telescópios de diâmetro 1 m e 4 m, respectivamente.

3. Radiação Síncrotron (15 pontos)

Nessa questão, estudaremos um modelo simplificado visando estudar a radiação síncrotron de estrelas de nêutrons e, com isso, obter importantes parâmetros para a astrofísica dos pulsares.



Para o que segue, assuma que o campo magnético de uma estrela de nêutrons possa ser modelado como a de um dipolo magnético $\vec{m}$ em seu centro, de tal modo que, em coordenadas polares:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

em que θ é o ângulo polar contado a partir do polo norte magnético da estrela no sentido horário. Além disso, considere que o dipolo está inclinado de α em relação ao eixo de rotação da estrela. Considere também que o campo magnético na superfície do equador magnético da estrela é dado por B_0, que sua massa é M e que seu raio é R. Uma vez de posse disso, podemos modelar a radiação eletromagnética emitida pela estrela.

Nota: Embora a equação acima e outras que serão apresentadas ao longo da questão tenham se originado do eletromagnetismo, neste problema não é necessário saber nada de eletromagnetismo, e precisa ser utilizado apenas as equações dadas. Em muitas questões de olimpíadas internacionais, como IOAA e OLAA, isso já é um padrão e, portanto, adotamos-o para os treinamentos. Recomenda-se também a consulta do livro Apostila Magna.

Dado: Se necessário, use as seguintes relações ao longo da questão:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad e \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Momento de inércia de uma esfera maciça de raio R e massa M:

$$I = \frac{2MR^2}{5}$$

(a) Mostre que o módulo do momento de dipolo magnético da estrela pode ser escrito da forma:

$$m = \frac{4\pi B_0 R^3}{\mu_0}$$

(b) Uma vez que a estrela está rotacionando, o seu vetor de dipolo magnético $\vec{m}$ irá variar com o tempo em direção, porém não em magnitude. Mostre, a partir disso, que:

$$|\ddot{\vec{m}}| = \omega^2 m \sin\alpha$$

em que ω é a velocidade angular de rotação da estrela e $\ddot{\vec{m}}$ é a segunda variação temporal do vetor $\vec{m}$.

(c) Sabendo que a potência irradiada por um dipolo magnético acelerado pode ser escrita na forma:

$$P_{ot} = -\frac{\mu_0 |\ddot{\vec{m}}|^2}{6\pi c^3}$$

calcule a potência dissipada devido a radiação síncrotron emitida pela estrela em função de B_0, R, ω, α e constantes físicas.

(d) Calcule também a frequência ν das ondas eletromagnéticas emitidas na forma de radiação.

(e) Uma vez de posse da potência dissipada pela estrela, mostre que a variação temporal de sua velocidade angular, devido a radiação síncrotron, pode ser escrita da forma:

$$\dot{\omega} = -\frac{20\pi B_0^2 R^4 \omega^3 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}$$

(f) Conclua, a partir do resultado anterior, que a velocidade angular da estrela em função do tempo é dada por:

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\beta t}}$$

em que ω_0 é sua velocidade angular inicial, e determine o valor de β em função de $B_0, \omega_0, M, R, \alpha$ e constantes físicas. Responda também qual deve ser o valor t para que $\omega \to 0$. Para esse modelo, podemos afirmar que o momento angular da estrela se conserva? Justifique dizendo se há ou não um torque dissipativo atuando no sistema.

(g) Sabendo que o Pulsar do Caranguejo possui os seguintes parâmetros:

M ($M_\odot$)	R (km)	α ($\circ$)	ω (rad/s)	$\dot{\omega} \times 10^{-9}$ (rad/s^2)
1,40	10,5	90,0	189	−2,39

calcule o campo magnético B_0 na superfície de seu equador magnético, seu momento de dipolo magnético m e a frequência ν das ondas eletromagnéticas emitidas devido a sua radiação sincrotron (deixe sua resposta no sistema internacional de unidades).

(h) Uma boa estimativa para o tempo de vida de um pulsar corresponde ao tempo para que sua velocidade angular reduza pela metade. Com base nisso, determine, por fim, o tempo de vida do Pulsar do Caranguejo.

4. Medindo o Universo Acelerado (15 pontos)

Neste problema, mediremos a aceleração do universo.

Na Lista 3, aprendemos que para um universo de geometria euclidiana ("plano"), a distância de luminosidade pode ser escrita como:

$$d_L(z) = (1+z)\frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}.$$

Podemos aplicar a lei de Pogson (modificada para distâncias expressas em Mpc ao invés de pc) pode ser escrita como:

$$\mu(z, L) = m(z) - M(L) = 5\log_{10} d_L + 25$$

(a) Use a tabela no fim da página e a expansão de Taylor próxima de $z = 0$ de d_L:

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left(z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2\right)$$

onde

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{aH^2},$$

e **obtenha** uma estimativa com incerteza para a constante de Hubble, H_0 e uma estimativa para q_0, sem incerteza.

Dica: Você pode usar sua calculadora para realizar uma regressão quadrática.

(b) **Mostre** que num universo somente com matéria e energia escura,

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}.$$

(c) **Calcule** $\Omega_{\Lambda,0}$ sabendo que $\Omega_{m,0} = 0.32$

Tabela:

z	μ
0.010000	33.113069
0.014737	33.961197
0.019474	34.577963
0.024211	35.056811
0.028947	35.451737
0.033684	35.789394
0.038421	36.081266
0.043158	36.341311
0.047895	36.575505
0.052632	36.787591
0.057368	36.981852
0.062105	37.162193
0.066842	37.328641
0.071579	37.485179
0.076316	37.631392
0.081053	37.769490
0.085789	37.900369
0.090526	38.023944
0.095263	38.142016
0.100000	38.254524