LISTA 4

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, totalizando 50 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco"e associe à questão.
5. Evite que as soluções de duas ou mais questões estejam em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: “Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, “48 - Q1”, e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, “p.1.”
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente individual.
9. Boa sorte e bons estudos!

Prazo: 12/05/2024 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$kg^{-2}	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314$ N $\cdot$ m $\cdot$ mol$^{-1} \cdot$K^{-1}	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$K^{-4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8$ km $\cdot$ s$^{-1} \cdot$Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Tamanho Angular em Função do Redshift (10 pontos)**
Um objeto de tamanho linear L (perpendicular à linha de visada) subentende um pequeno ângulo α. Suponha que o o objeto e o observador são ambos comóveis e que o redshift do objeto é z. Para um tamanho linear fixo, o ângulo é uma função do redshift: $\alpha = \alpha(z)$.

(a) Se $\alpha^2 \ll 1$, $\alpha \propto L$. Encontre a constante de proporcionalidade para um universo de Einstein-de-Sitter ($k = 0$ e $a \propto t^{2/3}$). Deixe sua resposta em termos de z, da velocidade da luz, c, e do tempo atual, t_0.
Dica: Se necessário, utilize que

$$\int_{x_0}^{x} x^n \, dx = \frac{1}{n+1}(x^{n+1} - x_0^{n+1})$$

(b) Encontre o valor de z para o qual α é mínimo.
Dica: Se necessário, utilize que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

(c) Se as galáxias se formaram há muito tempo e têm um mesmo tamanho típico de 5 kpc, qual é o tamanho angular mínimo de uma galáxia em um universo de Einsten-de-Sitter, em milissegundos de arco (mas)?

Solução:

(a) Sabemos que α e L estão relacionados por meio da distância ângulo diâmetro, d_A:

$$\alpha = \frac{L}{d_A}$$

Ainda, d_A é igual a distância própria do objeto no momento de emissão, ou seja,

$$d_A = d_p(t_e) = a_e d_p(t_0)$$

Onde a_e é tal que

$$a_e = \frac{1}{1+z}$$

e $d_p(t_0)$ é dado por

$$d_p(t_0) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

Como o universo é de Einsten-de-Sitter, sabemos que

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

Subsituindo na integral:

$$d_p(t_0) = ct_0^{2/3}\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{t^{2/3}} = 3ct_0^{2/3}(t_0^{1/3} - t_e^{1/3})$$

Que também pode ser escrito como

$$d_p(t_0) = 3ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right]$$

Utilizando denovo a relação entre o tempo e o fator de escala:

$$\frac{a_e}{a_0} = \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{2/3} = \frac{1}{1+z}$$

$$\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3} = (1+z)^{-1/2}$$

Substituindo na expressão da distância própria:

$$d_p(t_0) = 3ct_0[1 - (1+z)^{-1/2}]$$

Assim, a distância ângulo diâmetro é dada por

$$d_A = \frac{3ct_0[1 - (1+z)^{-1/2}]}{1+z} = \frac{3ct_0[(1+z)^{1/2} - 1]}{(1+z)^{3/2}}$$

Finalmente,

$$\boxed{\alpha = \frac{L}{3ct_0} \frac{(1+z)^{3/2}}{[(1+z)^{1/2} - 1]}}$$

(b) Devemos minimizar a seguinte expressão:

$$\frac{(1+z)^{3/2}}{[(1+z)^{1/2} - 1]}$$

Derivando e igualando a zero:

$$\frac{3}{2}(1+z)^{1/2}[(1+z)^{1/2} - 1] - \frac{1}{2}(1+z)^{3/2}(1+z)^{-1/2} = 0$$

Multiplicando ambos os lados por 2 e dividindo por $1 + z$:

$$3(1+z)^{-1/2}[(1+z)^{1/2} - 1] - 1 = 0$$

$$3[1 - (1+z)^{-1/2}] = 1$$

Isolando $1 + z$:

$$(1+z)^{1/2} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{z = \frac{5}{4}}$$

(c) Substituindo o valor de z encontrado na expressão de α:

$$\alpha_{min} = \frac{L}{3ct_0} \frac{(3/2)^3}{(1/2)} = \frac{9L}{4ct_0}$$

Para encontrar o valor de t_0, utilizaremos a definição do parâmetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt}(\ln a) = \frac{2}{3t}$$

No tempo atual,

$$H_0 = \frac{2}{3t_0}$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

Dessa forma,

$$\boxed{\alpha_{min} = \frac{27H_0L}{8c} \approx 786{,}6\,\text{mas}}$$

2. Incerteza de Medidas Fotométricas (10 pontos)

Geométrico planeja determinar a magnitude de várias estrelas na banda B (centrada em $\lambda_B = 436\,\text{nm}$) ao longo de uma semana. Para isso, ele utiliza seu equipamento formado por um telescópio e um detector de fótons. Como os detectores são governados pela estatística de Poisson, quando esperamos observar N fótons vindo de uma fonte num dado intervalo de tempo, o número realmente detectado flutua por um valor de $\pm\sqrt{N}$.

(a) Em um dos dias da semana, o céu observado por Hemétrio está extremamente limpo, de forma que o ruído de fundo é desprezível. Ele, então, decide determinar a magnitude m_B de uma estrela na banda B. Sabendo que $m_B = 20$, quantos fótons precisam ser detectados para que a medida realizada por Geométrico possua precisão de $\pm 0{,}02$? Você pode utilizar que a eficiência de detecção do sistema telescópio+coletor é igual a 100%.
Dica: Se necessário, utilize que

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x\ln 10}$$

(b) Qual seria o tempo de exposição necessário com um telescópio de diâmetro igual a 1 m para medir a magnitude $m_B = 20$ com a precisão do item anterior?

(c) Durante um dia um pouco mais nublado, Geométrico decide observar uma estrela mais fraca do que a anterior ($m'_B = 24$) com a mesma precisão. Assuma que o brilho superficial de fundo do céu é de $22{,}5\,\text{mag}\cdot\text{arcsec}^{-2}$ na banda B e que os efeitos atmosféricos fazem com que a luz das estrelas seja espalhada em um círculo com diâmetro de 1 arcsec. Quantos fótons são necessários para fazer a medida da magnitude dessa estrela?

(d) Calcule o tempo de exposição necessário para a medição do item anterior com telescópios de diâmetro 1 m e 4 m, respectivamente.

Solução:
ERRATA: No enunciado dessa questão, deveriam ter sido fornecidos a magnitude de uma estrela de referência na banda B e seu fluxo nessa banda (por exemplo, para o Sol, $m_{\odot,B} \approx 26{,}1$ e $F_{\odot,B} \approx 1{,}0 \cdot 10^3$). Como o candidato teoricamente não poderia utilizar dados externos em sua solução, serão aceitas respostas utilizando a magnitude do Sol no visível, como na solução abaixo (incorreta). Também serão aceitas respostas puramente algébricas ou utilizando dados externos.

(a) A energia coletada por unidade de tempo pelo telescópio é igual ao fluxo da estrela na banda B multiplicado pela área da objetiva do telescópio:

$$F_B \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

O número de fótons coletados por unidade de tempo é igual à essa quantidade dividida pela energia de um fóton individual (hc/λ_B):

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{\pi D^2 F_B \lambda_B}{4hc}$$

$$F_B = \frac{4Nhc}{\pi D^2 \lambda_B \Delta t}$$

Pela equação de Pogson, comparando a magnitude da estrela com a do Sol:

$$m_B - m_\odot = -2{,}5 \log \left(\frac{F_B}{F_\odot} \right)$$

Substituindo a expressão de F_B:

$$m_B = m_\odot - 2{,}5 \log \left(\frac{4Nhc}{\pi D^2 \lambda_B F_\odot \Delta t} \right)$$

Assumindo que podemos medir o intervalo de tempo Δt com incerteza desprezível, a única fonte de erro na determinação de m_B é o número de N de fótons coletados. Podemos escrever, sendo C uma constante aditiva:

$$m_B = -2{,}5 \log N + C$$

Pela fórmula de propagação de erros:

$$\Delta m_B = \left| \frac{\partial m_B}{\partial N} \right| \Delta N = \frac{2{,}5}{N \ln 10} \Delta N$$

Como o erro da distribuição de Poisson é $\Delta N = \sqrt{N}$:

$$\Delta m_B = \frac{2{,}5}{\ln 10} \sqrt{N}$$

Isolando N:

$$N = \left(\frac{2{,}5}{\Delta m_B \ln 10} \right)^2$$

Assim, o número de fótons necessário é dado por

$$\boxed{N = \left(\frac{2{,}5}{\Delta m_B \ln 10} \right)^2 \approx 2{,}95 \cdot 10^3}$$

(b) No item anterior, obtemos a seguinte equação:

$$m_B = m_\odot - 2{,}5 \log \left(\frac{4Nhc}{\pi D^2 \lambda_B F_\odot \Delta t} \right)$$

Isolando o intervalo de tempo:

$$\Delta t = \frac{4Nhc}{\pi D^2 \lambda_B F_\odot} 10^{+0{,}4(m_B - m_\odot)}$$

Ainda, podemos escrever o fluxo do Sol como sendo

$$F_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}$$

Substituindo e calculando os valores:

$$\Delta t = \frac{16 N a_\oplus^2 hc}{D^2 \lambda_B L_\odot} 10^{+0{,}4(m_B - m_\odot)}$$

$$\boxed{\Delta t \approx 6{,}02\,\mathrm{s}}$$

(c) A magnitude do brilho de fundo do céu $m_{ceu,B}$ na região da estrela é dada por

$$m_{ceu,B} = \mu_{ceu,B} - 2{,}5\log\left(\frac{\pi\theta^2/4}{1}\right)$$

Onde $\mu_{ceu,B}$ é o brilho superficial do céu na banda B e $\theta = 1\,\text{arcsec}$. Substituindo os valores:

$$m_{ceu,B} \approx 22{,}76$$

Seja N o número total de fótons coletados pelo detector e N_{ceu} o número de fótons coletados vindos do céu. O número de fótons vindos da estrela é, então, $N_* = N - N_{ceu}$. Pela equação de Pogson:

$$m'_B = m_{ceu,B} - 2{,}5\log\left(\frac{N - N_{ceu}}{N_{ceu}}\right)$$

Onde, dado um valor de intervalo de tempo, podemos obter N_{ceu} através de uma equação semelhante à encontrada no item (a):

$$N_{ceu} = \frac{\pi D^2 F_{ceu,B}\lambda_B}{4hc}\Delta t$$

Pela fórmula de propagação de erro:

$$\Delta m'_B = 2{,}5\frac{N_{ceu}}{N - N_{ceu}}\frac{\Delta N}{N_{ceu}\ln 10} = \frac{2{,}5}{\ln 10}\frac{\sqrt{N}}{N - N_{ceu}}$$

Podemos obter N_{ceu} em função de N a partir da equação obtida anteriormente:

$$m'_B = m_{ceu,B} - 2{,}5\log\left(\frac{N - N_{ceu}}{N_{ceu}}\right)$$

$$N_{ceu} = \frac{N}{1 + 10^{-0{,}4(m'_B - m_{ceu,B})}}$$

Substituindo na equação de $\Delta m'_B$:

$$\Delta m'_B = \frac{2{,}5}{\ln 10}\frac{\left[1 + 10^{+0{,}4(m'_B - m_{ceu,B})}\right]}{\sqrt{N}}$$

Resolvendo para N e substituindo os valores:

$$N = \left(\frac{2{,}5}{\ln 10}\frac{\left[1 + 10^{+0{,}4(m'_B - m_{ceu,B})}\right]}{\Delta m'_B}\right)^2$$

$$\boxed{N \approx 5{,}02 \cdot 10^4}$$

(d) Da solução do item anterior, o número de fótons vindos do céu coletados é

$$N_{ceu} = \frac{N}{1 + 10^{-0{,}4(m'_B - m_{ceu,B})}} \approx 3{,}80 \cdot 10^4$$

Em analogia com o item (b), temos a seguinte equação para o tempo de exposição necessário:

$$\Delta t = \frac{16 N_{ceu} a_\oplus^2 hc}{D^2 \lambda_B L_\odot} 10^{+0{,}4(m_{ceu,B} - m_\odot)}$$

Para $D = 1\,\text{m}$:

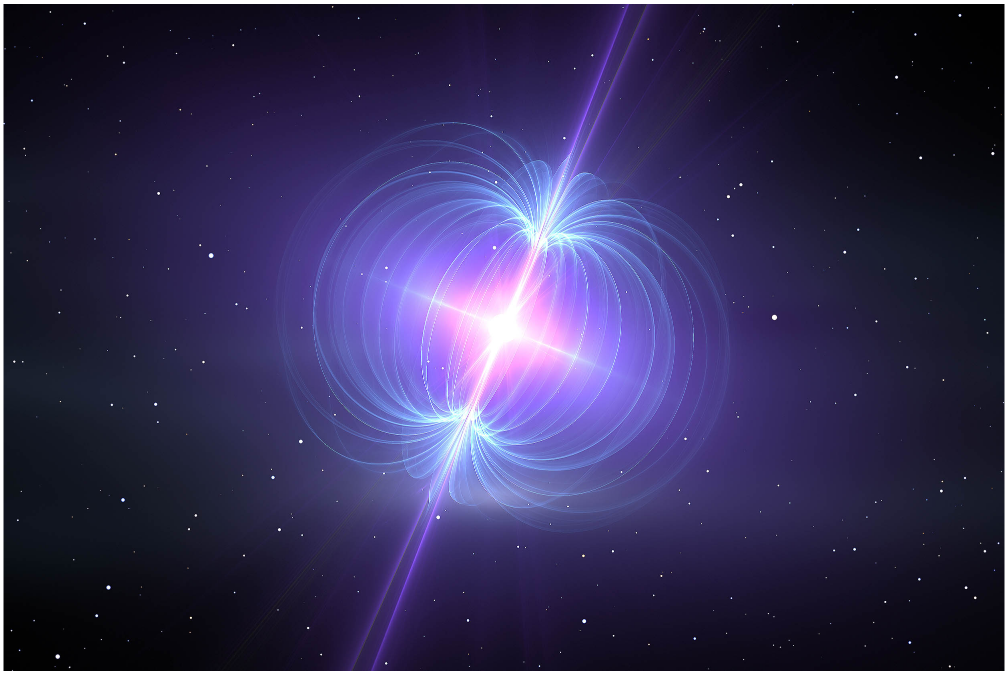
$$\boxed{\Delta t_1 \approx 988\,\text{s} \approx 16{,}5\,\text{min}}$$

Para $D = 4\,\text{m}$:

$$\boxed{\Delta t_4 \approx 61{,}8\,\text{s} \approx 1{,}03\,\text{min}}$$

3. Radiação Síncrotron (15 pontos)

Nessa questão, estudaremos um modelo simplificado visando estudar a radiação síncrotron de estrelas de nêutrons e, com isso, obter importantes parâmetros para a astrofísica dos pulsares.



Para o que segue, assuma que o campo magnético de uma estrela de nêutrons possa ser modelado como a de um dipolo magnético $\vec{m}$ em seu centro, de tal modo que, em coordenadas polares:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

em que θ é o ângulo polar contado a partir do polo norte magnético da estrela no sentido horário. Além disso, considere que o dipolo está inclinado de α em relação ao eixo de rotação da estrela. Considere também que o campo magnético na superfície do equador magnético da estrela é dado por B_0, que sua massa é M e que seu raio é R. Uma vez de posse disso, podemos modelar a radiação eletromagnética emitida pela estrela.

Nota: Embora a equação acima e outras que serão apresentadas ao longo da questão tenham se originado do eletromagnetismo, neste problema não é necessário saber nada de eletromagnetismo, e precisa ser utilizado apenas as equações dadas. Em muitas questões de olimpíadas internacionais, como IOAA e OLAA, isso já é um padrão e, portanto, adotamos-o para os treinamentos. Recomenda-se também a consulta do livro Apostila Magna.

Dado: Se necessário, use as seguintes relações ao longo da questão:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad e \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Momento de inércia de uma esfera maciça de raio R e massa M:

$$I = \frac{2MR^2}{5}$$

(a) Mostre que o módulo do momento de dipolo magnético da estrela pode ser escrito da forma:

$$m = \frac{4\pi B_0 R^3}{\mu_0}$$

(b) Uma vez que a estrela está rotacionando, o seu vetor de dipolo magnético $\vec{m}$ irá variar com o tempo em direção, porém não em magnitude. Mostre, a partir disso, que:

$$|\ddot{\vec{m}}| = \omega^2 m \sin\alpha$$

em que ω é a velocidade angular de rotação da estrela e $\ddot{\vec{m}}$ é a segunda variação temporal do vetor $\vec{m}$.

(c) Sabendo que a potência irradiada por um dipolo magnético acelerado pode ser escrita na forma:

$$P_{ot} = -\frac{\mu_0|\ddot{\vec{m}}|^2}{6\pi c^3}$$

calcule a potência dissipada devido a radiação síncrotron emitida pela estrela em função de B_0, R, ω, α e constantes físicas.

(d) Calcule também a frequência ν das ondas eletromagnéticas emitidas na forma de radiação.

(e) Uma vez de posse da potência dissipada pela estrela, mostre que a variação temporal de sua velocidade angular, devido a radiação síncrotron, pode ser escrita da forma:

$$\dot{\omega} = -\frac{20\pi B_0^2 R^4 \omega^3 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}$$

(f) Conclua, a partir do resultado anterior, que a velocidade angular da estrela em função do tempo é dada por:

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\beta t}}$$

em que ω_0 é sua velocidade angular inicial, e determine o valor de β em função de $B_0, \omega_0, M, R, \alpha$ e constantes físicas. Responda também qual deve ser o valor t para que $\omega \to 0$. Para esse modelo, podemos afirmar que o momento angular da estrela se conserva? Justifique dizendo se há ou não um torque dissipativo atuando no sistema.

(g) Sabendo que o Pulsar do Caranguejo possui os seguintes parâmetros:

M ($M_\odot$)	R (km)	α ($\circ$)	ω (rad/s)	$\dot{\omega} \times 10^{-9}$ (rad/s^2)
1,40	10,5	90,0	189	−2,39

calcule o campo magnético B_0 na superfície de seu equador magnético, seu momento de dipolo magnético m e a frequência ν das ondas eletromagnéticas emitidas devido a sua radiação sincrotron (deixe sua resposta no sistema internacional de unidades).

(h) Uma boa estimativa para o tempo de vida de um pulsar corresponde ao tempo para que sua velocidade angular reduza pela metade. Com base nisso, determine, por fim, o tempo de vida do Pulsar do Caranguejo.

Solução:

(a) Nesse caso, podemos utilizar a fórmula dada no enunciado e o fato de que $B = B_0$ no equador da estrela ($\theta = 90°$), para obter que:

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}$$

desse modo:

$$\boxed{m = \frac{4\pi R^3 B_0}{\mu_0}}$$

(b) Como o dipolo está rotacionando, o seu vetor irá variar em direção, porém não em magnitude. Por analogia à aceleração centrípeta em movimentos circulares, sabemos que:

$$a = \omega^2 r \sin\alpha$$

No contexto da questão, $a \to |\ddot{\vec{m}}|$ e $r \to m$, tal que:

$$\boxed{|\ddot{\vec{m}}| = \omega^2 m \sin\alpha}$$

Soluções alternativas que utilizam de derivações mais exatas e complexas também serão aceitas.

(c) Sabemos que:

$$|\ddot{\vec{m}}| = \omega^2 m \sin\alpha = \frac{4\pi\omega^2 R^3 B_0 \sin\alpha}{\mu_0}$$

Logo, substituindo na fórmula dada, obtemos:

$$\boxed{P_{ot} = \frac{8\pi\omega^4 R^6 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 c^3}}$$

(d) Nesse item, basta perceber que a frequência das ondas eletromagnéticas emitidas devido à aceleração do dipolo acelerado será igual a de seu movimento circular. Logo:

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Soluções alternativas que considerem a energia do fóton como $E = h\nu$ estão erradas e, portanto, serão penalizadas.

(e) Para resolução desse item, devemos perceber que a potência dissipada pela radiação síncrotron desacelera o pulsar, de modo que sua velocidade angular irá diminuir ao longo do tempo. Apresentaremos duas soluções:
Solução Sem Cálculo:

$$P_{ot} = \tau\omega$$

em que τ é o torque dissipativo que atua no sistema. Sabemos, contudo, que:

$$\tau = -I\dot{\omega}$$

Desse modo:

$$P_{ot} = -I\omega\dot{\omega}$$

Substituindo o valor de P_{ot} e de I, obtemos que:

$$\frac{8\pi\omega^4 R^6 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 c^3} = -\frac{2MR^2\omega\dot{\omega}}{5}$$

de modo que, manipulando, obtemos:

$$\boxed{\dot{\omega} = -\frac{20\pi\omega^3 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}}$$

À seguir segue uma solução alternativa também válida.

Solução Por Cálculo:

$$P_{ot} = \frac{dE}{dt}$$

ou seja:

$$P_{ot} = \frac{I}{2}\frac{d\omega^2}{dt}$$

logo:

$$P_{ot} = I\omega\dot{\omega}$$

Substituindo o valor de P_{ot} e de I, obtemos que:

$$\frac{8\pi\omega^4 R^6 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 c^3} = -\frac{2MR^2\omega\dot{\omega}}{5}$$

de modo que, manipulando, obtemos:

$$\boxed{\dot{\omega} = -\frac{20\pi\omega^3 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}}$$

(f) Novamente, apresentaremos duas soluções.
Solução sem Cálculo:
Substituiremos nossa variável ω pelo período P de rotação do pulsar. Tal que:

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

Consequentemente, considerando uma pequena variação:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{P+\Delta P} - \frac{2\pi}{P}$$

Para pequenos valores de ΔP, podemos utilizar as aproximações binomiais, de modo que obtemos:

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi}{P^2}\Delta P$$

dividindo ambos os lados por Δt, obtemos que:

$$\dot{\omega} = -\frac{2\pi}{P^2}\dot{P}$$

Assim:

$$\frac{2\pi\dot{P}}{P^2} = \frac{20\pi R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}\left(\frac{2\pi}{P}\right)^3$$

ou seja:

$$\dot{P} = \frac{80\pi^3 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}\frac{1}{P}$$

de tal modo:

$$\sum_{P_0}^{P} P\Delta P = \frac{80\pi^3 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}\sum_{0}^{t}\Delta t$$

Perceba que o primeiro somatório é equivalente à área do gráfico da reta $f(P) = P$ e o segundo é igual à t, tal que:

$$\frac{P^2 - P_0^2}{2} = \frac{80\pi^3 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}t$$

substituindo novamente os valores de P em função de ω e manipulando, obtemos que:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{40\pi\omega_0^2 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}}}$$

tal que:

$$\boxed{\beta = \frac{40\pi\omega_0^2 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}}$$

quando $\omega \to 0$, temos que $t \to \infty$. O momento angular não é conservado e, portanto, há um torque dissipativo atuando no sistema, como vimos anteriormente.

Solução por Cálculo:

Acompanhe:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{20\pi\omega^3 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}$$

então:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^3} = -\frac{20\pi R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3} \int_0^t dt$$

logo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) = \frac{20\pi R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3} t$$

ou seja:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{40\pi R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3} t$$

Tal que, manipulando, obtemos, por fim:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{40\pi\omega_0^2 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}}}$$

tal que:

$$\boxed{\beta = \frac{40\pi\omega_0^2 R^4 B_0^2 \sin^2\alpha}{3\mu_0 M c^3}}$$

quando $\omega \to 0$, temos que $t \to \infty$. O momento angular não é conservado e, portanto, há um torque dissipativo atuando no sistema, como vimos anteriormente.

(g) Pelas fórmulas obtidas anteriormente, sabemos que:

$$\boxed{B_0 = \sqrt{\frac{3\mu_0 M c^3 |\dot{\omega}|}{20\pi R^4 \omega^3 \sin^2\alpha}} = 3{,}63 \times 10^8 \text{ T}}$$

$$\boxed{m = \frac{4\pi B_0 R^3}{\mu_0} = 4{,}20 \times 10^{27} \text{ Am}^2}$$

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 30{,}1 \text{ Hz}}$$

(h) Nesse caso,

$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\beta t}}$$

Assim:

$$\boxed{t = \frac{3}{\beta} = 3{,}77 \times 10^3 \text{ anos}}$$

4. Medindo o Universo Acelerado (15 pontos)

Neste problema, mediremos a aceleração do universo.

Na Lista 3, aprendemos que para um universo de geometria euclidiana ("plano"), a distância de luminosidade pode ser escrita como:

$$d_L(z) = (1+z)\frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}.$$

Podemos aplicar a lei de Pogson (modificada para distâncias expressas em Mpc ao invés de pc) pode ser escrita como:

$$\mu(z, L) = m(z) - M(L) = 5\log_{10} d_L + 25$$

(a) Use a tabela no fim da página e a expansão de Taylor próxima de $z = 0$ de d_L:

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left(z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2\right)$$

onde

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{aH^2},$$

e **obtenha** uma estimativa com incerteza para a constante de Hubble, H_0 e uma estimativa para q_0, sem incerteza.

Dica: Você pode usar sua calculadora para realizar uma regressão quadrática.

(b) **Mostre** que num universo somente com matéria e energia escura,

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}.$$

(c) **Calcule** $\Omega_{\Lambda,0}$ sabendo que $\Omega_{m,0} = 0.32$

Tabela:

z	μ
0.010000	33.113069
0.014737	33.961197
0.019474	34.577963
0.024211	35.056811
0.028947	35.451737
0.033684	35.789394
0.038421	36.081266
0.043158	36.341311
0.047895	36.575505
0.052632	36.787591
0.057368	36.981852
0.062105	37.162193
0.066842	37.328641
0.071579	37.485179
0.076316	37.631392
0.081053	37.769490
0.085789	37.900369
0.090526	38.023944
0.095263	38.142016
0.100000	38.254524

Solução:

(a) Primeiro, temos que converter a tabela para uma de z e d_L. Assim, temos:
Tabela:

z	d_L
0.010000	41.938588
0.014737	61.978263
0.019474	82.336538
0.024211	102.650767
0.028947	123.125328
0.033684	143.839710
0.038421	164.533070
0.043158	185.465101
0.047895	206.586054
0.052632	227.781370
0.057368	249.098091
0.062105	270.669051
0.066842	292.232289
0.071579	314.076758
0.076316	335.952904
0.081053	358.012343
0.085789	380.254008
0.090526	402.521238
0.095263	425.013965
0.100000	447.615173

fazendo uma regressão, temos:

$$d_L = A + Bz + Cz^2.$$
$$A = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{Mpc},\ B = 4163.08957\ \text{Mpc},\ C = 3132.28708\ \text{Mpc}$$

Podemos desprezar a contribuição de A, assim temos:

$$H_0 = 72.01$$
$$q_0 = -0.50$$

Para pontuação completa em relação aos valores (não às incertezas), serão aceitos valores de H_0 entre 72.10 e 79.90 e de q_0 entre 0.51 e 0.49. Para metade dos pontos, serão aceitos valores de H_0 entre 72.30 e 79.70 e de q_0 entre 0.52 e 0.48

Em relação à incerteza, a maneira de estimá-la é a seguinte:

- primeiro, é necessário entender os parâmetros da regressão como parâmetros de um modelo.
- Segundo, se você obtiver uma estimativa de d_L usando esse modelo, você não obterá exatamente os mesmos valores que os dados.
- Terceiro, usando essa diferença, mais especificamente a diferença fracional

$$\delta_f d_L = \frac{d_{L,\ modelo} - d_{L,\ dado}}{d_{L,\ dado}},$$

podemos obter uma estimativa da incerteza fracional. Aqui estamos usando δ_f para significar a incerteza fracional, e não a incerteza absoluta.

- Por último, como estamos desprezando a incerteza em q_0 e desprezando uma contribuição de A, relacionamos ambas as incertezas usando uma relação conhecida de análise de dados:

$$\delta_f H_0 = \delta_f d_L$$

Assim, temos a seguinte tabela:

$\delta_{f,i} d_L$
7.484575511926276041e-08
9.860529630472184010e-07
6.589282878048996936e-07
1.153421614271613489e-08
2.707457241718254501e-08
9.279146249634903363e-08
1.048608385270575261e-07
7.815897721167439500e-08
6.356499346682421724e-11
5.720907371284308242e-09
3.564532996543798380e-08
1.465525968856519544e-08
1.459562321826397369e-08
1.441288240034279224e-08
4.471090761221952600e-11
7.696203957526817047e-10
2.867888727307997314e-08
9.520153457651147181e-13
2.251638215752793399e-09
4.098929681832619940e-10

Supondo que cada medição é completamente independente das outras e que todas elas advêm de uma mesma distribuição estatística, pode-se adicionar os quadrados dos termos e dividir pelo número de linhas $N = 20$ na tabela menos o número de graus de liberdade (nesse caso, 1), podemos obter uma estimativa conservadora da incerteza de H_0. Com isso:

$$\delta_f H_0 = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N} \delta_{f,i}^2}$$

$$\sigma_{H_0} = H_0 * \delta_f H_0 = 0.024$$

Aqui, optaremos por usar 2σ como incerteza. Assim, temos:

$$H_0 = 72.01 \pm 0.05$$

Serão aceitas incertezas entre 0.01 e 0.10.

Observação: muitos alunos transformaram esse problema num problema de regressão linear, usando como variável dependente d_L/z. A partir disso, se utilizaram de fórmulas clássicas de regressão para incerteza dos coeficientes. Apesar disso funcionar neste caso, já que usamos dados simulados, não era parte do intuito do problema. O intuito do problema era fazer o estudante pensar em outros modos de estimar incertezas, que muitas vezes são úteis numa prova de análise de dados. Dito isso, se o seu valor estiver dentro dos valores aceitos mencionados acima, a pontuação completa relativa à incerteza será conferida.

(b) Para mostrar que o parâmetro de desaceleração q é igual a $\frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda$ em um universo composto de energia escura e matéria não-relativística, começamos a partir da definição do parâmetro de desaceleração:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

onde a é o fator de escala do universo. A segunda equação de Friedmann pode ser usada para encontrar $\ddot{a}$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

Para um universo com energia escura e matéria não-relativística, a densidade total ρ e a pressão p são as somas das contribuições da matéria (que tem pressão desprezível) e da energia escura. Se denotarmos ρ_m como a densidade da matéria e ρ_Λ como a densidade correspondente à energia escura (com uma equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$), então:

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda, \quad p = 0 + p_\Lambda = -\rho_\Lambda$$

Substituindo estes na segunda equação de Friedmann, obtemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\Lambda - 3\rho_\Lambda) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m - 2\rho_\Lambda)$$

Para expressar isso em termos dos parâmetros de densidade Ω_m e Ω_Λ, que são definidos como $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{\text{crit}}}$ e $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{crit}}}$, onde $\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ é a densidade crítica, usamos a equação de Friedmann $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$ para expressar ρ_m e ρ_Λ em termos de Ω_m e Ω_Λ, respectivamente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{\Omega_m \rho_{\text{crit}}}{2} - 2\Omega_\Lambda \rho_{\text{crit}}\right) = -\frac{1}{2}H^2\Omega_m + H^2\Omega_\Lambda$$

Substituindo $H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2}$ (da primeira equação de Friedmann) e reorganizando, encontramos:

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}\dot{a}^2\frac{\Omega_m}{a} + \dot{a}^2\frac{\Omega_\Lambda}{a}$$

Agora substituímos de volta na definição de q:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\left(-\frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_\Lambda\right) = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda$$

Isso nos dá a expressão abaixo para o parâmetro de desaceleração:

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda$$

Finalmente, colocando no tempo atual, temos:

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$$

(c) Imediatamente usando a equação obtida no item anterior, o valor de q_0 obtido no item (a) e o valor de $\Omega_{m,0}$ dado no enunciado, temos: $\Omega_{\Lambda,0} = 0.66$.