



PROVA TEÓRICA P1  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

---

## Instruções Gerais

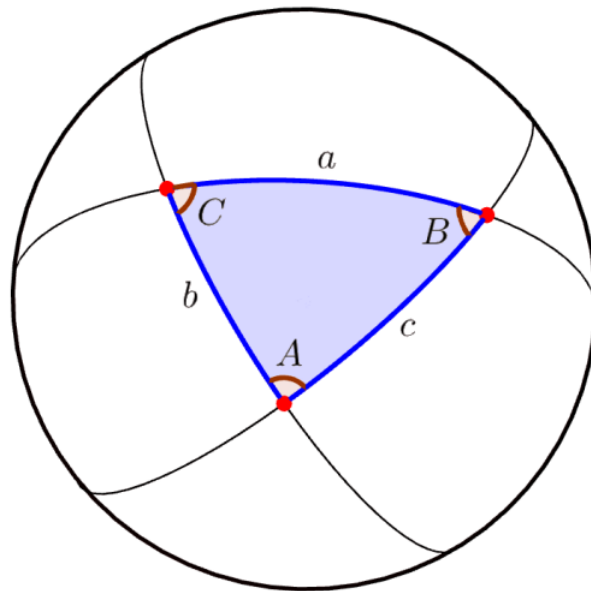
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);;
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas e as cartas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Equação de Kepler :

$$M = E - e \cdot \text{sen}E$$

- Relação força-potencial:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Derivada de uma polinomial  $f(x) = a \cdot x^n$ :

$$\frac{df}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

## Questões

1. **Radiação de Corpo Negro (15 pontos)** Em relação à radiação e à lei de Planck para a radiação, marque verdadeiro ou falso, e justifique com uma ou duas frases:

A fórmula para a lei de Planck para a radiação pode ser útil:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- (a) Sabemos que para um corpo negro (uma estrela idealizada) de temperatura  $T$ , o comprimento de onda no qual temos maior intensidade específica é  $\lambda_{max} = b/T$ . Assim, podemos concluir que a frequência na qual temos maior intensidade específica é  $\nu_{max} = c/\lambda_{max}$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.
- (b) Se aumentarmos a temperatura do corpo negro, a intensidade específica aumenta para todos os comprimentos de onda.
- (c) Se aumentarmos a temperatura do corpo negro, a intensidade específica aumenta para todas as frequências.
- (d) Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Rayleigh-Jeans,  $B(\nu, T) = 2\nu^2 k_B T / c^2$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann.
- (e) Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Wien,  $B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/k_B T}$ , onde  $h$  é a constante de Planck não reduzida.
2. **Mapa de pulsares (20 pontos)** Você informaria seu endereço para um desconhecido? Esse é o intuito dos mapas de pulsares, a bordo das missões Voyager: comunicar a localização da Terra para qualquer civilização alienígena que encontre uma das naves.

Suponha um mapa que apresente um conjunto característico de pulsares, bem como os ângulos entre eles, dois a dois, vistos a partir da Terra. Considere que, no conjunto escolhido, não haja configurações especiais, como três colineares ou quatro coplanares. Qual a menor quantidade de pulsares que especifica inequivocamente a posição do planeta? Justifique geometricamente sua resposta.

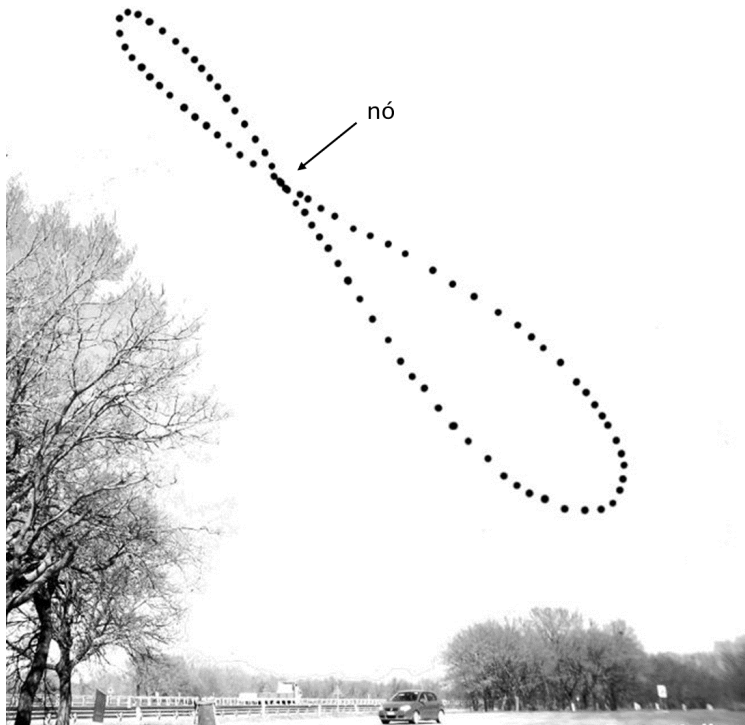
3. **Analema (20 pontos)** A equação do tempo é definida como a diferença entre o tempo solar verdadeiro e o tempo solar médio (que transcorre em ritmo constante, sem considerar fuso-horário ou horário de verão). Para pequenas excentricidades e inclinações orbitais, ela pode ser escrita como a soma de duas componentes:

$$E.T. = -2e \cdot \text{sen}[k_1 \cdot M] + \tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}[k_2 \cdot (M + \lambda_P)]$$

Em que  $e$  é a excentricidade,  $\varepsilon$  a inclinação orbital,  $M$  a anomalia média e  $\lambda_P$  a longitude eclíptica do periastro.

- (a) Determine as constantes  $k_1$  e  $k_2$ . **Justifique** sua resposta.
- (b) Se sobrepusermos fotografias do Sol ao longo do ano tiradas num horário fixo, obteremos a figura do analema. Determine a declinação solar no ponto de nó do analema.

**Dica:** Para calcular a declinação solar em função da anomalia média, talvez compense desprezar a excentricidade da Terra.



4. **Binárias (25 pontos)** O grande astrônomo Eduardo está observando um sistema binário de órbita com  $i = 90^\circ$ , em que a estrela B tem  $\frac{2}{3}$  da massa da outra. Ele checa os registros das estrelas e vê os dados das coordenadas das estrelas para duas datas diferentes:

Tabela 1: Posição das estrelas

Data	Estrela	Ascensão Reta	Declinação
13 de janeiro de 2024	Componente A	$7^h 23^m 38,96^s$	$36^\circ 42' 53,77''$
13 de janeiro de 2024	Componente B	$7^h 23^m 39,09^s$	$36^\circ 42' 55,27''$
11 de julho de 2024	Componente A	$7^h 23^m 38,97^s$	$36^\circ 42' 53,69''$
11 de julho de 2024	Componente B	$7^h 23^m 39,08^s$	$36^\circ 42' 55,52''$

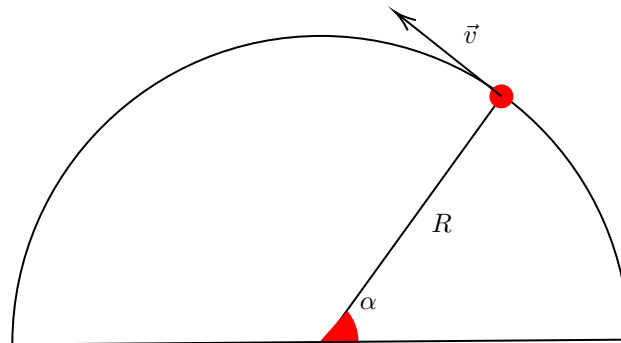
(a) Eduardo, sempre pensando em criar novas questões, quer descobrir mais informações sobre o sistema. Assim, descubra a distância até esse sistema.

**Dica:** Pode ser útil calcular a paralaxe do sistema.

Eduardo se deparou com um segundo sistema binário e ficou muito surpreso em ver que ele estava a mesma distância da Terra que o primeiro sistema. As velocidades tangenciais mínimas medidas das componentes foram  $\mu_B = 99$  mas/ano e  $\mu_A = 64$  mas/ano e a velocidade máxima de afastamento da estrela A foi  $u_A = 14,38$  km/s. Além disso, o período medido do sistema é  $T = 16,76$  anos.

(b) Agora, descubra uma informação muito importante do sistema: qual a massa de cada componente? Considere que suas órbitas são circulares.

5. **Corra como se não houvesse amanhã! (30 pontos)** Davi está amando seu tempo como estudante de física na Universidade de São Paulo ( $\varphi = 23,56^\circ$  S,  $\lambda = 46,64^\circ$  O). É como uma luva para a sua mão, tão natural como a luz do dia. Gostou tanto que entrou num pequeno clube de astronomia para passar mais tempo observando objetos astrofísicos como hobby. Em um dos estudos em grupo, o líder do clube propôs a Davi que ele subisse uma montanha artificial que tem o formato de um hemisfério esférico, de raio  $R = 2$  km, que fica bem no centro de São Paulo, no dia 20 de junho de 2024. Com um telescópio de 5 kg nas mãos, Davi quis manter o centro do Sol no horizonte quanto tempo fosse possível durante sua subida. Por isso, assim que o centro do Sol tocou o horizonte, Davi começou a percorrer o mais rápido que podia a superfície da montanha, com velocidade  $v = 30$  m/s.



Com base nisso, por quanto tempo Davi será capaz de manter o Sol no horizonte?

**Dica:** Se necessário, utilize que, para  $x$  bem pequeno,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

6. **Fica frio aí! (30 pontos)** Em um gélido inverno, refletindo sobre o seu futuro, Mychel acaba se lembrando da célebre frase do cientista alemão Rudolf Clausius, onde ele afirmava que:

“Há um destino final sugerido para o universo, no qual o universo se reduziu a um estado sem energia livre termodinâmica e, portanto, não pode mais sustentar processos que consomem energia.”

Intrigado, Mychel decide tentar demonstrar o resultado previsto por Clausius e, para isso, ele supõe que nosso Universo estará sempre em expansão.

- (a) Em dúvidas de por onde começar, Mychel decide encontrar uma expressão para a temperatura do Universo em função do redshift cosmológico da CMB, ou seja, da variação relativa do comprimento de onda da CMB entre um tempo  $t'$  e a época atual  $t_0$ . Encontre e esboce o gráfico da expressão encontrada por Mychel. Além disso, justifique a escolha dele em usar a CMB para estimar a temperatura do Universo.

- (b) Mychel decide tentar prever o comportamento da entropia do Universo ao longo do tempo. Para isso, ele adere ao modelo mais simples possível: a interação por contato entre dois corpos com capacidades caloríficas  $C_1$  e  $C_2$ , e temperaturas  $T_1 > T_2$ .  
Esboce o gráfico do comportamento da entropia do Universo, encontrado por Mychel, justificando sua resposta com cálculos.
- (c) Com apenas essas informações, Mychel cogita que já é capaz de justificar a frase do cientista.  
Sendo assim, com base em nossos resultados anteriores justifique o destino final sugerido por Clausius.

### 7. Modelamento Óptico das Lentes Gravitacionais (30 pontos)

O fenômeno das lentes gravitacionais é considerado um dos mais fascinantes por diversos astrofísicos ao redor do mundo. Ele foi descoberto e provado a partir da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, e até hoje gera diversos impactos positivos para ciência. Nessa questão, abordaremos um modelamento óptico visando estudar as lentes gravitacionais e a condição para que elas sejam observadas, seguindo os postulados da física moderna (e não clássica). Sabe-se que, pela Teoria da Relatividade Geral, a velocidade da luz quando na presença de um potencial gravitacional é dada por:

$$c_{eff} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c$$

Uma vez de posse disso, podemos calcular o índice de refração da luz  $n(r)$  à uma distância  $r$  de um corpo massivo de massa  $M$  e, assim, modelar seu movimento.

- (a) Sabendo que o índice de refração da luz em um meio  $k$  qualquer pode ser calculado por:

$$n = \frac{c}{c_k}$$

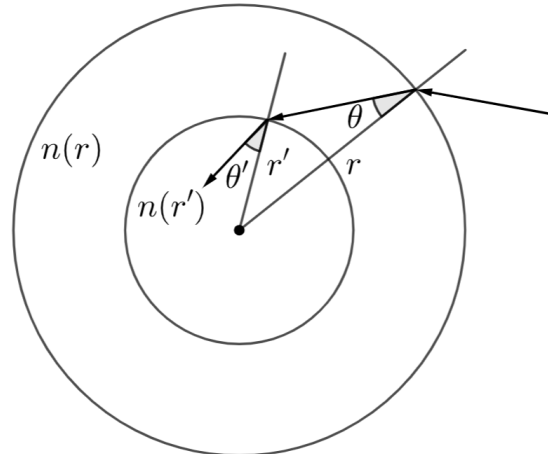
em que  $c_k$  é a velocidade da luz no meio  $k$ , mostre que o índice de refração da luz  $n(r)$  devido ao potencial gravitacional de um corpo de massa  $M$  é dado por:

$$n(r) \approx 1 + \frac{k_1 GM}{rc^2}$$

e encontre o valor numérico de  $k_1$ .

**Dado:** Se necessário, use que:  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , quando  $x \ll 1$ .

Uma vez que a luz se aproxima de um corpo massivo, sua trajetória é curvada. Para modelar a curva descrita pela luz, é útil considerar que a luz, ao se propagar, passa por diversas cascas esféricas, como na figura abaixo. Pela Lei de Snell, é possível, por meio disso, encontrar uma equação invariável que dita o movimento da luz.



(b) Mostre que, nas condições anteriores:

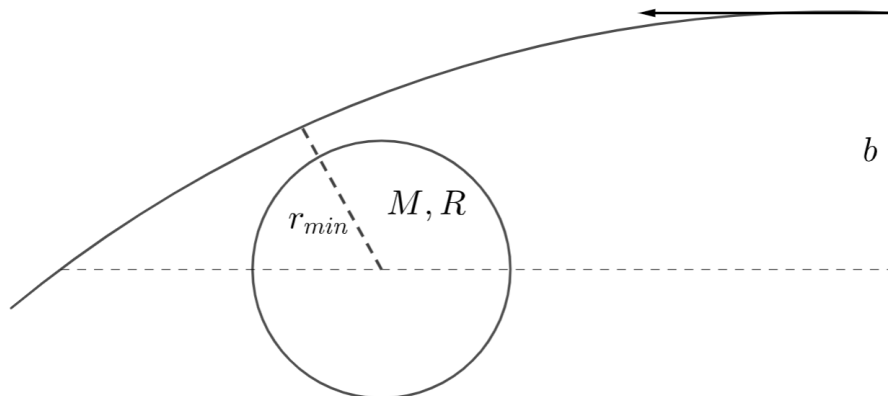
$$n(r)r \sin \theta(r) = \text{cte}$$

ou seja, que o valor acima é uma constante. Considere  $n(r)$  como o índice de refração da luz à uma distância  $r$  e  $\theta(r)$  o ângulo formado pela direção da luz e a normal da casca esférica.

**Dado:** Lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Com base no que foi visto, conseguimos então estudar o desvio da luz devido à corpos massivos. Para isso, considere um cenário em que um raio de luz se aproxima de um corpo massivo de massa  $M$  e raio  $R$  a partir de um parâmetro de impacto  $b$ . Sabe-se que, pela Teoria da Relatividade Geral, o raio será curvado devido ao potencial gravitacional do corpo massivo até se focalizar em um ponto  $F$ . Contudo, a depender do valor do parâmetro de impacto  $b$ , o raio pode não ser focalizado, de modo que o fenômeno das lentes gravitacionais não seja observado. Na condição limite em que a luz não é focalizada,  $b = b_{lim}$ . Nesse cenário, é importante calcular a distância mínima  $r_{min}$  apresentada pelo raio de luz do corpo massivo e avaliar as condições para que o raio de luz seja focalizado. Perceba que, pela física moderna, **NÃO** podemos calcular  $r_{min}$  utilizando princípios da mecânica clássica, como conservação de energia e momento angular, tendo, assim, que recorrer às equações que vimos anteriormente.





- (c) Por meio do modelamento óptico para o desvio gravitacional da luz a partir da Teoria da Relatividade Geral, mostre que o valor de  $r_{min}$  é dado por:

$$r_{min} \approx b - \frac{k_2 GM}{c^2}$$

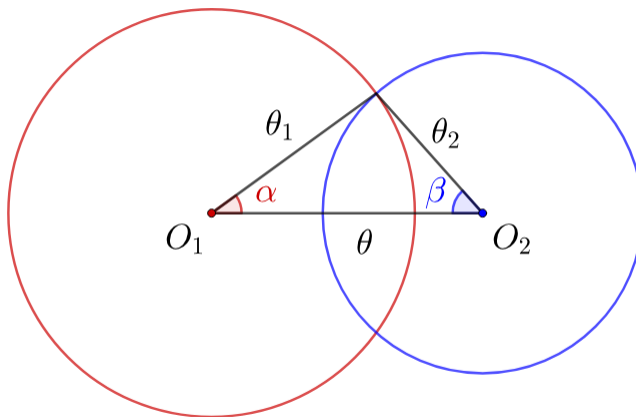
e encontre o valor de  $k_2$ .

- (d) Na condição limite em que o fenômeno de lentes gravitacionais é observado, qual o valor do parâmetro de impacto  $b = b_{lim}$ ? O que aconteceria caso  $b < b_{lim}$ ?

### 8. Encontrando a curva de luz (40 pontos)

Hugo planejava observar o eclipse de um sistema binário edge-on durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, mas seus planos foram adiados por conta de uma grande chuva durante a noite. Sem nada para fazer, ele decide se preparar para uma futura observação desenhando curvas de luz para sistemas binários edge-on de diferentes parâmetros. Em todas as suas curvas, a estrela menor, chamada de estrela 2, oculta parcialmente a estrela maior, chamada de estrela 1. Nossa tarefa é ajudá-lo a obter uma função que descreva a curva de luz para uma dada razão entre os raios das estrelas  $A = R_2/R_1$  e uma dada razão entre suas temperaturas  $B = T_2/T_1$ . Assim, queremos encontrar a variação de magnitude  $\Delta m > 0$  do binário em relação à situação sem eclipse em função de um parâmetro  $x$ , definido nesse problema como a razão entre distância angular entre os centros das estrelas e a distância angular entre eles no início do eclipse, isto é,  $x = \theta/(\theta_1 + \theta_2)$ . Assumindo que a velocidade relativa entre as estrelas permaneça constante,  $x$  também nos dá uma parametrização do tempo durante o eclipse.

- (a) A figura a seguir mostra o binário em um certo momento durante o eclipse (as cores são meramente ilustrativas):

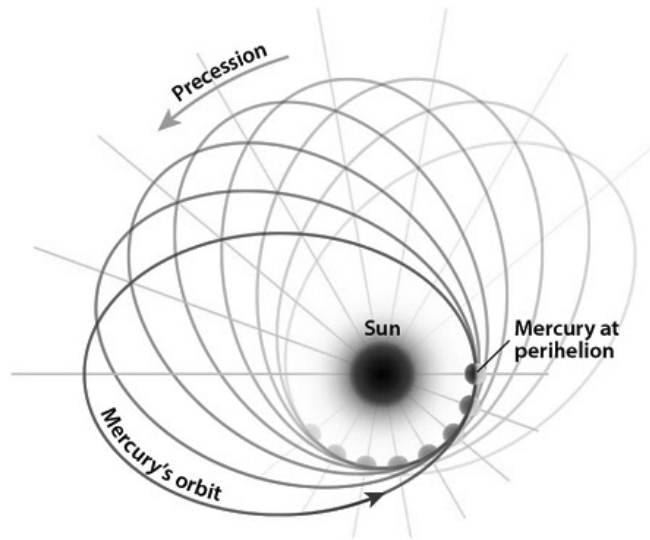


Como as distâncias angulares neste problema são muito pequenas, aproximamos os arcos de medida  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta$  para retas. Obtenha as expressões para os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  em termos de  $A$  e  $x$ . Assuma que  $\theta_1 - \theta_2 < \theta < \theta_1 + \theta_2$ .

- (b) Encontre a área angular  $S$  da estrela 1 que é ocultada durante o eclipse em termos de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  (você não precisa substituir as expressões encontradas no item anterior).
- (c) Encontre a variação de magnitude  $\Delta m > 0$  do binário em relação à situação sem eclipse. Deixe sua resposta em termos de  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .
- (d) Argumente por que a expressão obtida no item anterior só é válida na condição  $(1 - A)/(1 + A) \leq x \leq 1$ . Encontre uma expressão para  $\Delta m$  em termos de  $A$  e  $B$  quando  $0 \leq x \leq (1 - A)/(1 + A)$ .

Parabéns! Obtemos  $\Delta m$  para  $0 \leq x \leq 1$  e, como a situação é simétrica para  $x$  e  $-x$ , obtemos também a curva de luz do binário durante todo o eclipse!

- 9. O bom samaritano (50 pontos)** Por alguns anos, a precessão do periélio de Mercúrio foi uma pedra no sapato dos astrônomos, pois o valor medido experimentalmente não estava de acordo com aquele previsto na teoria. Diversas soluções foram propostas, até que finalmente a Teoria da Relatividade Geral colocou um ponto final na história.



Infelizmente, reproduzir os cálculos que levam ao valor preciso do período de precessão da órbita de Mercúrio estão fora do escopo dessa questão... Mas, por sorte, certo dia um bom samaritano me mostrou que a energia potencial central de uma órbita pode ser escrita como

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

Em que o primeiro termo corresponde ao potencial de Kepler, sendo  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Muito jocoso, ele decide não dizer como encontrar o período precessão a partir desse potencial, mas prometeu que em sua volta explicaria como encontrá-lo.

Como não sabemos quando ele irá voltar, vamos aos cálculos...

- Se possível, qual será o raio orbital  $r$  de uma partícula de massa  $m$  e momento angular de módulo  $L$ , submetida a esse potencial que possui órbita circular? Qual a condição imposta a  $\beta$ , em função de  $L$  e  $m$ , para que o termo de Kepler domine o potencial da órbita?
- Considerando que o potencial de Kepler prevalece no potencial central da órbita e que a excentricidade da órbita satisfaz  $e \ll 1$ , mostre que a velocidade angular de precessão de uma massa de prova  $m$  com energia total  $E < 0$  pode ser dada por

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi\beta}{L^2 T}$$

onde  $L$  é o módulo do momento angular e  $T$  o período da órbita.

- (c) A perturbação causada pelo potencial proporcional a  $r^2$  pode ser interpretada em termos da quantidade adimensional medida no periastro

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha a}$$

onde  $a$  é semi-eixo maior da órbita.

Encontre uma expressão para  $\eta$  em termos da excentricidade ( $e$ ), período ( $T$ ) e frequência de precessão da órbita ( $f_{prec.}$ ).

## 10. Satélites Geossíncronos (55 pontos)

Satélites geossíncronos, para os quais o dia sideral terrestre é um múltiplo de seu período orbital, são extensamente utilizados para comunicação e imageamento da Terra. dentro dessa categoria, estão inseridos os satélites geoestacionários, com uma órbita no plano do equador terrestre, e os satélites de alta inclinação orbital, como os do tipo Molniya e Tundra, ambos com órbitas altamente elípticas e de alta inclinação. Esta segunda categoria de órbitas geossíncronas foram desenvolvidas pela União Soviética na década de 1960 como uma alternativa às órbitas geoestacionárias para comunicação.

- (a) Considere um camarada na cidade de Murmansk ( $\phi_M = 68^\circ 58' N$ ,  $\lambda_M = 33^\circ 5' O$ ) e um satélite geoestacionário situado no mesmo meridiano do observador. Calcule o altura angular em que o camarada observará o satélite.
- (b) Percebendo a baixa altura em que observará o satélite, nosso camarada decide estimar qual o comprimento de massa de ar que o sinal de comunicação precisa percorrer para chegar até ele vindo do satélite. Ajude-o calculando esse valor em função do comprimento de massa de ar de um sinal vindo do zênite.

**Dados:** considere a altura da atmosfera como  $H = 85\text{km}$

Para melhorar as condições de recepção do sinal de comunicação para a região de Murmansk, consideremos a possibilidade de lançar uma constelação de satélites do tipo Molniya, que apresentam alta excentricidade e inclinação orbital, além de sobrevoar o mesmo ponto na superfície terrestre a cada 2 períodos orbitais.

- (c) Preocupados com os efeitos de perturbação orbital devido ao achatamento da Terra, é preferível lançar a constelação de satélites em uma inclinação orbital que minimize os efeitos de variação do argumento do perigeu,  $\omega$ , (ângulo medido no plano orbital a partir do nó ascendente até o perigeu). Ajude a determinar esse valor de  $i$ .

**Dados:** A taxa de variação de  $\omega$  é dada pela seguinte fórmula, onde  $n$  é a velocidade angular média do satélite, o raio equatorial terrestre é  $R_E = 6,378 \cdot 10^6\text{m}$ , o semi-eixo maior, a inclinação e a excentricidade orbitais são, respectivamente  $a$ ,  $i$  e  $e$ , além da constante  $J_2 = 1,083 \cdot 10^{-3}$ :

$$\dot{\omega} = 0,75nJ_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^2}$$

- (d) Sabendo que satélite não pode estar a uma altitude menor que 600km devido à presença considerável de arrasto atmosférico, calcule o semi-eixo maior e a maior excentricidade possível para a órbita do satélite.

**Dados:** Desconsidere por enquanto a variação na ascensão reta do nó ascendente devido ao achatamento terrestre.

Já que o satélite do tipo Molniya possui inclinação orbital, não é mais possível que este permaneça sempre na mesma posição em relação a superfície terrestre. Para solucionar esse problema, esse tipo de satélite possui uma órbita com maior excentricidade possível e argumento de perigeu  $\omega = 270^\circ$ , de forma que ele passa pelo apogeu enquanto cruza o meridiano do camarada. Como a excentricidade é alta, o satélite fica a maior parte do tempo próximo do local de interesse.

A seguir, vamos estudar quantos satélites são necessários para que a constelação mantenha o melhor contato com o camarada em Murmansk.

**Observação:** Adote para os próximos itens que a longitude aumenta para direção Leste.

- (e) Primeiramente, determine a latitude  $\phi$  e longitude  $\lambda$  terrestres do ponto em que o satélite está sobrevoando em função da anomalia verdadeira, do tempo contado a partir do instante em que o satélite passa pelo apogeu ( $t_{ap}$ ) e constantes.
- (f) Obtenha a distância angular ( $\mu$ ) no globo entre a cidade de Murmansk ( $\phi_M, \lambda_M$ ) e o ponto em que o satélite está sobrevoando em função de  $\phi, \lambda$  (variáveis do item anterior) e constantes.
- (g) Calcule o ângulo de altura em que o camarada observa o satélite em função de  $\mu$ , constantes e a anomalia verdadeira ou a anomalia excêntrica.

Nas órbitas Molniya, a constelação de satélites existe para que seja possível alternar a procedência do sinal recebido em função da visibilidade dos satélites ao longo da órbita, sendo assim, vamos estudar os casos de constelações com 3 e 4 satélites em órbitas espaçadas igualmente.

- (h) Calcule a anomalia excêntrica e a anomalia verdadeira, no caso de 3 e 4 satélites por constelação, para o instante em que o camarada inicia a recepção do sinal de um dos satélites.

**Dados:** Considere que o intervalo na órbita em que o camarada recebe o sinal de um satélite é centrado em seu apogeu, ou seja, o intervalo de tempo entre o início da recepção do sinal do satélite até este passar pelo apogeu é igual ao intervalo entre a passagem pelo apogeu até a perda de seu sinal e o início do recepção do sinal pelo próximo satélite da constelação.

A anomalia excêntrica  $E$  e a anomalia verdadeira  $\theta$  se relacionam pela seguinte fórmula, sendo  $e$  a excentricidade da órbita:

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

- (i) Calcule a altura do sinal para o instante em que o camarada inicia sua recepção vinda de um dos satélite, para os casos de 3 e 4 satélites.

Após todos os cálculos para a constelação de satélites, percebe-se que as variações de ascensão reta do nodo ascendente devido ao achatamento da Terra poderiam causar que estes não passassem mais pelo apogeu e pelo meridiano do camarada simultaneamente.

- (j) Calcule a variação da ascensão reta do nodo ascendente, sabendo que esta é dada pela fórmula seguinte, que se utiliza dos mesmos parâmetros que a equação de  $\dot{\omega}$  do item (c)

$$\dot{\Omega} = -1,5nJ_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}$$

- (k) Para remediar esse efeito, o antigo período do satélite ( $T$ ) é ajustado em um valor de  $\Delta T$  variando seu semi-eixo maior. Com base em  $\dot{\Omega}$ , e sabendo que  $\Delta T \ll T$  e  $\Delta a \ll a$ , calcule  $\Delta T$  e  $\Delta a$

**Dica:**  $(1 + x)^a \approx 1 + ax$  quando  $|x| \ll 1$