PROVA TEÓRICA P1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. A duração da prova é de 4 horas;
4. A prova é composta por 9 questões (totalizando 250 pontos) e tem peso 3 na composição da média final.;
5. A prova é individual e sem consultas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas;
9. Folhas de rascunho serão disponibilizadas e não precisam ser entregues junto com a prova e as folhas de respostas;
10. Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles devem ser feitos à caneta esferográfica. Utilize para isso o espaço reservado em cada uma das folhas de respostas. Às respostas, ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, será associada a nota zero.
11. Ao final da prova devolva o caderno de questões e as folhas de respostas.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

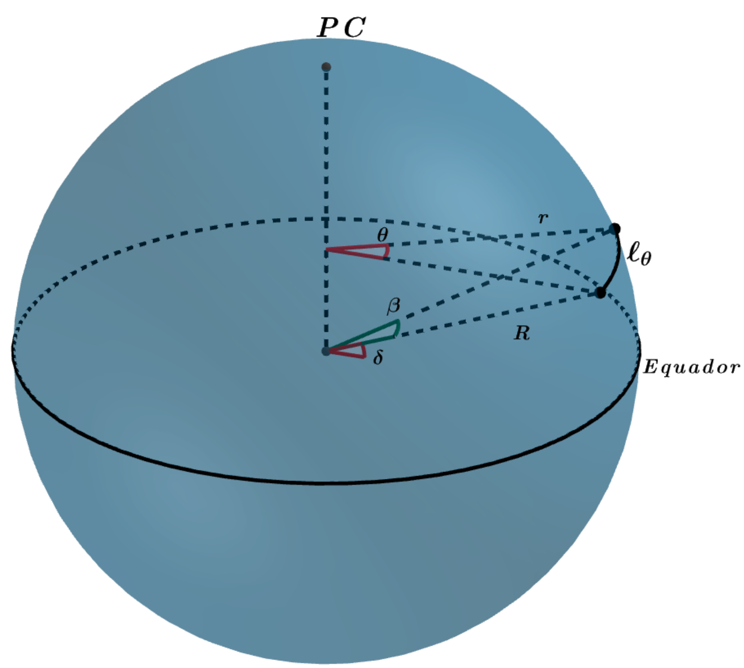
Questões

1. **Declinação Lunar (15 pontos)**

No dia 20 de março, Paulo decide estimar a declinação de seu objeto astronômico favorito: a Lua! Para tanto, ele utiliza seu telescópio newtoniano e alinha a montagem equatorial ao polo celeste elevado. Inicialmente, ele mede o tempo que o centro do Sol leva para percorrer o diâmetro do campo de visão da lente ocular do telescópio, obtendo $t_{\odot} = 312\ s$. Mais tarde, ele repete o procedimento, mas apontando para a Lua, cronometrando $t_L = 346\ s$. Sabendo que o dia lunar tem duração de $T_L = 24h50min$, qual o módulo da declinação da Lua, em graus, estimada por Paulo?

Solução:

Sendo o experimento conduzido no dia 20 de março, trata-se de um dia de Equinócio e, assim, a declinação do Sol é $\delta_{\odot} = 0°$. Ademais, como a montagem do telescópio está alinhada ao polo celeste elevado, pode-se esboçar:



Desse modo, para o caso de ângulos pequenos, em que ℓ_θ tende a um segmento de reta, tem-se

$$\begin{cases} \ell_\theta = r \cdot \theta \\ \ell_\theta = R \cdot \beta \end{cases}$$

em que β é o campo de visão da lente ocular. Como o enunciado pede apenas o módulo da declinação, não é necessário se preocupar a respeito de qual o Polo Celeste (PC) elevado.

Ainda da figura anterior,

$$r = R \cdot \cos \delta$$

Sabe-se que o ângulo θ é percorrido pelo astro durante o tempo Δt que ele leva para atravessar o diâmetro da ocular. Assim,

$$\theta = \frac{360^\circ}{T} \cdot \Delta t$$

Logo,

$$\beta = \frac{360^\circ}{T} \cdot \Delta t \cdot \cos \delta$$

Como Paulo utiliza a mesma configuração do telescópio em ambos os experimentos, o valor de β deve ser idêntico em ambos os casos. Assim,

$$\frac{360^\circ}{T_\odot} \cdot t_\odot \cdot \cos \delta_\odot = \frac{360^\circ}{T_L} \cdot t_L \cdot \cos |\delta_L| \implies \cos |\delta_L| = \frac{T_L}{T_\odot} \cdot \frac{t_\odot}{t_L} \cdot \cos \delta_\odot$$

Substituindo-se os valores, lembrando-se de utilizar as durações de dia solar ($T_\odot = 24h$) e lunar ($T_L = 24h50min$),

$$\cos |\delta_L| = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60 + 50 \cdot 60}{24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \frac{312}{346} \cdot 1 = 0{,}93304 \implies$$

$$\boxed{|\delta_L| \approx 21{,}1^\circ}$$

2. Encontre a estrela (10 pontos)

Uapyle estava acompanhando a trajetória de sua estrela favorita no céu. Duas horas depois de nascer, ela atingiu uma altura igual ao número da sorte de Uapyle.

Ele queria tirar uma foto da estrela a essa altura, mas se distraiu e a perdeu. Ajude-o e calcule qual o menor tempo que ele precisará esperar para que a estrela tenha novamente essa altura.

Dado: a estrela passa $T = 10$ horas no céu.

Solução: Façamos o esquema da trajetória da estrela na esfera celeste:

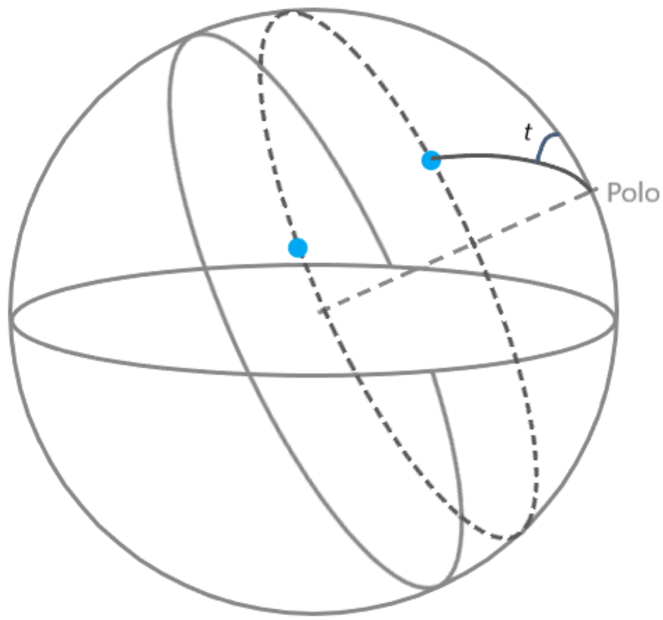


Figura 1: Em pontilhado está representado a trajetória da estrela na esfera celeste e de azul estão os pontos em que a estrela tem a altura mencionada

O tempo desde o nascimento até a culminação superior é $\frac{T}{2}$, assim, o tempo que falta para a culminação superior é $t = \frac{T}{2} - 2$ e, o tempo que Uapyle precisará esperar é

$$\Delta t = 2t = 2\left(\frac{10}{2} - 2\right) = \boxed{6\ h}$$

.

3. Os Satélites (15 pontos)

Shell decidiu lançar alguns satélites caseiros para gerar imagens da Terra. Ele estava particularmente interessado na região da Linha do Equador e optou por começar seu experimento com satélites geoestacionários.

(a) **(10 pontos)** Qual é a menor quantidade de satélites que Shell precisa lançar para conseguir captar simultaneamente imagens da totalidade do Equador?

(b) **(5 pontos)** Insatisfeito com as imagens obtidas na sua primeira tentativa, Shell decidiu trazer os satélites inicialmente geoestacionários para uma órbita ainda equatorial e circular, mas um pouco mais próxima da Terra. Qual deve ser o raio mínimo da nova órbita para que Shell ainda consiga gerar imagens de toda a Linha do Equador simultaneamente sem precisar aumentar o número de satélites?

Solução:

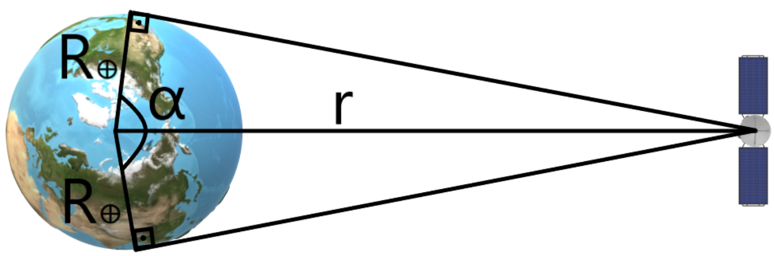
(a) O primeiro passo é determinar o raio orbital de um satélite geoestacionário:

$$\frac{mv_{\oplus}^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \longrightarrow \omega_{\oplus}^2 r = \frac{GM}{r^2} \longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GMT_{\oplus}^2}{4\pi^2}}$$

Substituindo os valores numéricos na expressão:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times (23h56min04s)^2}{4\pi^2}} \longrightarrow r = 4{,}22 \times 10^7\ m$$

Com base no diagrama a seguir, é possível determinar o ângulo α que cada satélite consegue cobrir:



$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_{\oplus}}{r} \longrightarrow \alpha = 2\ arccos\left(\frac{6{,}38 \times 10^6}{4{,}22 \times 10^7}\right) = 163^\circ$$

A quantidade mínima de satélites corresponde ao menor número natural que gera um resultado maior ou igual a 360° ao ser multiplicado pelo ângulo α. Dessa forma, Shell precisa de pelo menos três satélites.

(b) O raio mínimo corresponde ao caso em que cada um dos três satélites cobre um ângulo de 120° (um terço da circunferência):

$$r_{mín} = \frac{R_{\oplus}}{cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)} = 2R_{\oplus} = 2 \times 6{,}38 \times 10^6 = 1{,}28 \times 10^7\ m$$

4. Estrela de Nêutrons (20 pontos)

RX J1856.5-3754 é a estrela de nêutrons conhecida mais próxima à Terra. Entre todas as estrelas de nêutrons, ela é uma das únicas com espectro puramente de corpo negro, pois seu espectro não é afetado pela contaminação da atividade magnetosférica, de uma nebulosa circundante ou de um resto de supernova.

Ela possui um raio de $R = 3{,}05R_S$, em que R_S é seu raio de Schwarzschild, está localizada a uma distância $d = 120\,\text{pc}$ da Terra e sua magnitude bolométrica é $m_{bol} = 14{,}1$. Da Terra, observa-se que o pico de seu espectro é em $\lambda_{obs} = 6{,}7\,\text{nm}$.

A velocidade radial da estrela é relativamente pequena e pode ser desprezada para o cálculo do redshift. A fórmula do redshift gravitacional é dada por

$$1 + z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}.$$

(a) **(10 pontos)** Encontre a temperatura efetiva T_{ef} da estrela.

(b) **(10 pontos)** Encontre a massa M.

Solução:

(a) Como $1 + z_g = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_0}$, temos pela fórmula do redshift gravitacional:

$$\lambda_0 = \lambda_{obs}\sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} \Rightarrow \lambda_0 = 5{,}5\,\text{nm}$$

Portanto, pela Lei de Wien, concluímos que

$$T_{\text{ef}} = \frac{b}{\lambda_0} \Rightarrow \boxed{T_{\text{ef}} = 530.000\,\text{K}}$$

(b) Começamos calculando a magnitude absoluta bolométrica da estrela:

$$m_{bol} - M_{bol} = 5\log d - 5 \Rightarrow M = 8{,}70$$

Agora, calcularemos a luminosidade da estrela comparando-a com o Sol através da equação de Pogson

$$M_{bol} - M_{\odot} = -2{,}5\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \Rightarrow L = 1{,}05 \cdot 10^{25}\,\text{W}$$

Pela Lei de Stefan–Boltzmann, encontramos o raio da estrela:

$$L = 4\pi R^2\sigma T_{\text{ef}}^4 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}} \Rightarrow R = 13{,}8\,\text{km}$$

Por fim, como $R/R_S = 3{,}05$, obtemos a massa através da equação do raio de Schwarzschild:

$$R = 3{,}05R_S = 3{,}05 \cdot \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow \boxed{M = 3{,}05 \cdot 10^{30}\,\text{kg} = 1{,}53\,M_{\odot}}$$

5. Velut Luna (35 pontos)

- Pelo luar, céus, obri...

Maritana sorria para a Lua, e a Lua sorria para Maritana, mas o lenço negro da noite não eclipsou a variável cruel das selenatas:

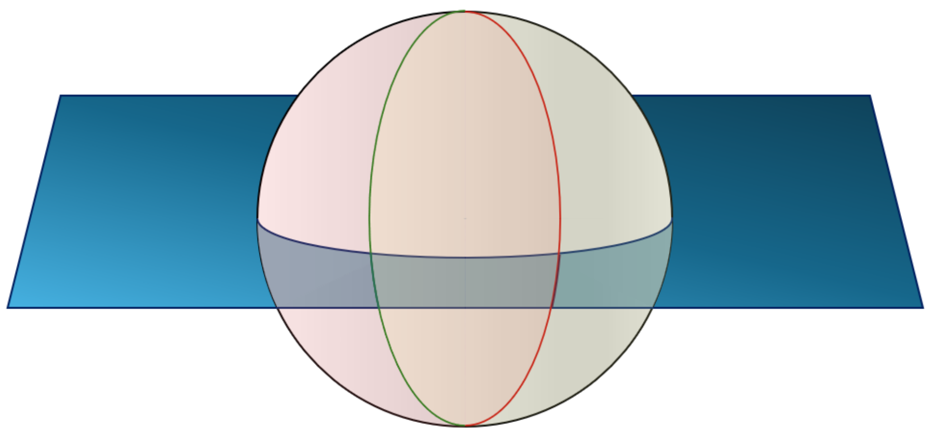
- ...Afinal, quanto de ti eu vejo em teu sorriso?

Seja θ o ângulo entre a Lua e o Sol para um observador na Terra ($0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$), determine a expressão que relaciona o ângulo θ à porcentagem da área superficial da Lua visível para esse observador.

Obs: Por " área superficial da Lua", entenda a área física da superfície esférica do astro, não a "área projetada" do disco lunar

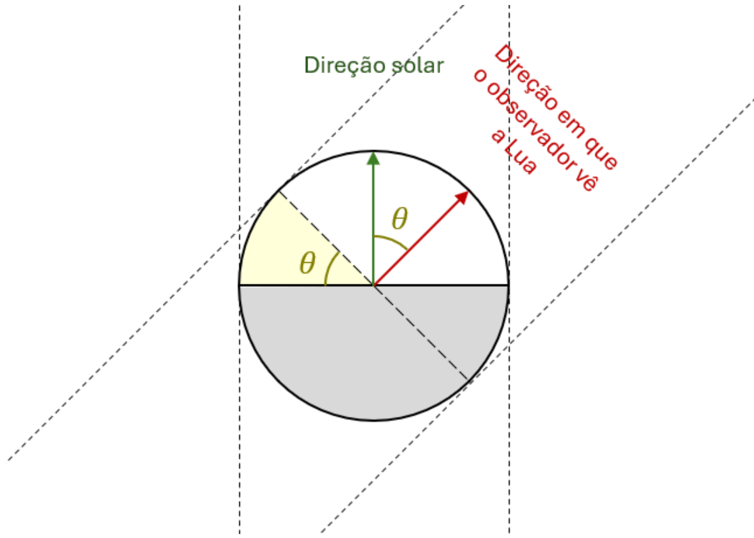
Solução:

Perceba que, independente da posição do Sol, a parte iluminada da Lua será sempre um hemisfério (semi-esfera). Já a parte observável da Lua, como o observador está suficientemente distante, também será sempre um hemisfério. A intersecção entre dois hemisférios é chamada fuso-esférico, e tem suas extremidades diametralmente opostas



O plano contém o centro da esfera e os polos dos dois hemisférios (vermelho e verde)
A intersecção entre o hemisfério vermelho e o hemisfério verde é o fuso amarelo
Perceba que os extremos do fuso são diametralmente opostos, e perpendiculares ao plano (quando vistos a partir do centro)

Observe o esquema da situação:



Por simetria, a área de um fuso esférico é diretamente proporcional ao seu ângulo diedro. Sendo assim, a porcentagem referida é dada por:

$$\boxed{p = \frac{\theta}{360^\circ}}$$

6. Sistema Solar Eclipsante (25 pontos)

Uma estrela de raio $R_s = R_\odot$ é orbitada por dois planetas, um mais interno que o outro. O primeiro possui raio igual a $R_p = 7 \cdot 10^7$m e possui uma órbita elíptica de semi-eixo maior $a = 0{,}5$UA e excentricidade $e = 0{,}7$. Já o planeta externo apresenta uma órbita circular de raio $r = 1$UA. A órbita dos planetas é coplanar, de forma que o planeta interno eclipsa parcialmente a estrela a cada período sinódico, quando observado do planeta externo. Sendo assim, observando a partir do planeta externo, calcule a maior diferença possível entre a maior e a menor magnitude da estrela, ambas durante os auges dos eclipses (que não são necessariamente consecutivos).

Solução: A diferença de magnitude da estrela entre os eclipses se dá pela variação do tamanho angular do planeta eclipsante quando visto pelo observador. Como a luminosidade do sol durante o eclipse é proporcional a sua área angular visível,

$$\frac{L'}{A_s - A_p} = \frac{L}{A_s} \rightarrow L' = L\left(1 - \frac{A_p}{A_s}\right)$$

A área angular do planeta depende da distância do planeta até o observador (d, que é variável), bem como de seu raio,

$$A_p = \pi R_p^2/d^2$$

igualmente ocorre para a estrela, porém a distancia até o observador é fixa (r),

$$A_s = \pi R_s^2/r^2$$

Inserindo essas expressão na equação de Pogson,

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{L_1'}{L_2'}\right)$$

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{1 - \left(\frac{R_p r}{R_s d_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_p r}{R_s d_2}\right)^2}\right)$$

Basta então determinar d_1 e d_2. Estes valores são, respectivamente, as diferenças do raio da órbita do planeta externo pela distância do planeta interno quando no apoastro e no periastro.

$$d_1 = r - a(1+e)$$

$$d_2 = r - a(1-e)$$

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{1 - \left(\frac{R_p r}{R_s (r - a(1+e))}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_p r}{R_s (r - a(1-e))}\right)^2}\right)$$

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{1 - \left(\frac{R_p}{R_s (1 - (a/r)(1+e))}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_p}{R_s (1 - (a/r)(1-e))}\right)^2}\right)$$

inserindo os valores,

$$m_1 - m_2 = 0{,}633$$

7. JWST (40 pontos)

Em 24 de Janeiro de 2022, o telescópio espacial James Webb (JWST) atingiu seu destino final. Ele está localizado nas redondezas do ponto de Lagrange L_2 do sistema Terra-Sol, que encontra-se "atrás" da Terra. A escolha desse ponto é justificada: para um corpo em L_2, as forças gravitacionais do Sol e da Terra balanceiam seu movimento orbital, de forma que o corpo permanece parado em relação ao nosso planeta, tornando esse ponto um verdadeiro estacionamento espacial. Nos itens que seguem, considere a órbita da Terra circular.

(a) **(12 pontos)** Calcule a distância entre o ponto de Lagrange L_2 e a Terra, em km. Você pode utilizar a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, para $|x| \ll 1$.

De forma a estudar o lançamento do JWST até L_2, faremos algumas simplificações. Considere que, após lançado da Terra, o telescópio—no referencial heliocêntrico—segue em uma trajetória curva até L_2, sujeito à atração gravitacional do Sol e da Terra e sem quaisquer manobras de assistência. A velocidade de lançamento é escolhida de tal forma que, ao chegar em L_2, o JWST deve ter exatamente a velocidade necessária para mantê-lo em uma órbita circular heliocêntrica. Vale ressaltar que, na vida real, o satélite encontra-se não em L_2 exatamente, mas em uma pequena órbita em torno desse ponto.

(b) **(20 pontos)** Diante do cenário descrito, calcule a velocidade de lançamento v_0 do JWST, em relação à Terra, em km/s. Na resolução desse item considere, para fins de cálculo, **somente a atração gravitacional do Sol**.

Dica: Visto da Terra, o satélite segue essencialmente em uma linha reta até L_2. O que isso nos diz sobre a direção da velocidade de lançamento nesse referencial?

Para refinar nossa resposta levando em conta a influência da Terra, considere agora a seguinte situação no referencial da Terra: o JWST é lançado da superfície terrestre com uma velocidade

u_0, e chega a uma distância muito maior que o raio da Terra com a velocidade v_0 encontrada no item passado.

(c) **(8 pontos)** Calcule u_0, em km/s. Aqui, leve em conta nos cálculos **somente a atração gravitacional da Terra**, e ignore a sua rotação do em torno do próprio eixo.

Solução:

(a) Chame de x a distância entre L_2 e a Terra. Para uma massa de prova m em L_2, a soma das forças gravitacionais - no referencial do Sol - deve atuar como resultante centrípeta de forma a manter um movimento circular com velocidade angular ω igual àquela do movimento da Terra em torno do Sol. Sendo assim, pela 2a lei de Newton:

$$F_\oplus + F_\odot = F_{cp} = m\omega^2 r_{L_2}$$

$$\frac{GM_\oplus m}{x^2} + \frac{GM_S m}{(r_\oplus + x)^2} = m\omega^2 (r_\oplus + x)$$

$$\frac{GM_\oplus}{x^2} + \frac{GM_\odot}{r_\oplus^2}\left(1 + \frac{x}{r_\oplus}\right)^{-2} = m\omega^2 (r_\oplus + x)$$

Efetuando a aproximação binomial dada no enunciado e lembrando que $\omega = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus^3}}$:

$$\frac{M_\oplus}{x^2} + \frac{M_\odot}{r_\oplus^2}\left(1 - \frac{2x}{r_\oplus}\right) = \frac{M_\odot}{r_\oplus^3}(r_\oplus + x)$$

Desenvolvendo as contas, obtemos:

$$\boxed{x = r_\oplus \sqrt[3]{\frac{M_\oplus}{3M_\odot}} \approx 1{,}50 \times 10^6\,\text{km}}$$

(b) Para a resolução deste item, utilizaremos a conservação energia mecânica do satélite na órbita de transferência. Sendo v_0' a velocidade do JWST no referencial do Sol ao ser lançado da Terra e v_f sua velocidade final ao alcançar L_2, temos:

$$E_{mec_i} = E_{mec_f}$$

$$\frac{1}{2}v_0'^2 - \frac{GM_\odot}{r_\oplus} = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{GM_\odot}{r_{L_2}}$$

Em que $r_{L_2} \equiv r_\odot + x$ é a distância de L_2 até o Sol. Como v_f deve ser a velocidade necessária para manter o satélite em uma órbita circular heliocêntrica, temos que $v_f = \omega r_{L_2}$. Assim:

$$\frac{1}{2}v_0'^2 - \frac{GM_\odot}{r_\oplus} = \frac{1}{2}[\omega(r_\oplus + x)]^2 - \frac{GM_\odot}{r_\oplus + x}$$

$$v_0'^2 = \omega^2(r_\oplus + x)^2 + \frac{2GM_\odot x}{(r_\oplus + x)r_\oplus} = \frac{GM_\odot}{r_\oplus}\left[\frac{(r_\oplus + x)^2}{r_\oplus^2} + \frac{2x}{(r_\oplus + x)}\right]$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos $v_0' \approx 30{,}38\,\text{km/s}$.

Resta agora relacionar v_0' (velocidade de lançamento no referencial do Sol) com v_0 (velocidade no referencial da Terra). Para isso, empregamos a mudança de referencial entre a Terra e o Sol:

$$\vec{v}_{JWST-Sol} = \vec{v}_{JWST-Terra} + \vec{v}_{Terra}$$

Em que $v_{JWST-Sol} = v_0'$ e $v_{JWST-Terra} = v_0$, e $v_{Terra} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus}} \approx 29{,}8\,\text{km/s}$.

Agora, usamos o fato apresentado na dica de que, no referencial girante—isto é, que acompanha o giro da Terra em torno do Sol—terrestre, o JWST deve seguir em linha reta (desprezando a Força de Coriolis) em direção à L_2, onde chega em repouso. Para tanto, sua velocidade de lançamento em relação à Terra deve ser perpendicular à velocidade da Terra ($\vec{v}_{JWST-Terra} \perp \vec{v}_{Terra}$). Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$v_0'^2 = v_0^2 + v_\oplus^2 \Rightarrow \boxed{v_0 \approx 6\,\text{km/s}}$$

(c) Aqui, utilizamos novamente a conservação da energia mecânica. Temos:

$$E_{mec_i} = E_{mec_f}$$

$$\frac{1}{2}u_0^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM_\oplus}{r_f}$$

Como a distância final é muito maior que o raio da Terra ($r_f \gg R_\oplus$), desprezamos o último termo. Assim, isolando u_0:

$$u_0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$$

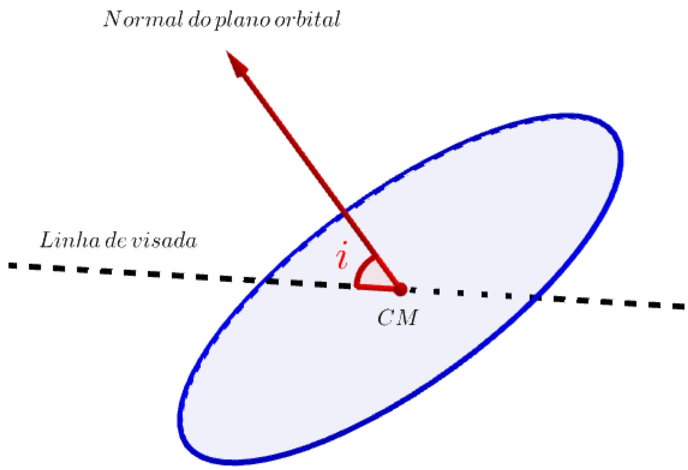
Substituindo os valores numéricos tem-se, por fim:

$$\boxed{u_0 \approx 13\,\text{km/s}}$$

Perceba que essa velocidade é levemente maior do que a velocidade de escape da Terra, $v_{esc} \approx 11{,}2\,\text{km/s}$.

8. Função de Massa (45 pontos)

Durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, Hugo observava a estrela Plo I com seu telescópio. Comparando o seu espectro com o de outras estrelas, ele descobre que Plo I é uma estrela de nêutrons e estima sua massa como sendo $M_1 = 2M_\odot$. Ele também observa que Plo I possui variações senoidais em sua velocidade radial ao longo do tempo e conclui que Plo I deve fazer parte de um sistema binário com outro corpo celeste, Plo II. Observando a curva de velocidade de Plo I, Hugo também determina que Plo I possui uma órbita circular de período P e velocidade radial máxima K. Porém, ele não sabe qual é a massa M_2 de Plo II e nem qual é a inclinação i do plano orbital do binário em relação ao plano do céu, representada na figura a seguir.



(a) **(30 pontos)** A partir da 3ª lei de Kepler e da 2ª lei de Newton, encontre uma expressão para a **função de massa** do sistema binário formado por Plo I e Plo II em termos de P, K e constantes universais. Você pode utilizar que a função de massa é dada por:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

(b) **(10 pontos)** Utilizando suas medidas, Hugo calcula que a função de massa do binário é $f = 46{,}2 M_\odot$. Desejamos encontrar o valor mínimo $M_{2,min}$ para a massa de Plo II, sabendo que ele corresponde ao caso em que $i = 90°$. Suponha $M_{2,min} \gg M_1$. A partir disso, determine $M_{2,min}$. Seu resultado é condizente com a hipótese? Responda SIM ou NÃO, justificando com cálculos.

Dica: $(1+x)^n \approx 1 + nx$, se $|x| \ll 1$

(c) **(5 pontos)** Com base em sua resposta do item anterior, conclua: é mais provável que Plo II seja um exoplaneta, uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro?

Solução:

(a) Seguindo a dica do enunciado, pela 3ª lei de Kepler, temos que

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Utilizaremos a 2ª lei de Newton para nos livrarmos do semi-eixo maior a do binário na equação acima. Seja v_1 a velocidade de Plo I em sua órbita circular e a_1 o raio dessa órbita. Pela 2ª lei de Newton:

$$\frac{GM_1M_2}{a^2} = \frac{M_1 v_1^2}{a_1}$$

Ainda, pela definição do centro de massa:

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{M_1}{M_2} a_1$$

Agora, para encontrarmos a_1 em termos de a:

$$a = a_1 + a_2 = a_1 + \frac{M_1}{M_2}a_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_2}a_1$$

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}a$$

Substituindo na 2ª lei de Newton:

$$\frac{GM_2}{a^2} = \frac{v_1^2}{a}\frac{M_1 + M_2}{M_2}$$

Isolando a:

$$a = \frac{GM_2^2}{(M_1 + M_2)v_1^2}$$

Sabemos também que K é a componente da velocidade de Plo I paralela à linha de visada:

$$K = v_1 \sin i \Rightarrow v_1 = \frac{K}{\sin i}$$

Logo,

$$a = \frac{GM_2^2 \sin^2 i}{(M_1 + M_2)K^2}$$

Substituindo na 3ª lei de Kepler:

$$\frac{(M_1 + M_2)^3 P^2 K^6}{G^3 M_2^6 \sin^6 i} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Tirando a raiz quadrada de ambos os lados da equação e manipulado os termos, chegamos em

$$\frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \boxed{\frac{PK^3}{2\pi G}}$$

(b) Como o caso em que $i = 90^\circ$ corresponde a $M_2 = M_{2,min}$, temos que

$$f = \frac{M_{2,min}^3}{(M_1 + M_{2,min})^2}$$

$$f = \frac{M_{2,min}^3}{M_{2,min}^2 \cdot (1 + M1/M_{2,min})^2}$$

$$f = M_{2,min} \cdot \left(1 + \frac{M_1}{M_{2,min}}\right)^{-2}$$

Estamos supondo $M_{2,min} \gg M_1$, assim:

$$f \approx M_{2,min} \cdot \left(1 - 2\frac{M_1}{M_{2,min}}\right)$$

$$f \approx M_{2,min} - 2M_1$$

$$M_{2,min} \approx f + 2M_1$$

$$\boxed{M_{2,min} \approx 50 M_{\odot}}$$

Pelo resultado encontrado, observamos que nossa hipótese de que

$$M_{2,min} \gg M_1$$

é válida.

(c) Pelo resultado do item anterior, podemos afirmar que Plo II provavelmente é um **buraco negro**.

9. Um distante sistema planetário... (45 pontos)

Em um distante sistema planetário, um planeta rochoso orbita sua estrela, idêntica ao Sol, em uma órbita elíptica de semi-eixo maior de 1 UA. Um jovem habitante desse planeta constatou que a estrela possuía, em um certo dia, as seguintes coordenadas equatoriais: $(\alpha_1 = 18{,}5°, \delta_1 = 16°)$

(a) **(25 pontos)** Adotando que os sistemas de coordenadas equatoriais e elípticos são dispostos da mesma maneira que na Terra, calcule, em graus, a obliquidade da órbita do planeta.

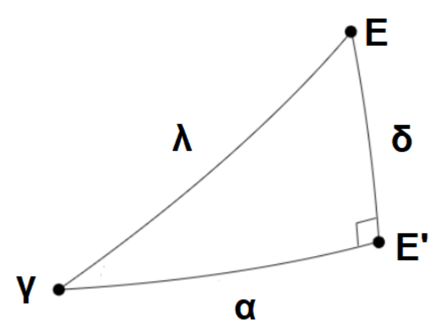
O jovem habitante, como um astrônomo curioso, decide observar alguns parâmetros físicos que dizem respeito ao ocaso da estrela em seu planeta. Sabendo que o mesmo vive no equador, responda as seguintes questões:

(b) **(8 pontos)** Qual o diâmetro angular da estrela, em minutos de arco, nos momentos de afélio e periélio da órbita, observado pelo jovem habitante? Considere que a órbita possua excentricidade $e = 0{,}1$ e que a longitude eclíptica do periélio seja igual a 90°

(c) **(12 pontos)** Qual a diferença entre a duração do pôr da estrela no momento de afélio e periélio, em segundos, identificado pelo jovem em suas observações no equador? Considere que a duração de um ano tropical e de um dia sideral no planeta sejam idênticos ao da Terra e que o tempo de Ocaso é dado pelo momento em que o disco estelar toca o horizonte até o instante de seu total desaparecimento.

Solução:

(a) **(10 pontos)** Primeiramente, desenhamos o seguinte triângulo esférico com vértices no ponto vernal γ, na estrela E - sob a eclíptica - e sua projeção no equador E'



Assim, podemos escrever, a partir da lei dos 4 elementos, a seguinte expressão:

$$\cot\delta\sin\alpha = \cos\alpha\cos 90^\circ + \sin 90^\circ\cot\epsilon$$

$$\cot\delta\sin\alpha = \cot\epsilon$$

$$\tan\epsilon = \frac{\tan\delta}{\sin\alpha}$$

Utilizando as coordenadas dada no enunciado, encontramos, a partir da equação acima, em $\boxed{\epsilon = 42{,}1^\circ}$

(b) Para esse item, basta expressarmos as distâncias afélicas e periélicas como função do semi-eixo maior a e da excentricidade e. Temos $d_{afelio} = a(1+e)$ e $d_{perielio} = a(1-e)$. Sendo assim, teremos os seguintes diâmetros angulares

- Afélio:

$$\theta_a = \frac{2R_\odot}{a(1+e)}$$

- Periélio:

$$\theta_p = \frac{2R_\odot}{a(1-e)}$$

Substituindo os dados do raio da estrela (igual ao do Sol), do semi-eixo maior e da excentricidade, encontramos: $\boxed{\theta_a = 29{,}1'}$ e $\boxed{\theta_p = 35{,}6'}$

(c) Primeiramente, é importante notar que a estrela terá declinação máxima e mínima, respectivamente, devido ao fato da longitude eclíptica ser de 90°. Ainda, é importante notar que a mudança de velocidade angular do Sol não alterará significativamente o período de um dia solar, dado que o maior responsável pelo movimento aparente do Sol é o movimento de rotação do planeta,que possui uma velocidade angular muito mais significativa que a devida ao movimento de translação. Sendo assim, é uma boa aproximação considerar, para ambos os casos, um dia solar de 24 h. Sendo assim, a única mudança que causará uma diferença significativa na duração do ocaso da estrela será a diferença de seu diâmetro para ambas as situações

Como a declinação é máxima, ela corresponde ao valor de ϵ, e portanto a velocidade angular do sol nesse paralelo será

$$\omega' = \omega\cos\epsilon$$

Assim o tempo para percorrer um diâmetro solar será:

$$\Delta t = \frac{\theta}{\omega\cos\epsilon}$$

Assim a diferença do tempo de ocaso para o periastro e apoastro será:

$$\Delta t = \frac{\theta_p - \theta_a}{\omega\cos\epsilon}$$

$$\boxed{\Delta t = 34{,}9\text{s}}$$