



PROVA TEÓRICA P1  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

---

## Instruções Gerais

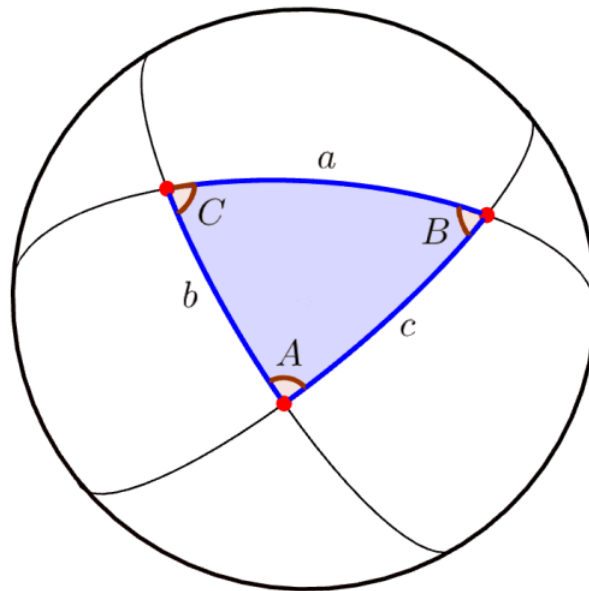
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);;
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas e as cartas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Equação de Kepler :

$$M = E - e \cdot \text{sen}E$$

- Relação força-potencial:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Derivada de uma polinomial  $f(x) = a \cdot x^n$ :

$$\frac{df}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

## Questões

1. **Radiação de Corpo Negro (15 pontos)** Em relação à radiação e à lei de Planck para a radiação, marque verdadeiro ou falso, e justifique com uma ou duas frases:

A fórmula para a lei de Planck para a radiação pode ser útil:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- (a) Sabemos que para um corpo negro (uma estrela idealizada) de temperatura  $T$ , o comprimento de onda no qual temos maior intensidade específica é  $\lambda_{max} = b/T$ . Assim, podemos concluir que a frequência na qual temos maior intensidade específica é  $\nu_{max} = c/\lambda_{max}$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.
- (b) Se aumentarmos a temperatura do corpo negro, a intensidade específica aumenta para todos os comprimentos de onda.
- (c) Se aumentarmos a temperatura do corpo negro, a intensidade específica aumenta para todas as frequências.
- (d) Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Rayleigh-Jeans,  $B(\nu, T) = 2\nu^2 k_B T / c^2$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann.
- (e) Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Wien,  $B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/k_B T}$ , onde  $h$  é a constante de Planck não reduzida.

### Solução:

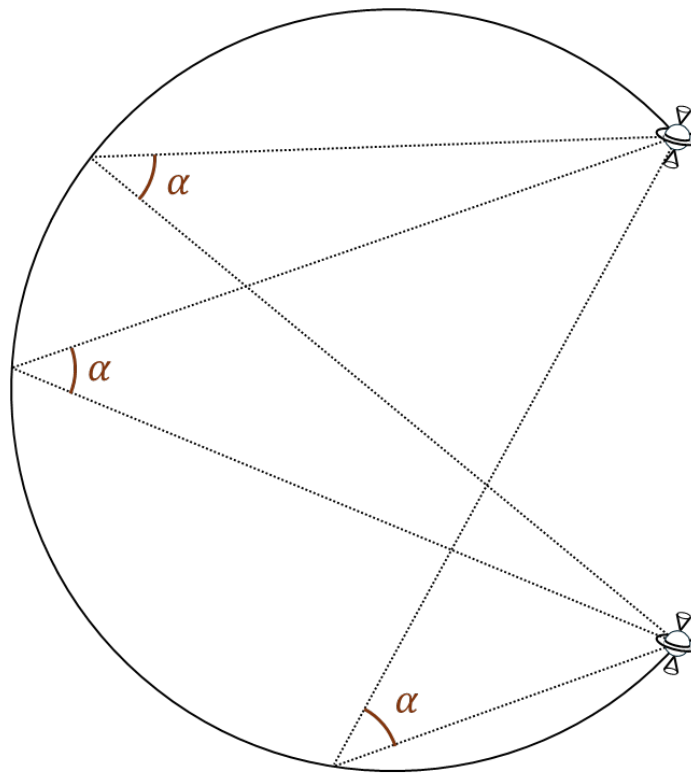
- (a) Falso. Outra distribuição deve ser obtida para a frequência, e a partir disso, se obtém uma expressão para a moda dessa distribuição.
- (b) Verdadeiro. Pode-se mostrar isso tirando a derivada parcial em relação à temperatura e ver que ela é positiva para todos os comprimentos de onda.
- (c) Verdadeiro. Pode-se mostrar isso tirando a derivada parcial em relação à temperatura e ver que ela é positiva para todas as frequências.
- (d) Falso. Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Wien, já que o termo dominante é o exponencial.
- (e) Verdadeiro. Veja a justificativa acima.

2. **Mapa de pulsares (20 pontos)** Você informaria seu endereço para um desconhecido? Esse é o intuito dos mapas de pulsares, a bordo das missões Voyager: comunicar a localização da Terra para qualquer civilização alienígena que encontre uma das naves.

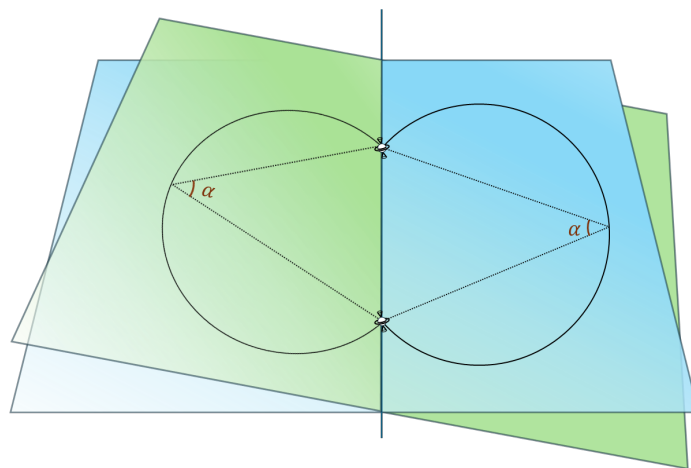
Suponha um mapa que apresente um conjunto característico de pulsares, bem como os ângulos entre eles, dois a dois, vistos a partir da Terra. Considere que, no conjunto escolhido, não haja configurações especiais, como três colineares ou quatro coplanares. Qual a menor quantidade de pulsares que especifica inequivocamente a posição do planeta? Justifique geometricamente sua resposta.

**Solução:** Para responder esse problema, precisamos pensar nas simetrias e nos graus de liberdade da situação. Vamos começar com dois pulsares que são vistos pela Terra sob um ângulo  $\alpha$ . Para

manter esse ângulo invariante, podemos percorrer um arco da circunferência circunscrita aos três pontos:

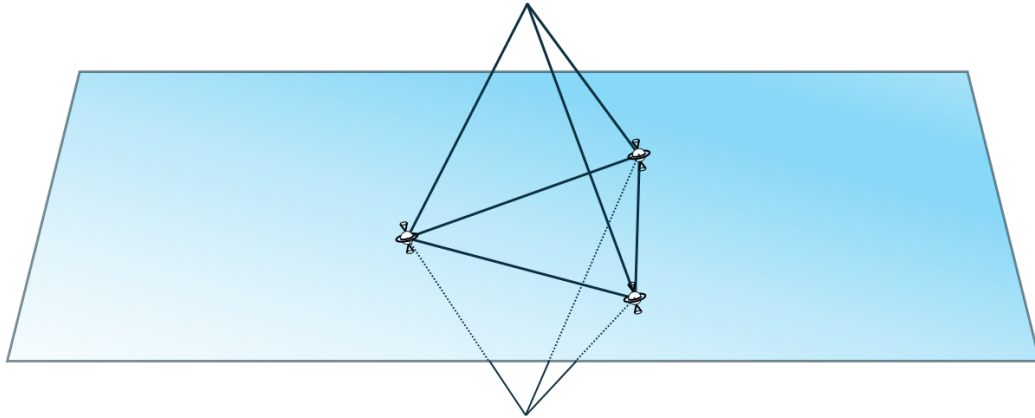


Esse arco de circunferência define um lugar geométrico contido num semi-plano. Percorrê-lo é o nosso primeiro grau de liberdade. Agora perceba que a reta que conecta os dois pulsares define um eixo de simetria rotacional. Sendo assim, além de percorrer um arco, podemos rotacionar o semi-plano em que aquele está contido, o que caracteriza nosso segundo grau de liberdade.



Migramos para a situação com três pulsares. Para pensarmos em uma nova posição possível para a Terra, vamos começar escolhendo uma dupla de pulsares e alterando um de seus graus de liberdade.

Embora o ângulo entre os dois pulsares em específico se mantenha invariante, (como não há colinearidade entre os três) a alteração distorce o ângulo entre as outras duplas. Sendo assim, precisamos alterar em conjunto o segundo grau de liberdade, a fim de corrigir o efeito causado. Assim que essa alteração corrige o efeito causado em uma segunda dupla, não temos mais graus de liberdade para corrigir o efeito na terceira dupla. Contudo, ainda podemos questionar se a correção da segunda já serviu para corrigir a terceira. Isso ocorre se há simetria no problema. No caso, como os três pulsares definem um plano, existe uma simetria espelhada na figura.



Finalmente, uma configuração de quatro pulsares não coplanares elimina a simetria outrora existente, mas mantendo a quantidade de restrições maior que a de graus de liberdade. Portanto, a quantidade mínima de pulsares necessários é quatro.

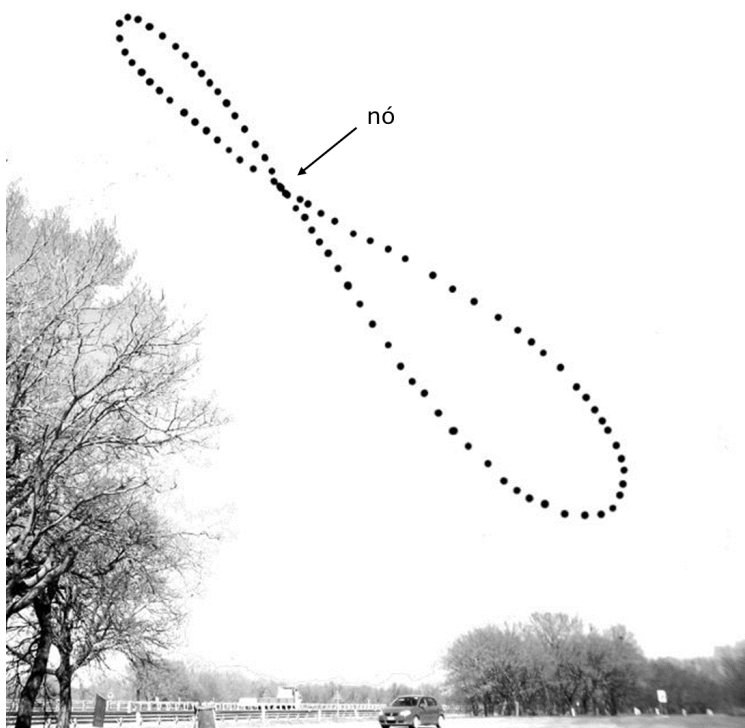
- 3. Analema (20 pontos)** A equação do tempo é definida como a diferença entre o tempo solar verdadeiro e o tempo solar médio (que transcorre em ritmo constante, sem considerar fuso-horário ou horário de verão). Para pequenas excentricidades e inclinações orbitais, ela pode ser escrita como a soma de duas componentes:

$$E.T. = -2e \cdot \text{sen}[k_1 \cdot M] + \tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}[k_2 \cdot (M + \lambda_P)]$$

Em que  $e$  é a excentricidade,  $\varepsilon$  a inclinação orbital,  $M$  a anomalia média e  $\lambda_P$  a longitude eclíptica do periastro.

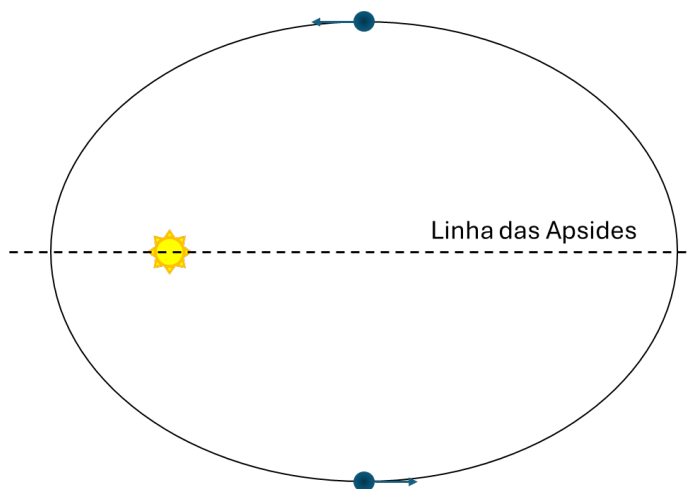
- Determine as constantes  $k_1$  e  $k_2$ . **Justifique** sua resposta.
- Se sobrepuermos fotografias do Sol ao longo do ano tiradas num horário fixo, obteremos a figura do analema. Determine a declinação solar no ponto de nó do analema.

**Dica:** Para calcular a declinação solar em função da anomalia média, talvez compense desprezar a excentricidade da Terra.

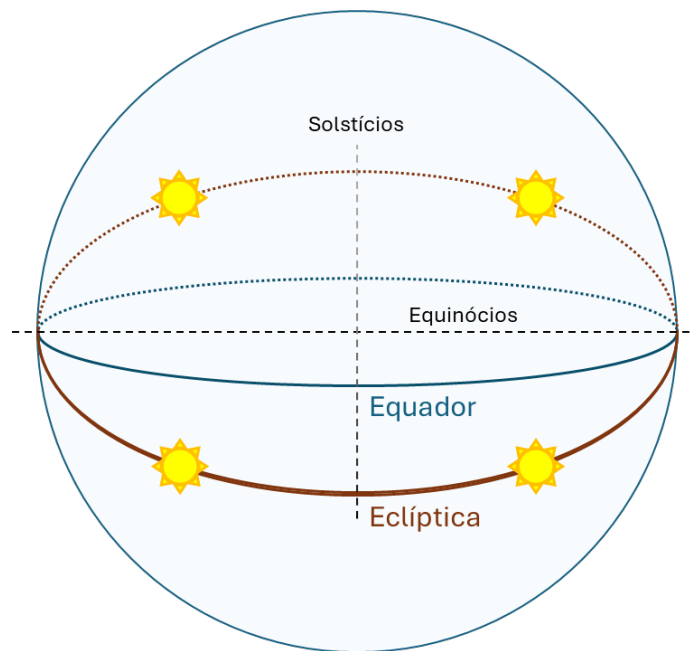


**Solução:**

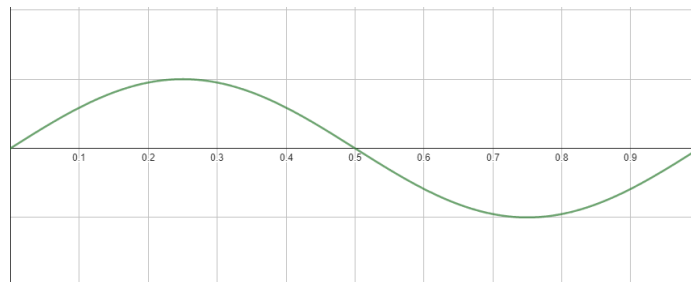
- (a) A E.T. apresenta um ventre quando a velocidade do Sol verdadeiro é igual à velocidade do Sol fictício.  
 Para uma órbita elíptica, a única simetria é em relação à linha das apsides. Sendo assim, existem dois pontos de ventre.



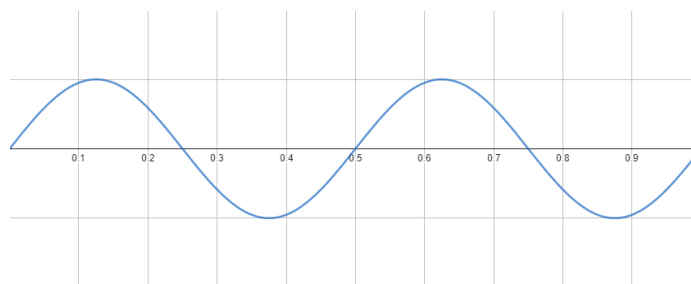
Para ter dois ventres, o período deve ser igual ao ano todo:



Já considerando a obliquidade da Eclíptica, existem duas simetrias, uma em relação à linha dos Solstícios, a outra, dos Equinócios. Por conta disso, há quatro pontos de ventre.



Para ter quatro ventres, o período deve ser igual à metade do ano:



Sendo assim, encontramos:  $k_1 = 1$  (senoide com período de um ano), e  $k_2 = 2$  (senoide com período de meio ano).

(b) A declinação solar é dada por:

$$\delta = \varepsilon \cdot \text{sen}(\nu + \lambda_P)$$



Como a excentricidade da órbita terrestre é pequena,  $\nu \approx M$ , ou seja:

$$\delta = \varepsilon \cdot \text{sen}(M + \lambda_P)$$

No ponto de nó existem duas anomalias médias que apresentam a mesma declinação e a mesma E.T.

$$\varepsilon \cdot \text{sen}(M_1 + \lambda_P) = \varepsilon \cdot \text{sen}(M_2 + \lambda_P)$$

De onde surgem duas soluções:

$$M_2 = M_1 \text{ (solução trivial)}$$

$$M_2 = \pi - M_1 - 2\lambda_P \text{ (solução específica)}$$

Igualando as equações do tempo:

$$-2e \cdot \text{sen}(M_1) + \tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}(2M_1 + 2\lambda_P) = -2e \cdot \text{sen}(M_1 + 2\lambda_P) - \tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}(2M_1 + 2\lambda_P)$$

$$\tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}(2M_1 + 2\lambda_P) = e \cdot [\text{sen}(M_1) - \text{sen}(M_1 + 2\lambda_P)]$$

Utilizando o seno do arco duplo e prostaférese:

$$2 \tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}(M_1 + \lambda_P) \cdot \cos(M_1 + \lambda_P) = -2e \cdot \text{sen}(\lambda_P) \cdot \cos(M_1 + \lambda_P)$$

Os casos  $\cos(M_1 + \lambda_P)$  representam os pontos de solstício, para os quais a condição de contorno  $\delta_1 = \delta_2$  apresenta duas soluções triviais.

$$\tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{sen}(M_1 + \lambda_P) = -e \cdot \text{sen}(\lambda_P)$$

$$\text{sen}(M_1 + \lambda_P) = -\frac{e \cdot \text{sen}(\lambda_P)}{\tan^2(\varepsilon/2)}$$

$$\delta = -\frac{e \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\lambda_P)}{\tan^2(\varepsilon/2)}$$

4. **Binárias (25 pontos)** O grande astrônomo Eduardo está observando um sistema binário de órbita com  $i = 90^\circ$ , em que a estrela B tem  $\frac{2}{3}$  da massa da outra. Ele checa os registros das estrelas e vê os dados das coordenadas das estrelas para duas datas diferentes:

- (a) Eduardo, sempre pensando em criar novas questões, quer descobrir mais informações sobre o sistema. Assim, descubra a distância até esse sistema.

**Dica:** Pode ser útil calcular a paralaxe do sistema.

Tabela 1: Posição das estrelas

Data	Estrela	Ascensão Reta	Declinação
13 de janeiro de 2024	Componente A	$7^h 23^m 38,96^s$	$36^\circ 42' 53,77''$
13 de janeiro de 2024	Componente B	$7^h 23^m 39,09^s$	$36^\circ 42' 55,27''$
11 de julho de 2024	Componente A	$7^h 23^m 38,97^s$	$36^\circ 42' 53,69''$
11 de julho de 2024	Componente B	$7^h 23^m 39,08^s$	$36^\circ 42' 55,52''$

Eduardo se deparou com um segundo sistema binário e ficou muito surpreso em ver que ele estava a mesma distância da Terra que o primeiro sistema. As velocidades tangenciais mínimas medidas das componentes foram  $\mu_B = 99$  mas/ano e  $\mu_A = 64$  mas/ano e a velocidade máxima de afastamento da estrela A foi  $u_A = 14,38$  km/s. Além disso, o período medido do sistema é  $T = 16,76$  anos.

- (b) Agora, descubra uma informação muito importante do sistema: qual a massa de cada componente? Considere que suas órbitas são circulares.

### Solução:

- (a) Para calcular a distância do sistema, calculamos a paralaxe, que é a variação da posição do centro de massa em 6 meses.

Podemos encontrar a posição do centro de massa por:

$$\delta_{CM} = \delta_A + \Delta\delta_A$$

$$\alpha_{CM} = \alpha_A + \Delta\alpha_A$$

$$\frac{a_A}{a} = \frac{\Delta\delta_A}{\Delta\delta}$$

onde  $\Delta\delta_A$  é a variação de declinação entre o centro de massa e a estrela A e  $a_A$  é sua distância ao centro de massa. Fazendo o mesmo para a ascensão reta:

$$\frac{a_A}{a} = \frac{\Delta\alpha_A}{\Delta\alpha}$$

Por propriedades do sistema binário:

$$\frac{a_A}{a} = \frac{M_B}{M_A + M_B} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_{CM,1} = 7^h 23^m 39,01^s$$

$$\delta_{CM,1} = 36^\circ 42' 54,37''$$

$$\alpha_{CM,2} = 7^h 23^m 39,01^s$$

$$\delta_{CM,2} = 36^\circ 42' 54,42''$$

A variação na posição do centro de massa é:

$$(2p)^2 = (\delta_{CM,2} - \delta_{CM,1})^2 + (\alpha_{CM,2} - \alpha_{CM,1})^2$$

$$\Rightarrow 2p = 0.05''$$

Logo, a distância do sistema é  $\boxed{40pc}$ .

(b) A velocidade tangencial espacial de uma das estrelas é dada por:

$$v_t = \mu \times d$$

Substituindo, encontramos  $v_{t,A} = 12144$  m/s e  $v_{t,B} = 18785$  m/s.  
A inclinação da órbita pode ser encontrada por

$$\tan i = \frac{v_t}{v_r}$$

Utilizando os valores de A, temos  $i = 40,2^\circ$   
Por trigonometria:

$$v_t = v \times \sin i$$

Assim, encontramos  $v_A = 18822$  m/s  $v_B = 29155$  m/s  
Como a órbita é circular, podemos utilizar:

$$v_A + v_B = \frac{2\pi a}{T}$$

$$\Rightarrow a = 4,03 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Pela terceira lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$$

Devido a ser um sistema binário, temos:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{M_B}{M_A}$$

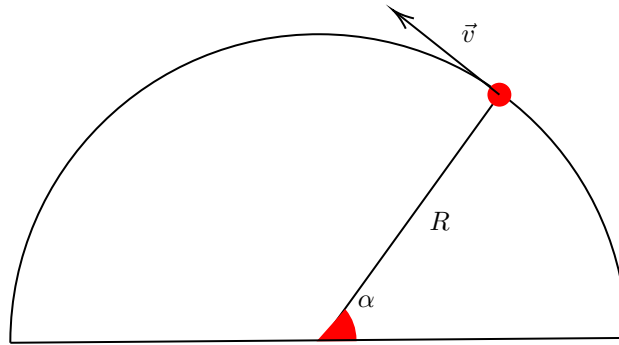
$$\Rightarrow M = M_A + \frac{v_A}{v_B} \cdot M_A \Rightarrow M_A = \frac{M}{\left(1 + \frac{v_A}{v_B}\right)}$$

Por fim, encontramos:

$$M_A = 8,44 \cdot 10^{31}$$

$$M_A = 42,4M_\odot \text{ e } M_B = 27,4M_\odot$$

- 5. Corra como se não houvesse amanhã! (30 pontos)** Davi está amando seu tempo como estudante de física na Universidade de São Paulo ( $\varphi = 23,56^\circ$  S,  $\lambda = 46,64^\circ$  O). É como uma luva para a sua mão, tão natural como a luz do dia. Gostou tanto que entrou num pequeno clube de astronomia para passar mais tempo observando objetos astrofísicos como hobby. Em um dos estudos em grupo, o líder do clube propôs a Davi que ele subisse uma montanha artificial que tem o formato de um hemisfério esférico, de raio  $R = 2$  km, que fica bem no centro de São Paulo, no dia 20 de junho de 2024. Com um telescópio de 5 kg nas mãos, Davi quis manter o centro do Sol no horizonte quanto tempo fosse possível durante sua subida. Por isso, assim que o centro do Sol tocou o horizonte, Davi começou a percorrer o mais rápido que podia a superfície da montanha, com velocidade  $v = 30$  m/s.



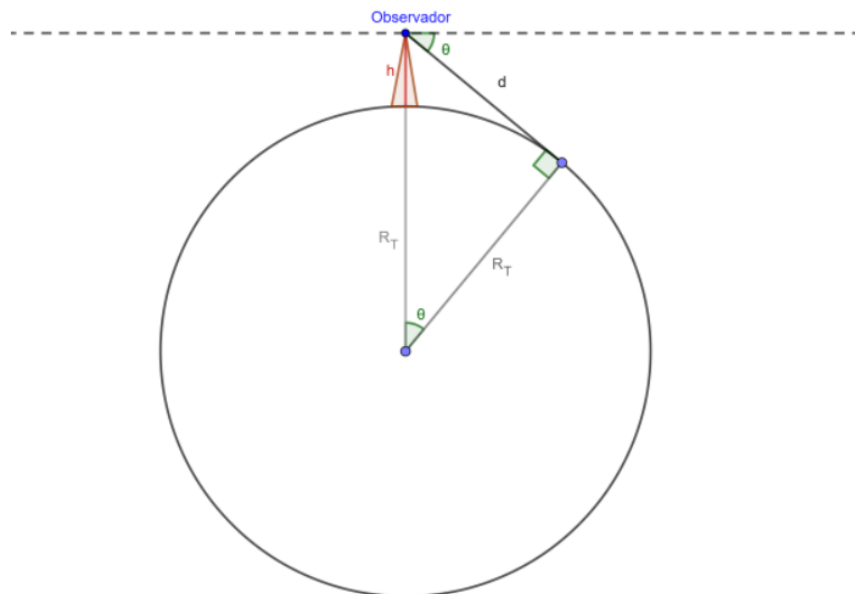
Com base nisso, por quanto tempo Davi será capaz de manter o Sol no horizonte?

**Dica:** Se necessário, utilize que, para  $x$  bem pequeno,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

**Solução:** A altura de Davi pode ser expressa como  $h = R \sin \alpha$ . Seja  $R_T$  o raio da Terra. Seja  $\theta$  o ângulo correspondente ao arco perpendicular ao horizonte inicial e ao horizonte observado por Davi na altura  $h$  em que ele está. Da imagem a seguir, podemos calculá-lo facilmente:



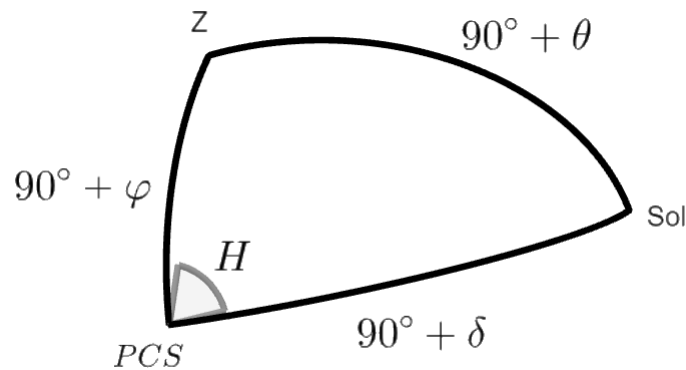
$$\cos \theta = \frac{R_T}{R_T + R \sin \alpha}$$

$$\cos \theta = \left( 1 + \frac{R \sin \alpha}{R_T} \right)^{-1}$$

Podemos, então, usar as aproximações dadas, já que  $R \ll R_T$ :

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{R \sin \alpha}{R_T}$$

$$\theta = \sqrt{\frac{2R \sin \alpha}{R_T}}$$



Aplicando a lei dos cossenos no Triângulo de Posição, conseguimos:

$$\cos(90^\circ + \theta) = \cos(90^\circ + \delta) \cos(90^\circ + \varphi) + \sin(90^\circ + \delta) \sin(90^\circ + \varphi) \cos(H_0 + \Delta H)$$

$$-\sin \theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(H_0 + \Delta H)$$

Onde  $H_0$  é o ângulo horário do centro do Sol quando ele estava no horizonte inicial. Ou seja, é algo que facilmente podemos encontrar aplicando a lei dos cossenos no Triângulo de Posição na configuração em que a altura do Sol é  $90^\circ$ :  $\cos H_0 = -\tan \delta \tan \varphi$ . Sabendo que  $\cos(H_0 + \Delta H) = \cos H_0 \cos \Delta H - \sin H_0 \sin \Delta H \approx \cos H_0 - \sin H_0 \Delta H$  e  $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta \approx -\theta$ :

$$-\theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta (\cos H_0 - \sin H_0 \Delta H)$$

Perceba, então, que, se  $\cos H_0 = -\tan \delta \tan \varphi$ , então  $0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(H_0)$ . Daí:

$$\theta = \sin H_0 \Delta H \cos \varphi \cos \delta$$

Substituindo a expressão previamente encontrada, lembrando que  $\Delta H = \frac{\pi \Delta t}{12\text{h} \cdot 3600\text{s}}$  e que  $\alpha = \frac{v \Delta t}{R}$ :

$$\sqrt{\frac{2R \sin \alpha}{R_T}} = \cos \varphi \cos \delta \sin H_0 \Delta H$$

$$\sqrt{\frac{2R \sin \alpha}{R_T}} = \cos \varphi \cos \delta \sin H_0 \frac{\pi \Delta t}{12 \cdot 3600}$$

$$\Delta t = \frac{12 \cdot 3600}{\pi \cos \varphi \cos \delta \sin H_0} \sqrt{\frac{2R}{R_T} \sin \left( \frac{v \Delta t}{R} \right)}$$

Essa equação transcendental pode ser facilmente resolvida pelo método de iteração, resultando em:

$$\Delta t \approx 45 \text{ s}$$

Perceba que o ângulo percorrido na esfera por Davi foi de  $\alpha \approx 40^\circ$ . Por isso, seria absurdo aproximá-lo por pequeno, o que pode ser entendido como uma falha grave (sujeita a penalizações severas).

**6. Fica frio aí! (30 pontos)** Em um gélido inverno, refletindo sobre o seu futuro, Mychel acaba se lembrando da célebre frase do cientista alemão Rudolf Clausius, onde ele afirmava que:

“Há um destino final sugerido para o universo, no qual o universo se reduziu a um estado sem energia livre termodinâmica e, portanto, não pode mais sustentar processos que consomem energia.”

Intrigado, Mychel decide tentar demonstrar o resultado previsto por Clausius e, para isso, ele supõe que nosso Universo estará sempre em expansão.

- Em dúvidas de por onde começar, Mychel decide encontrar uma expressão para a temperatura do Universo em função do redshift cosmológico da CMB, ou seja, da variação relativa do comprimento de onda da CMB entre um tempo  $t'$  e a época atual  $t_0$ . Encontre e esboce o gráfico da expressão encontrada por Mychel. Além disso, justifique a escolha dele em usar a CMB para estimar a temperatura do Universo.
- Mychel decide tentar prever o comportamento da entropia do Universo ao longo do tempo. Para isso, ele adere ao modelo mais simples possível: a interação por contato entre dois corpos com capacidades caloríficas  $C_1$  e  $C_2$ , e temperaturas  $T_1 > T_2$ . Esboce o gráfico do comportamento da entropia do Universo, encontrado por Mychel, justificando sua resposta com cálculos.
- Com apenas essas informações, Mychel cogita que já é capaz de justificar a frase do cientista. Sendo assim, com base em nossos resultados anteriores justifique o destino final sugerido por Clausius.

**Solução:**

- Partindo da definição de redshift

$$z = \frac{\lambda_f - \lambda_i}{\lambda_i}$$

Considerando a mesma onda no espaço, porém em tempos diferentes, teremos uma diferença em seu comprimento de onda, causada pela expansão do Universo, logo

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_{emi})}{\lambda(t_{emi})}$$

onde  $\lambda(t_0)$  é o comprimento de onda observado no instante atual, enquanto  $\lambda(t_{emi})$  é o comprimento de onda na época em que ele foi emitido. Logo,

$$z = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_{emi})} - 1$$

Aplicando a Lei de Wien, encontramos a expressão desejada.

$$T \propto \frac{1}{\lambda}$$

$$z = \frac{T(t_{emi})}{T(t_0)} - 1$$

$$\therefore \boxed{T(t_{emi}) = T(t_0)(1 + z)}$$

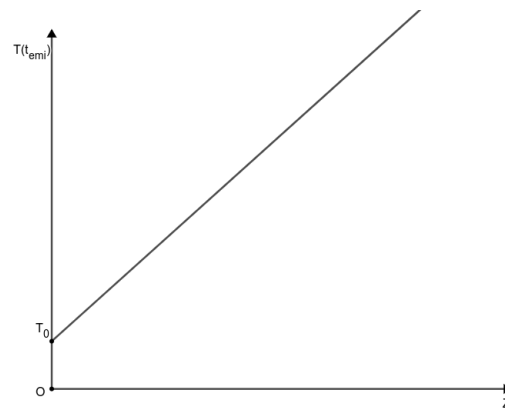


Figura 1: Modelo encontrado por Mychel da temperatura do Universo em função do redshift

A CMB é a escolha mais sensata para essa análise, pois foi emitida logo após o Universo deixar de ser opaco, ou seja, é a luz mais antiga do Universo e, portanto, carrega mais informações a respeito de sua evolução até o presente.

- (b) Pela Segunda Lei da Termodinâmica, podemos de imediato constatar que a entropia do Universo irá aumentar enquanto existirem corpos emitindo calor, uma vez que esse processo não é reversível. Em larga escala, esse é o efeito predominante: emissão, absorção e reemissão de energia.

Sendo assim, esse ciclo irá continuamente gerar entropia. Demonstramos esse resultado para a troca de calor mais simples possível. Podemos calcular as variações de entropia de cada um dos corpos, bem como a do universo, assumindo uma pequena transferência de calor:

$$\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2}$$

$$\Delta S_{uni} = Q \cdot \left( \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \right)$$

Como  $T_1 > T_2$ , a variação de entropia do universo é positiva. Esse resultado independe das capacidades caloríficas, isso é, da natureza dos corpos. Na verdade, o aumento da entropia segue da conservação da energia e de seu fluxo do corpo quente para o corpo frio.

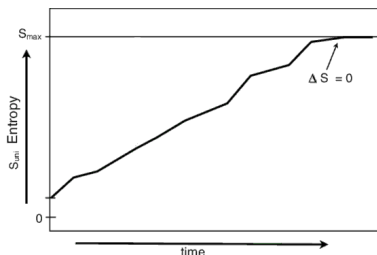


Figura 2: Esboço do comportamento da entropia do Universo ao longo do tempo, note que a única condição imposta ao esboço é que ela seja continuamente crescente de alguma forma.

- (c) Clausius previu um fim onde o Universo não tem mais energia livre, onde não ocorrem mais trocas de calor, ou seja, a morte térmica do Universo.

Com base no modelo de Mychel, toda radiação emitida no espaço sofrerá um constante "alongamento" causado pela expansão do Universo. Por outro lado, caso essa luz interaja com alguma matéria, ela será absorvida e reemitida, reiniciando o processo.

Sendo assim, notamos que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $T_{Universo} \rightarrow 0$ . Por outro lado, o item b nos mostra que a entropia do Universo irá aumentar continuamente, até atingir um valor limítrofe onde não ocorrem mais trocas de calor, ou seja, não existe mais energia livre termodinamicamente, sendo impossível ocorrerem processos que consomem energia.

Com o fim dos processos térmicos, a matéria do Universo será continuamente agregada por buracos negros que irão "evaporar".

Sendo assim, concluímos que o Universo chegará em um estado dominado por entropia, onde nada mais ocorre.

## 7. Modelamento Óptico das Lentes Gravitacionais (30 pontos)

O fenômeno das lentes gravitacionais é considerado um dos mais fascinantes por diversos astrofísicos ao redor do mundo. Ele foi descoberto e provado a partir da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, e até hoje gera diversos impactos positivos para ciência. Nessa questão, abordaremos um modelamento óptico visando estudar as lentes gravitacionais e a condição para que elas sejam observadas, seguindo os postulados da física moderna (e não clássica). Sabe-se que, pela Teoria da Relatividade Geral, a velocidade da luz quando na presença de um potencial gravitacional é dada por:

$$c_{eff} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c$$

Uma vez de posse disso, podemos calcular o índice de refração da luz  $n(r)$  à uma distância  $r$  de um corpo massivo de massa  $M$  e, assim, modelar seu movimento.

- (a) Sabendo que o índice de refração da luz em um meio  $k$  qualquer pode ser calculado por:

$$n = \frac{c}{c_k}$$

em que  $c_k$  é a velocidade da luz no meio  $k$ , mostre que o índice de refração da luz  $n(r)$  devido ao potencial gravitacional de um corpo de massa  $M$  é dado por:

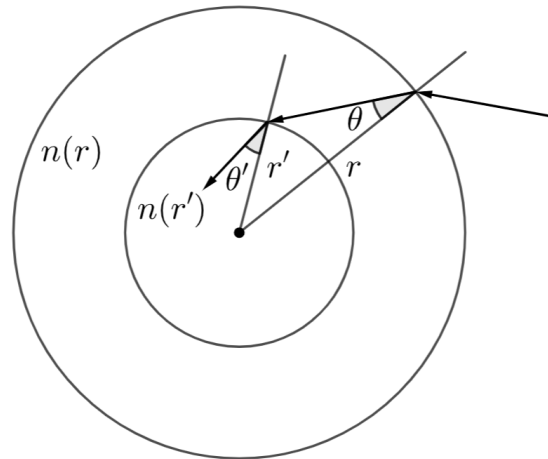
$$n(r) \approx 1 + \frac{k_1 GM}{rc^2}$$



e encontre o valor numérico de  $k_1$ .

**Dado:** Se necessário, use que:  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , quando  $x \ll 1$ .

Uma vez que a luz se aproxima de um corpo massivo, sua trajetória é curvada. Para modelar a curva descrita pela luz, é útil considerar que a luz, ao se propagar, passa por diversas cascas esféricas, como na figura abaixo. Pela Lei de Snell, é possível, por meio disso, encontrar uma equação invariável que dita o movimento da luz.



(b) Mostre que, nas condições anteriores:

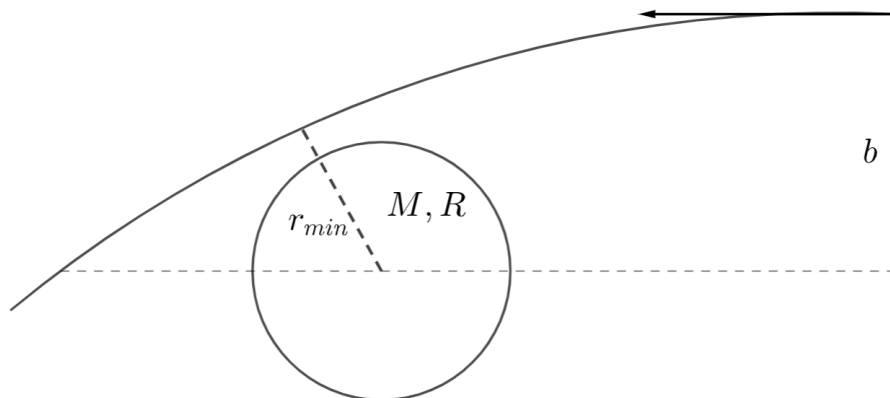
$$n(r)r \sin \theta(r) = \text{cte}$$

ou seja, que o valor acima é uma constante. Considere  $n(r)$  como o índice de refração da luz à uma distância  $r$  e  $\theta(r)$  o ângulo formado pela direção da luz e a normal da casca esférica.

**Dado:** Lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Com base no que foi visto, conseguimos então estudar o desvio da luz devido à corpos massivos. Para isso, considere um cenário em que um raio de luz se aproxima de um corpo massivo de massa  $M$  e raio  $R$  a partir de um parâmetro de impacto  $b$ . Sabe-se que, pela Teoria da Relatividade Geral, o raio será curvado devido ao potencial gravitacional do corpo massivo até se focalizar em um ponto  $F$ . Contudo, a depender do valor do parâmetro de impacto  $b$ , o raio pode não ser focalizado, de modo que o fenômeno das lentes gravitacionais não seja observado. Na condição limite em que a luz não é focalizada,  $b = b_{lim}$ . Nesse cenário, é importante calcular a distância mínima  $r_{min}$  apresentada pelo raio de luz do corpo massivo e avaliar as condições para que o raio de luz seja focalizado. Perceba que, pela física moderna, **NÃO** podemos calcular  $r_{min}$  utilizando princípios da mecânica clássica, como conservação de energia e momento angular, tendo, assim, que recorrer às equações que vimos anteriormente.



- (c) Por meio do modelamento óptico para o desvio gravitacional da luz a partir da Teoria da Relatividade Geral, mostre que o valor de  $r_{min}$  é dado por:

$$r_{min} \approx b - \frac{k_2 GM}{c^2}$$

e encontre o valor de  $k_2$ .

- (d) Na condição limite em que o fenômeno de lentes gravitacionais é observado, qual o valor do parâmetro de impacto  $b = b_{lim}$ ? O que aconteceria caso  $b < b_{lim}$ ?

**Solução:**

- (a) Pelas informações do enunciado:

$$n = \frac{c}{c_{eff}}$$

Assim:

$$n = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$$

Utilizando a aproximação dada no enunciado, obtemos que:

$$n \approx 1 + \frac{2GM}{rc^2}$$

Concluindo então que  $k_1 = 2$ .

- (b) Denomine  $\alpha$  o ângulo formado pela interface de meio  $n(r)$  e  $n(r')$ . Pela Lei de Snell:

$$n(r) \sin \alpha = n(r') \sin \theta'$$

Porém, pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \theta}{r'}$$

Assim,

$$\sin \alpha = \frac{r}{r'} \sin \theta$$

Portanto,

$$n(r) \frac{r}{r'} \sin \theta = n(r') \sin \theta'$$

Então:

$$n(r)r \sin \theta = n(r')r' \sin \theta' = \dots = \text{cte}$$

(c) No momento em que a distância é mínima,  $\theta = 90^\circ$ . Dessa maneira, pela equação anterior:

$$n(r_{min})r_{min} = n_\infty r_\infty \sin \theta_\infty$$

Perceba, porém, que  $n_\infty = 1$  e  $r_\infty \sin \theta_\infty = b$ , de tal forma:

$$n(r_{min})r_{min} = b$$

Substituindo o valor aproximado de  $n(r)$ , obtemos que:

$$\left(1 + \frac{2GM}{r_{min}c^2}\right) r_{min} \approx b$$

Ou seja:

$$r_{min} + \frac{2GM}{c^2} \approx b$$

Logo:

$$r_{min} \approx b - \frac{2GM}{c^2}$$

de onde concluímos que  $k_2 = 2$ .

(d) No limite em que o raio de luz é focalizado,  $r_{min} = R$ , de tal modo:

$$R = b_{lim} - \frac{2GM}{c^2}$$

Então:

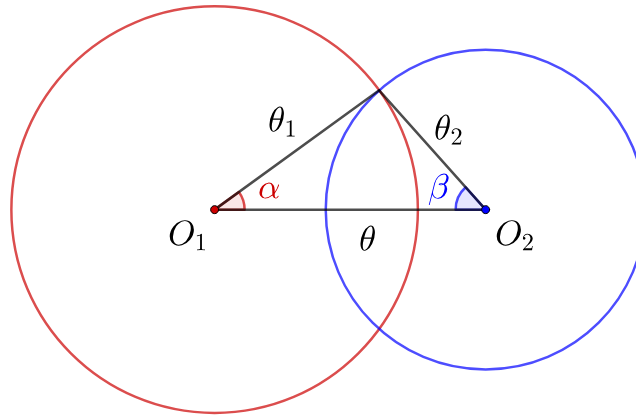
$$b_{lim} = R + \frac{2GM}{c^2}$$

Caso  $b < b_{lim}$  o raio de luz será absorvido pelo corpo massivo e, portanto, não será focalizado em nenhum ponto.

## 8. Encontrando a curva de luz (40 pontos)

Hugo planejava observar o eclipse de um sistema binário edge-on durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, mas seus planos foram adiados por conta de uma grande chuva durante a noite. Sem nada para fazer, ele decide se preparar para uma futura observação desenhando curvas de luz para sistemas binários edge-on de diferentes parâmetros. Em todas as suas curvas, a estrela menor, chamada de estrela 2, oculta parcialmente a estrela maior, chamada de estrela 1. Nossa tarefa é ajudá-lo a obter uma função que descreva a curva de luz para uma dada razão entre os raios das estrelas  $A = R_2/R_1$  e uma dada razão entre suas temperaturas  $B = T_2/T_1$ . Assim, queremos encontrar a variação de magnitude  $\Delta m > 0$  do binário em relação à situação sem eclipse em função de um parâmetro  $x$ , definido nesse problema como a razão entre distância angular entre os centros das estrelas e a distância angular entre eles no início do eclipse, isto é,  $x = \theta/(\theta_1 + \theta_2)$ . Assumindo que a velocidade relativa entre as estrelas permaneça constante,  $x$  também nos dá uma parametrização do tempo durante o eclipse.

- (a) A figura a seguir mostra o binário em um certo momento durante o eclipse (as cores são meramente ilustrativas):



Como as distâncias angulares neste problema são muito pequenas, aproximamos os arcos de medida  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta$  para retas. Obtenha as expressões para os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  em termos de  $A$  e  $x$ . Assuma que  $\theta_1 - \theta_2 < \theta < \theta_1 + \theta_2$ .

- (b) Encontre a área angular  $S$  da estrela 1 que é ocultada durante o eclipse em termos de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  (você não precisa substituir as expressões encontradas no item anterior).
- (c) Encontre a variação de magnitude  $\Delta m > 0$  do binário em relação à situação sem eclipse. Deixe sua resposta em termos de  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .
- (d) Argumente por que a expressão obtida no item anterior só é válida na condição  $(1 - A)/(1 + A) \leq x \leq 1$ . Encontre uma expressão para  $\Delta m$  em termos de  $A$  e  $B$  quando  $0 \leq x \leq (1 - A)/(1 + A)$ .

Parabéns! Obtemos  $\Delta m$  para  $0 \leq x \leq 1$  e, como a situação é simétrica para  $x$  e  $-x$ , obtemos também a curva de luz do binário durante todo o eclipse!

**Solução:**

- (a) Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo da figura:

$$\theta_2^2 = \theta_1^2 + \theta^2 - 2\theta_1\theta \cos \alpha$$

Isolando  $\cos \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{\theta_1^2 + \theta^2 - \theta_2^2}{2\theta_1\theta}$$

Substituindo  $\theta = (\theta_1 + \theta_2)x$ :

$$\cos \alpha = \frac{\theta_1^2 + (\theta_1 + \theta_2)^2 x^2 - \theta_2^2}{2\theta_1(\theta_1 + \theta_2)x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $\theta_1^2$  e lembrando que  $\theta_2/\theta_1 = R_2/R_1 = A$ :

$$\alpha = \arccos \left( \frac{1 + (1 + A)^2 x^2 - A^2}{2(1 + A)x} \right)$$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{1 - A + (1 + A)x^2}{2x} \right)$$

Podemos realizar um procedimento análogo para  $\beta$ :

$$\cos \beta = \frac{\theta_2^2 + \theta^2 - \theta_1^2}{2\theta_2\theta}$$

Substituindo  $\theta = (\theta_1 + \theta_2)x$ :

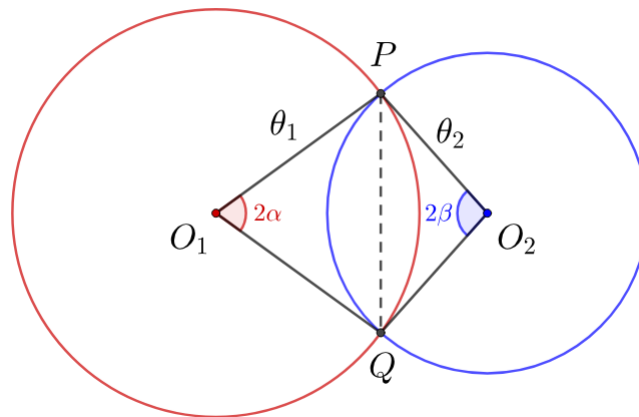
$$\cos \beta = \frac{\theta_2^2 + \theta^2 - \theta_1^2}{2\theta_2(\theta_1 + \theta_2)x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $\theta_1^2$  e lembrando que  $\theta_2/\theta_1 = R_2/R_1 = A$ :

$$\beta = \arccos \left( \frac{A^2 + (1 + A)^2 x^2 - 1}{2A(1 + A)x} \right)$$

$$\boxed{\beta = \arccos \left( \frac{A - 1 + (1 + A)x^2}{2Ax} \right)}$$

(b) Utilizaremos a seguinte figura para calcular a área pedida:



Através dela, vemos que a área oculta é igual à soma das áreas dos setores circulares correspondentes aos ângulos  $\angle PO_1Q$  e  $\angle PO_2Q$  subtraída das áreas dos triângulos  $\triangle PO_1Q$  e  $\triangle PO_2Q$ . Podemos escrever essas áreas como sendo

$$S_{\angle PO_1Q} = \pi\theta_1^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = \theta_1^2\alpha$$

$$S_{\angle PO_2Q} = \theta_2^2\beta$$

$$S_{\triangle PO_1Q} = \frac{1}{2} \cdot \theta_1 \cos \alpha \cdot 2\theta_1 \sin \alpha = \theta_1^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$S_{\triangle PO_2Q} = \theta_2^2 \sin \beta \cos \beta$$

Assim, temos que a área angular oculta é

$$S = S_{\angle PO_1Q} + S_{\angle PO_2Q} - S_{\triangle PO_1Q} - S_{\triangle PO_2Q}$$

$$\boxed{S = \theta_1^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + \theta_2^2(\beta - \sin \beta \cos \beta)}$$

Ou, alternativamente, respostas na seguinte forma também são aceitas

$$S = \theta_1^2 \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \theta_2^2 \left( \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right)$$

- (c) Sendo  $d$  a distância do binário até a Terra, o fluxo vindo da estrela 1 na situação sem eclipse é dado por

$$F_1 = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi d^2} = \sigma \left(\frac{R_1}{d}\right)^2 T_1^4 = \sigma \theta_1^2 T_1^4$$

Analogamente,

$$F_2 = \sigma \theta_2^2 T_2^4$$

Sabemos que o fluxo vindo de uma estrela é proporcional à sua área visível. Assim, o fluxo vindo da estrela 1 durante o eclipse é

$$F_1 \cdot \frac{\pi \theta_1^2 - S}{\pi \theta_1^2} = F_1 - F_1 \cdot \frac{S}{\pi \theta_1^2}$$

Pela equação de Pogson:

$$\Delta m = -2,5 \log \left( \frac{F_1 + F_2 - F_1 \cdot S/(\pi \theta_1^2)}{F_1 + F_2} \right)$$

$$\Delta m = -2,5 \log \left( 1 - \frac{F_1}{F_1 + F_2} \cdot \frac{S}{\pi \theta_1^2} \right) = -2,5 \log \left( 1 - \frac{\theta_1^2 T_1^4}{\theta_1^2 T_1^4 + \theta_2^2 T_2^4} \cdot \frac{S}{\pi \theta_1^2} \right)$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração nos parênteses por  $\theta_1^2 T_1^4$ :

$$\Delta m = -2,5 \log \left( 1 - \frac{1}{1 + A^2 B^4} \cdot \frac{S}{\pi \theta_1^2} \right)$$

Substituindo a expressão de  $S$ :

$$\Delta m = -2,5 \log \left( 1 - \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + A^2(\beta - \sin \beta \cos \beta)}{\pi(1 + A^2 B^4)} \right)$$

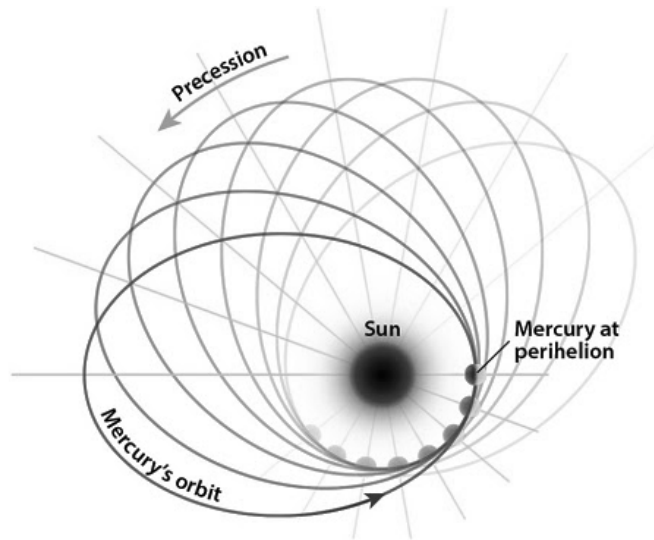
- (d) A expressão obtida para  $\Delta m$  é válida a partir do momento inicial do eclipse, quando  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  e  $x = 1$ . Porém, ela para de ser válida quando  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ , pois a partir daí a área ocultada torna-se constante, já que a estrela 2 está totalmente na frente da estrela 1, e portanto,  $\Delta m$  também é constante. Nesse momento, temos que

$$x = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{1 - A}{1 + A}$$

Assim, a expressão obtida é válida para  $\frac{1-A}{1+A} \leq x \leq 1$ . Para  $0 \leq x \leq \frac{1-A}{1+A}$ , podemos utilizar  $S = \pi \theta_2^2$ , obtendo

$$\Delta m = -2,5 \log \left( 1 - \frac{A^2}{1 + A^2 B^4} \right)$$

**9. O bom samaritano (50 pontos)** Por alguns anos, a precessão do periélio de Mercúrio foi uma pedra no sapato dos astrônomos, pois o valor medido experimentalmente não estava de acordo com aquele previsto na teoria. Diversas soluções foram propostas, até que finalmente a Teoria da Relatividade Geral colocou um ponto final na história.



Infelizmente, reproduzir os cálculos que levam ao valor preciso do período de precessão da órbita de Mercúrio estão fora do escopo dessa questão... Mas, por sorte, certo dia um bom samaritano me mostrou que a energia potencial central de uma órbita pode ser escrita como

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

Em que o primeiro termo corresponde ao potencial de Kepler, sendo  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Muito jocoso, ele decide não dizer como encontrar o período de precessão a partir desse potencial, mas prometeu que em sua volta explicaria como encontrá-lo.

Como não sabemos quando ele irá voltar, vamos aos cálculos...

- Se possível, qual será o raio orbital  $r$  de uma partícula de massa  $m$  e momento angular de módulo  $L$ , submetida a esse potencial que possui órbita circular? Qual a condição imposta a  $\beta$ , em função de  $L$  e  $m$ , para que o termo de Kepler domine o potencial da órbita?
- Considerando que o potencial de Kepler prevalece no potencial central da órbita e que a excentricidade da órbita satisfaz  $e \ll 1$ , mostre que a velocidade angular de precessão de uma massa de prova  $m$  com energia total  $E < 0$  pode ser dada por

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi\beta}{L^2T}$$

onde  $L$  é o módulo do momento angular e  $T$  o período da órbita.

- A perturbação causada pelo potencial proporcional a  $r^2$  pode ser interpretada em termos da quantidade adimensional medida no periastro

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha a}$$

onde  $a$  é semi-eixo maior da órbita.

Encontre uma expressão para  $\eta$  em termos da excentricidade ( $e$ ), período ( $T$ ) e frequência de precessão da órbita ( $f_{prec.}$ ).

**Solução:**

- (a) Em uma órbita circular temos indubitavelmente  $\ddot{r} = 0$ , então, escrevendo a força resultante para uma massa de prova  $m$ , temos:

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \right)$$

$$0 = m\omega^2 r - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}$$

Com o momento angular, obtemos

$$L = I\omega = mr^2\omega$$

$$\omega = \frac{L}{mr^2}$$

Substituindo na expressão encontrada anteriormente

$$\frac{L^2}{mr^3} + \frac{2\beta}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

$$\frac{L^2}{m} + 2\beta - r\alpha = 0$$

$$r = \frac{\frac{L^2}{m} + 2\beta}{\alpha}$$

Isso nos mostra que é possível ter uma órbita circular com esse potencial, sob a condição de

$$\therefore r = \frac{L^2 + 2m\beta}{m\alpha}$$

Interpretando a situação proposta, podemos concluir que os efeitos do potencial adicional só serão relevantes se, e somente se, o raio da órbita for totalmente discrepante em relação ao esperado para uma órbita circular kepleriana clássica.

Para que isso ocorra, é necessário que o termo adicional  $\Delta r$  seja muito menor que o valor kepleriano do raio orbital, ou seja,  $L^2 \gg 2m\beta$ ,

$$\therefore \beta \ll \frac{L^2}{2m}$$

- (b) Supondo que uma massa de prova  $m$  está sujeita ao potencial central fornecido, podemos escrever sua força resultante radial

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -\frac{d}{dr} U(r)$$

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \right)$$



$$m\ddot{r} = m\omega^2 r - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}$$

Escrevendo  $\omega$  em termos do momento angular da órbita

$$L = I\omega \implies \omega = \frac{L}{I}$$

Com  $I = mr^2$ ,

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}$$

Manipulando a expressão,

$$m\ddot{r} = \frac{L^2 + 2m\beta}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

Completando o quadrado no primeiro termo

$$m\ddot{r} = \frac{L^2 + 2m\beta + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2 - \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

$$m\ddot{r} = \frac{\left(L + \frac{m\beta}{L}\right)^2 - \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

Conforme mostrado no item anterior, quando o potencial de Kepler predomina, temos  $L^2 \gg 2m\beta$  e, portanto, o termo  $-\frac{m\beta}{L^2}$  pode ser desprezado, nos levando a

$$m\ddot{r} = \frac{\left(L + \frac{m\beta}{L}\right)^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

Em uma órbita processionando em seu plano orbital, esperamos que seu momento angular  $L_{eff}$  seja dado pela soma do momento angular devido ao movimento orbital de translação, o momento angular de uma órbita kepleriana de mesmos parâmetros, com o momento angular associado ao movimento de precessão. Sendo assim, esperamos algo do tipo  $L_{eff} = mr^2\dot{\theta} + mr^2\dot{\Omega}$ .

Estudando a expressão para  $m\ddot{r}$ , notamos que

$$\left(L + \frac{m\beta}{L}\right)$$

corresponde ao  $L_{eff}$  esperado, logo

$$mr^2\dot{\theta} + mr^2\dot{\Omega} = L + \frac{m\beta}{L}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{m\dot{\theta}\beta}{L^2}$$

Usando como artifício o fato de termos uma órbita onde  $e \ll 1$ , podemos aproximar a velocidade angular da órbita kepleriana  $\dot{\theta}$  para a velocidade angular de uma órbita kepleriana circular, permitindo concluir que

$$\therefore \dot{\Omega} = \frac{2\pi\beta}{L^2 T}$$

- (c) Conforme demonstrado anteriormente, a equação da força resultante radial atuando na massa de prova  $m$  é dada por

$$m\ddot{r} = \frac{\left(L + \frac{m\beta}{L}\right)^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

Como estamos considerando excentricidades  $e \ll 1$ , temos  $\ddot{r} \approx 0$ .

$$\frac{\alpha}{r^2} = \frac{\left(L + \frac{m\beta}{L}\right)^2}{mr^3}$$

Invocando o resultado de que  $L^2 \gg 2m\beta$ , temos

$$\frac{\alpha}{r^2} = \frac{L^2}{mr^3}$$

Essa aproximação, na referida situação, é válida, pois o potencial de Kepler prevalece no potencial central, enquanto a excentricidade é muito pequena. Note que essa aproximação é igualmente válida nos itens anteriores, mas se ela tivesse sido realizada não seria possível encontrar  $\dot{\Omega}$ , cuja ordem de grandeza é muito menor que a dos demais termos.

Manipulando algebricamente a expressão para velocidade angular de precessão

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \frac{m}{L^2} \beta$$

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \frac{ma\alpha}{L^2} \frac{\beta}{a\alpha}$$

Manipulando a expressão encontrada no início, temos

$$\frac{\alpha}{r^2} = \frac{L^2}{mr^3}$$

$$L^2 = \alpha mr$$

$$\frac{\alpha ma}{L^2} = \frac{1}{r}$$

Como a órbita é praticamente circular (diante das aproximações usadas), tomemos por conveniência o raio dessa órbita aproximada como sendo o periastro da órbita verdadeira. Logo, substituindo e isolando o termo correspondente a perturbação, é possível encontrar a expressão desejada.

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{1-e} \frac{\beta}{a\alpha}$$

$$\frac{\beta}{a\alpha} = \frac{\dot{\Omega}(1-e)T}{2\pi}$$

$$\frac{\beta}{a\alpha} = \Omega(1-e)f_{prec.}$$

$$\therefore \boxed{\eta = (1-e)\dot{\Omega}f_{prec.}}$$

## 10. Satélites Geossíncronos (55 pontos)

Satélites geossíncronos, para os quais o dia sideral terrestre é um múltiplo de seu período orbital, são extensamente utilizados para comunicação e imageamento da Terra. dentro dessa categoria, estão inse-

ridos os satélites geoestacionários, com uma órbita no plano do equador terrestre, e os satélites de alta inclinação orbital, como os do tipo Molniya e Tundra, ambos com órbitas altamente elípticas e de alta inclinação. Esta segunda categoria de órbitas geossíncronas foram desenvolvidas pela União Soviética na década de 1960 como uma alternativa às órbitas geoestacionárias para comunicação.

- (a) Considere um camarada na cidade de Murmansk ( $\phi_M = 68^\circ 58' N$ ,  $\lambda_M = 33^\circ 5' O$ ) e um satélite geoestacionário situado no mesmo meridiano do observador. Calcule o altura angular em que o camarada observará o satélite.
- (b) Percebendo a baixa altura em que observará o satélite, nosso camarada decide estimar qual o comprimento de massa de ar que o sinal de comunicação precisa percorrer para chegar até ele vindo do satélite. Ajude-o calculando esse valor em função do comprimento de massa de ar de um sinal vindo do zênite.

**Dados:** considere a altura da atmosfera como  $H = 85\text{km}$

Para melhorar as condições de recepção do sinal de comunicação para a região de Murmansk, consideremos a possibilidade de lançar uma constelação de satélites do tipo Molniya, que apresentam alta excentricidade e inclinação orbital, além de sobrevoar o mesmo ponto na superfície terrestre a cada 2 períodos orbitais.

- (c) Preocupados com os efeitos de perturbação orbital devido ao achatamento da Terra, é preferível lançar a constelação de satélites em uma inclinação orbital que minimize os efeitos de variação do argumento do perigeu,  $\omega$ , (ângulo medido no plano orbital a partir do nó ascendente até o perigeu). Ajude a determinar esse valor de  $i$ .

**Dados:** A taxa de variação de  $\omega$  é dada pela seguinte fórmula, onde  $n$  é a velocidade angular média do satélite, o raio equatorial terrestre é  $R_E = 6,378 \cdot 10^6\text{m}$ , o semi-eixo maior, a inclinação e a excentricidade orbitais são, respectivamente  $a$ ,  $i$  e  $e$ , além da constante  $J_2 = 1,083 \cdot 10^{-3}$ :

$$\dot{\omega} = 0,75nJ_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^2}$$

- (d) Sabendo que satélite não pode estar a uma altitude menor que 600km devido à presença considerável de arrasto atmosférico, calcule o semi-eixo maior e a maior excentricidade possível para a orbita do satélite.

**Dados:** Desconsidere por enquanto a variação na ascensão reta do nodo ascendente devido ao achatamento terrestre.

Já que o satélite do tipo Molniya possui inclinação orbital, não é mais possível que este permaneça sempre na mesma posição em relação a superfície terrestre. Para solucionar esse problema, esse tipo de satélite possui uma órbita com maior excentricidade possível e argumento de perigeu  $\omega = 270^\circ$ , de forma que ele passa pelo apogeu enquanto cruza o meridiano do camarada. Como a excentricidade é alta, o satélite fica a maior parte do tempo próximo do local de interesse.

A seguir, vamos estudar quantos satélites são necessários para que a constelação mantenha o melhor contato com o camarada em Murmansk.

**Observação:** Adote para os próximos itens que a longitude aumenta para direção Leste.

- (e) Primeiramente, determine a latitude  $\phi$  e longitude  $\lambda$  terrestres do ponto em que o satélite está sobrevoando em função da anomalia verdadeira, do tempo contado a partir do instante em que o satélite passa pelo apogeu ( $t_{ap}$ ) e constantes.
- (f) Obtenha a distância angular ( $\mu$ ) no globo entre a cidade de Murmansk ( $\phi_M, \lambda_M$ ) e o ponto em que o satélite está sobrevoando em função de  $\phi$ ,  $\lambda$  (variáveis do item anterior) e constantes.
- (g) Calcule o ângulo de altura em que o camarada observa o satélite em função de  $\mu$ , constantes e a anomalia verdadeira ou a anomalia excêntrica.

Nas órbitas Molniya, a constelação de satélites existe para que seja possível alternar a procedência do sinal recebido em função da visibilidade dos satélites ao longo da órbita, sendo assim, vamos estudar os casos de constelações com 3 e 4 satélites em órbitas espaçadas igualmente.

- (h) Calcule a anomalia excêntrica e a anomalia verdadeira, no caso de 3 e 4 satélites por constelação, para o instante em que o camarada inicia a recepção do sinal de um dos satélites.

**Dados:** Considere que o intervalo na órbita em que o camarada recebe o sinal de um satélite é centrado em seu apogeu, ou seja, o intervalo de tempo entre o início da recepção do sinal do satélite até este passar pelo apogeu é igual ao intervalo entre a passagem pelo apogeu até a perda de seu sinal e o início do recepção do sinal pelo próximo satélite da constelação.

A anomalia excêntrica  $E$  e a anomalia verdadeira  $\theta$  se relacionam pela seguinte fórmula, sendo  $e$  a excentricidade da órbita:

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

- (i) Calcule a altura do sinal para o instante em que o camarada inicia sua recepção vinda de um dos satélites, para os casos de 3 e 4 satélites.

Após todos os cálculos para a constelação de satélites, percebe-se que as variações de ascensão reta do nodo ascendente devido ao achatamento da Terra poderiam causar que estes não passassem mais pelo apogeu e pelo meridiano do camarada simultaneamente.

- (j) Calcule a variação da ascensão reta do nodo ascendente, sabendo que esta é dada pela fórmula seguinte, que se utiliza dos mesmos parâmetros que a equação de  $\dot{\omega}$  do item (c)

$$\dot{\Omega} = -1,5nJ_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}$$

- (k) Para remediar esse efeito, o antigo período do satélite ( $T$ ) é ajustado em um valor de  $\Delta T$  variando seu semi-eixo maior. Com base em  $\dot{\Omega}$ , e sabendo que  $\Delta T \ll T$  e  $\Delta a \ll a$ , calcule  $\Delta T$  e  $\Delta a$

**Dica:**  $(1 + x)^a \approx 1 + ax$  quando  $|x| \ll 1$

**Solução:**

(a) Pela geometria,

O diagrama ilustra a geometria da observação de um satélite Molniya. A Terra é mostrada como um círculo com raio  $R_T$ . O satélite está em uma órbita com raio  $R_S$ . O ângulo entre o eixo da Terra e a linha de visibilidade do satélite é  $\varphi_M$ . O ângulo entre o eixo da Terra e a linha de visibilidade do satélite é  $\theta = 90^\circ + h$ . A distância entre o satélite e o ponto de observação na Terra (Murmansk) é  $x$ . O Equador é indicado por uma linha horizontal.

O raio do satélite é calculado igualando o seu período orbital ao dia sideral

$$\frac{T^2}{R_s^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \Rightarrow R_s = \left[ \frac{GM_\oplus (23\text{h } 56\text{min } 04\text{s})^2}{4\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{m}$$

Deve-se calcular primeiramente a distância  $x$  do camarada até o satélite, utilizando a lei dos cossenos da geometria plana.

$$x^2 = R_\oplus^2 + R_s^2 - 2R_\oplus R_s \cos \phi \Rightarrow x = 4,03 \cdot 10^7 \text{m}$$

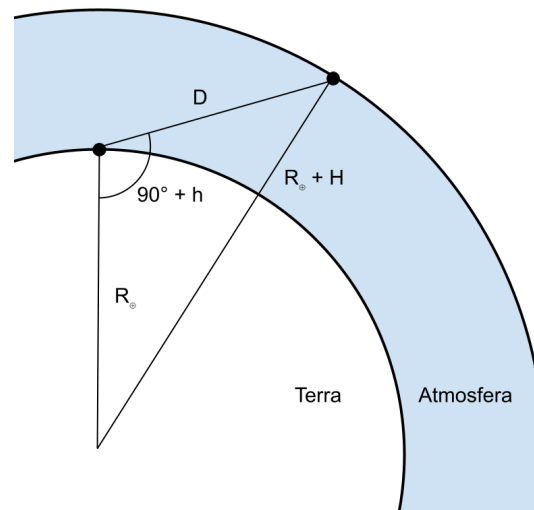
Agora utilizando a lei dos senos,

$$\frac{\sin \theta}{R_s} = \frac{\sin \phi_M}{x} \Rightarrow \sin \theta = \sin \phi_M \frac{R_s}{x} = 0,976$$

$$\theta = \arcsin(0,976) = 77^\circ 28' \text{ ou } \theta = 180 - \arcsin(0,976) = 102^\circ 32'$$

Como  $\theta > 90$ ,  $\theta = 102^\circ 32'$  e  $h = \theta - 90 = 12^\circ 32'$

(b) O problema possui a seguinte geometria



pela lei dos cossenos,

$$(R_\oplus + H)^2 = D^2 + R_\oplus^2 - 2DR_\oplus \cos(90 + h)$$

$$0 = D^2 + 2DR_\oplus \sin h - H^2 - 2R_\oplus H$$

$$D = -R_\oplus \sin h \pm \sqrt{R_\oplus^2 \sin^2 h + H^2 + 2R_\oplus H}$$

$$D = 3,50 \cdot 10^5 \text{m} \text{ ou } D = -3,12 \cdot 10^6 \text{m}$$

como  $D > 0$   $D = 3,50 \cdot 10^5 \text{m} = 4,12H$

(c) Para que haja a menor variação de  $\omega$ ,  $\dot{\omega} = 0$

$$0 = \dot{\omega} = 0,75J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^2}$$

$$0 = 4 - 5 \sin^2 i \Rightarrow \sin i = \sqrt{4/5}$$

$$i = 63^\circ 28' \text{ ou } i = 116^\circ 34'$$

como o satélite segue o mesmo sentido de rotação da Terra,  $i < 90^\circ$ , portanto  $i = 63^\circ 28'$

- (d) Desconsiderando a variação na ascensão reta do nodo ascendente da orbita do satélite, o período orbital dele é dado por metade do dia sideral, assim,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \Rightarrow a = \left[ \frac{GM_\oplus (23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}/2)^2}{4\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 2,66 \cdot 10^7 \text{m}$$

Para satisfazer a condição do perigeu,

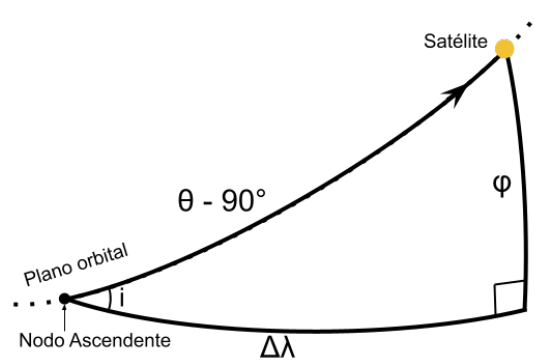
$$R_\oplus + 600\text{km} = a(1 - e) \Rightarrow e = 1 - \frac{R_\oplus + 600\text{km}}{a} = 0,737$$

Assim,

$$a = 2,66 \cdot 10^7 \text{m}$$

$$e = 0,737$$

- (e) Primeiramente vamos calcular as coordenadas em relação ao nodo ascendente, possuindo então a seguinte geometria



Pela lei dos senos,

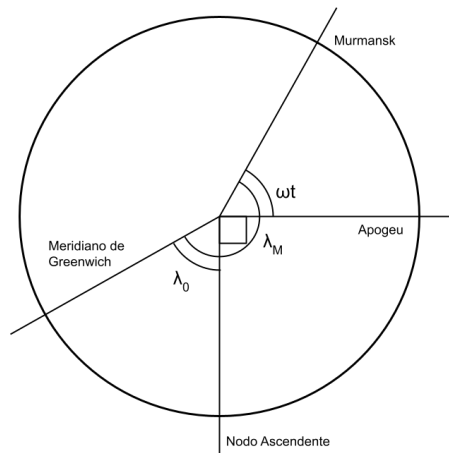
$$\frac{\sin(\theta - 90^\circ)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \phi}{\sin i} \Rightarrow \sin \phi = -\sin i \cos \theta$$

Pela lei dos quatro elementos,

$$\cot(\theta - 90^\circ) \sin \Delta\lambda = \cot 90^\circ \sin i + \cos \Delta\lambda \cos i$$

$$\cot(\theta - 90^\circ) \sin \Delta\lambda = \cos \Delta\lambda \cos i \Rightarrow \tan \Delta\lambda = -\cos i \cot \theta$$

Agora, para calcular  $\lambda_0$  tal que  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ , utiliza-se a seguinte projeção:



$$\lambda_0 = \lambda_M^{[\text{rad}]} - \frac{2\pi}{23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}} t_{ap} - \frac{\pi}{2}$$

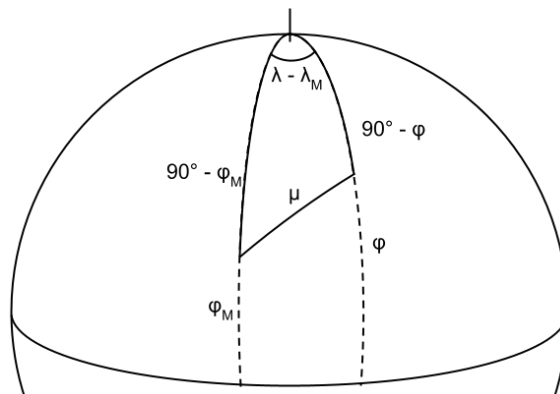
Sendo  $t$  o tempo iniciado quando o ponto diretamente embaixo do apogeu passa pelo meridiano de Murmansk, que é o mesmo momento em que o satélite passa pelo apogeu. Assim, temos que as coordenadas do ponto sobrevoado pelo satélite são

$$\phi = \arcsin(-\sin i \cos \theta)$$

$$\lambda^{[\text{rad}]} = \lambda_M^{[\text{rad}]} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}} t_{ap} + \Delta\lambda^{[\text{rad}]}$$

$$\tan \Delta\lambda = -\cos i \cot \theta$$

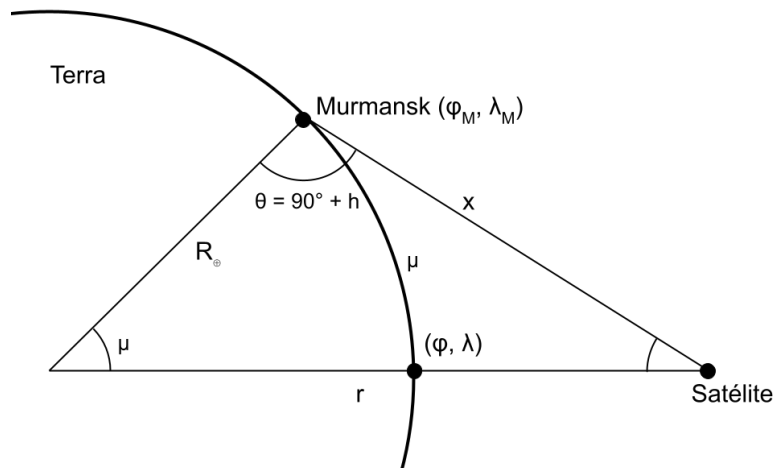
(f) Pelo desenho a seguir e pela lei dos cossenos da trigonometria esférica,



$$\cos \mu = \cos(90^\circ - \phi_M) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \phi_M) \sin(90^\circ - \phi) \cos(\lambda - \lambda_M)$$

$$\cos \mu = \sin \phi_M \sin \phi + \cos \phi_M \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_M)$$

(g) refazendo o desenho similar ao item (a), temos:



$$x = \sqrt{R_{\oplus}^2 + r^2 - 2R_{\oplus}r \cos \mu}$$

$$\sin(90 + h) = \frac{r \sin \mu}{\sqrt{R_{\oplus}^2 + r^2 - 2R_{\oplus}r \cos \mu}}$$

para calcular  $r$ , utiliza-se a equação polar da elipse, podendo ser em função da anomalia verdadeira ou da anomalia excêntrica:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos E)$$

$$\cos(h) = \frac{r \sin \mu}{\sqrt{R_{\oplus}^2 + r^2 - 2R_{\oplus}r \cos \mu}}$$

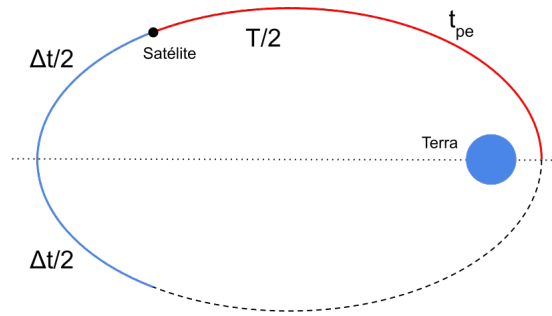
(h) Em geral, em uma constelação de  $n$  satélites, cada satélite estará se comunicando com o camarada durante um intervalos de  $23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}/n$ . Porém, como a órbita Molniya possui período  $T = 23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}/2$ , cada satélite passará  $\Delta t = 2T/n$  se comunicando com o camarada no primeiro período orbital, e depois mais de uma órbita inteira para voltar até a posição próxima do camarada. Sendo assim, é necessário relacionar o tempo de deslocamento na órbita com os ângulos de anomalia excêntrica e verdadeira no início e final do intervalo de tempo considerado.

Sabemos que, sendo  $t_{pe}$  o intervalo de tempo iniciado com a passagem do satélite pelo perigeu, é válido que:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t_{pe}$$

Como o intervalo da passagem do satélite é simétrico em relação ao apogeu e perigeu, é válido que, para o ponto de primeiro recebimento do sinal,





$$\frac{\Delta t}{2} + t_{pe} = \frac{T}{2} \Rightarrow t_{pe} = \frac{T - \Delta t}{2}$$

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} \frac{T - \Delta t}{2} = \pi \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right)$$

Para o caso de 3 satélites,  $\Delta t/T = 2/3$ , para o caso de 4,  $\Delta t/T = 2/4$

Como se trata de uma equação que não há resolução analítica, é necessário realizar algum procedimento iterativo para chegar em valor de  $E_3$  aproximado. Para isso, é possível isolar uma das ocorrências de  $E_3$  e calcular  $E_{3,1}$  para  $E_{3,0}$  inicial dado, por exemplo,  $E_{3,0} = 1$

$$E_{3,1} = e \sin E_{3,0} + \pi \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1,6674$$

$$E_{3,2} = e \sin E_{3,1} + \pi \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1,7808$$

$E_{3,3} = 1,7680$   $E_{3,4} = 1,7699$   $E_{3,5} = 1,7696$   $E_{3,6} = 1,7697$  portanto,  $E_3 \approx 1,770$  rad =  $101^\circ 25'$   
Utilizando o mesmo procedimento,  $E_4 \approx 2,177$  rad =  $124^\circ 43'$ .

Já para transformar a anomalia excêntrica na anomalia verdadeira, temos que

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$\cos \theta_3 = -0,8159 \Rightarrow \theta_3 = 144^\circ 41' \text{ ou } \theta_3 = 360^\circ - 144^\circ 41' = 215^\circ 19'$$

Como estamos calculando a posição de início do recebimento do sinal,  $\theta_3 < 180^\circ$  portanto  $\theta_3 = 144^\circ 41'$ . Perceba que, por simetria,  $215^\circ 19'$  é a anomalia verdadeira da posição em que o satélite deixa de enviar sinal para se estabelecer conexão com o próximo satélite da constelação. De forma semelhante,  $\theta_4 = 156^\circ 58'$  Dessa forma,

$$E_3 = 101^\circ 25' \quad \theta_3 = 144^\circ 41'$$

$$E_4 = 124^\circ 43' \quad \theta_4 = 156^\circ 58'$$

(i) Utilizando as formulas desenvolvidas nos itens anteriores,

$$\sin \phi = -\sin i \cos \theta \Rightarrow \phi_3 = 46^\circ 53' \quad \phi_4 = 55^\circ 25'$$

$$\tan \Delta\lambda = -\cos i \cot \theta$$

$$\tan \Delta\lambda_3 = 0,6304 \Rightarrow \Delta\lambda_3 = 32^\circ 14' \text{ ou } \Delta\lambda_3 = 180^\circ + 32^\circ 14' = 212^\circ 14'$$

Como estamos calculando a posição de início do recebimento do sinal o satélite ainda não passou pelo apogeu, e portanto,  $\Delta\lambda_3 < 90^\circ$  portanto  $\Delta\lambda_3 = 32^\circ 14'$ . De forma semelhante,  $\Delta\lambda_4 = 46^\circ 25'$ .

$$\lambda - \lambda_M = \Delta\lambda^{[\text{rad}]} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}} t_{ap}$$

para calcular  $t_{ap}$ :

$$t_{ap} = t_{pe} - T/2 = -\Delta t/2$$

$$\lambda - \lambda_M = \Delta\lambda^{[\text{rad}]} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\Delta t}{2T}$$

$$\lambda_3 - \lambda_M = \Delta\lambda_3^{[\text{rad}]} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{2}{3} = 3,885 \cdot 10^{-2} \text{rad} = 2^\circ 14'$$

$$\lambda_4 - \lambda_M = \Delta\lambda_4^{[\text{rad}]} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{2}{4} = 2,458 \cdot 10^{-2} \text{rad} = 1^\circ 25'$$

Calculando  $\mu$ :

$$\cos \mu = \sin \phi_M \sin \phi + \cos \phi_M \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_M) \Rightarrow \mu_3 = 22^\circ 7' \quad \mu_4 = 13^\circ 34'$$

Calculando  $r$ :

$$r = a(1 - e \cos E) \Rightarrow r_3 = 3,05 \cdot 10^7 \text{m} \quad r_4 = 3,78 \cdot 10^7 \text{m}$$

Agora é finalmente possível calcular  $h$ :

$$\cos h = \frac{r \sin \mu}{\sqrt{R_\oplus^2 + r^2 - 2R_\oplus r \cos \mu}} \Rightarrow \boxed{h_3 = 62^\circ 18' \quad h_4 = 73^\circ 43'}$$

(j)

$$\dot{\Omega} = -1,5nJ_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}$$

sendo que

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi}{23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}}$$

Substituindo os valores,

$$\boxed{\dot{\Omega} = -3,80 \cdot 10^{-8} \text{rad/s}}$$

(k) A velocidade angular média do satélite será a soma de  $\dot{\Omega}$  e  $2\pi/T'$  e também será igual à antiga velocidade angular do satélite:

$$\dot{\Omega} + \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T}$$

como  $T' = T + \Delta T$

$$\dot{\Omega} + \frac{2\pi}{T + \Delta T} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\dot{\Omega} + \frac{2\pi}{T} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right)^{-1} = \frac{2\pi}{T}$$

como  $\Delta t \ll T \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \ll 1$  então é possível utilizar a aproximação binomial

$$\dot{\Omega} + \frac{2\pi}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T}{T} \right) = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta T = \dot{\Omega} \frac{T^2}{2\pi}$$

Substituindo os valores, sendo  $T = 23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}/2$

$$\boxed{\Delta T = -12,1\text{s}}$$

Pela 3ª lei de Kepler,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(T + \Delta T)^2}{(a + \Delta a)^3} = \frac{T^2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2}{a^3 \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)^3}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)^3 = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2$$

Pela aproximação binomial,

$$1 + 3\frac{\Delta a}{a} = 1 + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta a = \Delta T \frac{2}{3} \frac{a}{T}$$

substituindo  $\Delta T$ ,

$$\Delta a = \dot{\Omega} \frac{T^2}{2\pi} \frac{2}{3} \frac{a}{T} = \dot{\Omega} \frac{aT}{3\pi}$$

Sendo  $a = 2,66 \cdot 10^7\text{m}$  e  $T = 23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}/2$

$$\boxed{\Delta a = -4,81 \cdot 10^3\text{m}}$$