



PROVA TEÓRICA P2  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2024

---

## Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. A duração da prova é de 4 horas;
4. A prova é composta por 4 questões (totalizando 300 pontos) e tem peso 4 na composição da média final;
5. A prova é individual e sem consultas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas;
9. Folhas de rascunho serão disponibilizadas e não precisam ser entregues junto com a prova e as folhas de respostas;
10. Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles devem ser feitos à caneta esferográfica. Utilize para isso o espaço reservado em cada uma das folhas de respostas. Às respostas, ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, será associada a nota zero.
11. Ao final da prova devolva o caderno de questões e as folhas de respostas.

## Questões

### 1. Extremely Large Telescope (75 pontos)

Planejado para captar sua primeira luz em 2028, o ELT (Extremely Large Telescope) será o maior telescópio em operação no visível, contando com um espelho primário de aproximadamente 39,3 m e uma distância focal de 743,4 m, fazendo os telescópios UT, que compõem o VLT (Very Large Telescope), parecerem pequenos com seus 8,2 m de diâmetro de abertura por telescópio.

Planejando suas futuras pesquisas sobre a Galáxia do Sombreiro ( $\delta = -11^{\circ}37'23''$ ;  $\alpha = 12^h40^m$ ), Rojas vai até as obras do ELT no Chile ( $\phi = 24^{\circ}35'S$ ;  $\lambda = 70^{\circ}12'W$ ;  $h = 3.046$  m).

- (a) Determine a razão focal do espelho primário do ELT.
- (b) Rojas sabe que M104 possui um brilho superficial no visível de  $m_{sup.} = 4,29$  mag/arcmin<sup>2</sup>. Com essa informação, qual será a magnitude aparente de M104 quando calculada por Rojas? Considere que M104 possui dimensões angulares de 8,6 arcmin por 4,2 arcmin no céu.  
**Dica:** o brilho superficial é a magnitude que o objeto apresenta por unidade de área no céu.
- (c) Determine o fluxo de fótons no visível provenientes da Galáxia do Sombreiro.  
**Dado:** comprimento de onda no visível  $\lambda = 550$  nm.

Durante o imageamento fotométrico de um objeto celeste, estamos expostos a uma ampla gama de interferências externas, os chamados ruídos. Definimos *senal* como a quantidade de fótons advindos do objeto coletados em um determinado intervalo de tempo (supondo uma eficiência de 100%), enquanto o *ruído* consiste em qualquer tipo de interferência nessa contagem - ruído do objeto, do céu, térmico e de leitura.

Para melhor estudar os efeitos do ruído na imagem final, definimos a razão sinal ruído  $S/R$ , onde  $R$  (ruído total) é dado por  $\sqrt{\sum R_i^2}$  (a raiz quadrada da soma dos quadrados dos ruídos individuais).

Em seus arquivos, Rojas encontrou uma imagem de M104 feita em um UT, com 8 minutos de exposição total, e uma razão sinal ruído igual a 98, predominando os ruídos de objeto e céu.

**Observação:** o ruído de objeto mensura as flutuações aleatórias do fluxo de fótons do objeto e pode ser calculado por  $R_{obj.} = \sqrt{S}$ .

- (d) Calcule o sinal de M104 durante o imageamento que Rojas fez no UT.
- (e) Determine o ruído de céu no momento de captura da imagem encontrada por Rojas em seus arquivos.
- (f) Em um suposto imageamento fotométrico de M104 no ELT, com um número de fótons captados análogo ao de fótons captados na imagem feita no UT, determine o tempo total do imageamento, supondo as mesmas condições de observação e medição.
- (g) Explorando os resultados, Rojas decide calcular a razão sinal ruído de uma imagem de M104 feita no ELT nas mesmas condições de observação que a realizada no UT, ou seja, o ruído de céu é o mesmo e os demais ruídos são desprezíveis, considerando o mesmo tempo de exposição de 8 minutos. Qual foi o valor encontrado? O valor real será provavelmente próximo ao encontrado? Por quê?
- (h) Comparando seu imageamento teórico de 8 minutos no ELT com a imagem feita no UT, qual imagem terá melhor resolução? Argumente com base nos valores das razões sinal ruídos desenvolvidos ao longo da questão.

**Solução: Errata:** O valor fornecido para a magnitude superficial de  $M_{104}$  não corresponde ao valor real ( $m_{sup} = 12.1$ ). Candidatos(as) que notaram a inconsistência e tentaram de alguma forma chegar em um valor coerente não foram penalizados. A presente solução demonstra todas etapas consideradas na rubrica, todavia considerando o valor correto da magnitude superficial de  $M_{104}$ .

(a) Aplicando a definição de razão focal:

$$f/ = \frac{f_{obj.}}{D}$$

$$\therefore \boxed{f/ = 18,9}$$

(b) Sabendo que o brilho superficial fornecido é igual a magnitude de uma área de  $1 \text{ arcmin}^2$  no céu, podemos determinar a magnitude aparente da galáxia a partir dos dados fornecidos e da proporção entre fluxo e ângulo sólido.

$$m_{sup.} - m_{M104} = 2,5 \log \frac{\Omega_{M104}}{1 \text{ arcmin}^2}$$

Com  $\Omega_{M104} = 8,6 \cdot 4,2 \text{ arcmin}^2$ , temos

$$m_{M104} = m_{sup.} - 2,5 \log \frac{8,6 \cdot 4,2 \text{ arcmin}^2}{1 \text{ arcmin}^2}$$

$$\therefore \boxed{m_{M104} = 8,2}$$

(c) Calculando o fluxo do Sol (constante solar):

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2}$$

$$F_{\odot} \approx 1362 \text{ W/m}^2$$

Aplicando a Equação de Pogson para determinar o fluxo de M104,

$$m_{M104} - m_{\odot} = -2,5 \log \frac{F_{M104}}{F_{\odot}}$$

$$\therefore F_{M104} = 1,49 \cdot 10^{-11} \text{ W/m}^2$$

Determinando a energia do fóton em  $\lambda_{vis.}$  e por fim encontrando o fluxo de fótons  $F_f$ ,

$$E_f = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\therefore E_f = 3,62 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

logo

$$F_f = \frac{F_{M104}}{E_f}$$

$$F_f = 4,12 \cdot 10^7 \frac{\text{f}}{\text{sm}^2}$$

(d) A partir do enunciado, podemos definir o Sinal do objeto como

$$S = F_{f\text{tons}} \cdot A_{tel.} \cdot T_{exp.}$$

Logo,

$$S = F_f \cdot \pi \left( \frac{D_{VLT}}{2} \right)^2 \cdot T_{exp.}$$

$$\therefore S = 1,04 \cdot 10^{12} \text{ constagens}$$

(e) A partir da explicação fornecida, podemos chegar em:

$$S/R = \frac{S}{\sqrt{R_{ceu}^2 + R_{obj.}^2}}$$

$$R_{ceu}^2 = \left( \frac{S}{S/N} \right)^2 - R_{obj.}^2$$

Aplicando a definição de  $R_{obj.}$  fornecida,

$$R_{ceu} = \sqrt{\left( \frac{S}{S/N} \right)^2 - S}$$

$$\therefore R_{ceu} = 1,06 \cdot 10^{10} \text{ contagens}$$

(f) Para o ELT, teremos outro valor de contagens, devido a diferença de áreas coletoras.

Com

$$S = F_{f\text{otons}} \cdot A_{tel.} \cdot T_{exp.}$$

notamos que inicialmente é necessário determinar o tempo de exposição total do imageamento feito no ELT.

Pelo enunciado, sabemos que a coleta de fótons foi a mesma da imagem feita no VLT, o que nos permite o seguinte desenvolvimento

$$E = F_{M104} \cdot A_{tel.} \cdot T_{exp.}$$

$$A_{VLT} \cdot T_{VLT} = A_{ELT} \cdot T_{ELT}$$

$$T_{ELT} = T_{VLT} \left( \frac{D_{VLT}}{D_{ELT}} \right)^2$$

$$\therefore \boxed{T_{ELT} = 21 \text{ s}}$$

(g) Calculando o Sinal e aplicando a expressão encontrada para a razão sinal-ruído:

$$S = F_{\text{fotons}} \cdot \pi \left( \frac{D_{ELT}}{2} \right)^2 \cdot T_{exp.}$$

$$\therefore S = 2,40 \cdot 10^{13} \text{ constagens}$$

Aplicando a expressão para  $S/R$ ,

$$S/R = \frac{S}{\sqrt{R_{ceu}^2 + R_{obj.}^2}}$$

$$\therefore \boxed{S/R = 2263}$$

O valor real não necessariamente será próximo a esse, pois estamos desconsiderando os demais tipos de ruídos (térmico e de leitura), que são tão importantes quanto os demais. Além disso, considerar o ruído de céu igual ao do imageamento feito no VLT não é o ideal, pois o ruído de céu, além de depender das condições locais de observação, também depende da área coletora do telescópio.

(h) É trivial supor que a imagem feita no ELT terá qualidade superior a que foi feita no VLT.

Contudo, é importante notar que por ter uma razão sinal-ruído muito maior (considerando o valor obtido ao longo da questão), o imageamento da galáxia feito no ELT será muito mais nítido que o realizado no VLT.

## 2. Estrela de Barnard (85 pontos)

Entre os maiores movimentos próprios estelares, a Estrela de Barnard  $(\delta, \alpha) = (4^\circ 41' 36'', 17^h 58^m)$  se destaca por ter movimento próprio  $\mu \approx 10,3 \text{ arcsec/ano}$ . Dados espectroscópicos indicam que o  $\lambda_{H_\alpha}$  da estrela está deslocado para  $\lambda = 656,5 \text{ nm}$ , e que sua magnitude absoluta é  $M = 13,2$ . Além disso, podemos notar que, atualmente, sua paralaxe é de  $0,547 \text{ arcsec}$ .

- (a) Qual é a magnitude aparente da estrela de Barnard?

Definimos a velocidade espacial de uma estrela como sendo o módulo de seu vetor velocidade. Para os próximos itens, considere que a estrela de Barnard apresenta um movimento retilíneo e uniforme no espaço em relação a nós.

- (b) Determine  $V$ , o módulo da velocidade espacial (em km/s) da estrela de Barnard, e o menor ângulo que ela faz com a nossa linha de visada,  $\theta_0$  (em graus).
- (c) Assumindo condições ideais de observação, será possível algum dia ver a Estrela de Barnard no céu, a olho nu? Responda SIM ou NÃO, e justifique com cálculos.  
**Dica:** Analise o momento de máxima aproximação da Estrela.
- (d) Encontre uma expressão analítica (ou seja, sem substituição numérica) para a distância entre nós e a estrela de Barnard em função do tempo. Considere que em  $t = 0$  (momento atual) a Estrela de Barnard está a uma distância  $d_0$ .  
 Deixe sua resposta em termos de  $V$ ,  $d_0$  e  $\theta_0$ .

Em pleno solstício de inverno do hemisfério norte, interessada em estudar a Estrela de Barnard, uma equipe de astrônomos se prepara para uma longa noite de observação em um local de coordenadas  $(\phi; \lambda) = (41,8^\circ \text{ N}; 87,6^\circ \text{ W})$ , portando um telescópio newtoniano de 120 mm de diâmetro para realizar a tarefa.

- (e) Em condições ideais, por quanto tempo a Estrela de Barnard estará visível nesse dia (em minutos)?
- (f) É possível observar a Estrela de Barnard com esse telescópio newtoniano? Justifique.
- (g) Se, começando hoje, nossos astrônomos fossem capazes de passar um tempo indefinido observando a Estrela de Barnard com o referido telescópio newtoniano, por quanto tempo (em anos) eles conseguiriam observá-la?

**Solução: Errata:** o valor fornecido no enunciado para o  $\lambda_{H_\alpha}$  da Estrela de Barnard não satisfaz o valor esperado para sua velocidade. A presente solução adota o valor de  $\lambda$  que satisfaz sua verdadeira velocidade radial,  $\lambda = 655.76 \text{ nm}$ . As respostas de todos candidatos foram minuciosamente analisadas, considerando o desenvolvimento geral da questão e os critérios da rubrica.

- (a) Em posse das informações fornecidas no enunciado, basta determinarmos a distância até a Estrela de Barnard e, posteriormente, calcular a magnitude aparente pelo módulo de distância.  
 Aplicando a definição de paralaxe, temos  $d_0 = 1.8 \text{ pc}$ .  
 Então

$$m = 5 \log d_0 - 5 + M$$

$$m = 9,5$$

- (b) Precisamos somar vetorialmente a velocidade radial a tangencial da Estrela de Barnard para determinar sua velocidade espacial.  
 Encontrando sua velocidade radial pelo efeito doppler clássico:

$$\frac{\lambda - \lambda_{H_\alpha}}{\lambda_{H_\alpha}} \approx \frac{v_r}{c} \implies v_r = -109.7 \text{ km/s}$$

Agora, sua velocidade tangencial a partir de seu movimento próprio,

$$v_t = \mu d_0 \approx 87.9 \text{ km/s}$$

Logo:

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$$

$$\therefore |\mathbf{V}| = 141 \text{ km/s}$$

Como os vetores são perpendiculares, notamos que:

$$\tan(\theta_0) = \frac{v_t}{v_r}$$

$$\theta_0 = 38.1^\circ$$

- (c) Como supomos que a estrela está em movimento retilíneo uniforme, temos abaixo a geometria de sua trajetória.

Figura 1: Trajetória da Estrela de Barnard

Pela geometria podemos determinar  $d_{min}$

$$\sin \theta_0 = \frac{d_{min}}{d_0}$$

$$d_{min} = 1.13 \text{ pc}$$

A partir da magnitude aparente na máxima aproximação podemos concluir se algum dia ela será visível, uma vez que nesse caso sua magnitude aparente é a mínima possível. Pelo módulo de distância:

$$m = 5 \log d_0 - 5 + M$$

$$m = 8,5$$

Concluimos que ela nunca será visível a olho nu, já que  $m > 6$

$$\therefore \boxed{NO}$$

- (d) Ainda com a geometria da trajetória da Estrela de Barnard, podemos aplicar a lei dos cossenos e encontrar a expressão analítica para  $d(t)$ .

$$d(t)^2 = d_0^2 + (Vt)^2 - 2Vtd_0 \cos(\theta)$$

$$\therefore d(t) = \sqrt{d_0^2 + (Vt)^2 - 2Vtd_0 \cos \theta_0}$$

- (e) Inicialmente, precisamos encontrar o ângulo horário de nascer e por do Sol e da Estrela de Barnard. Sabendo que no solstício de inverno  $\delta_\odot = -23,5^\circ$  e que

$$\cos(H_{nascer/por}) = -\tan(\phi) \tan(\delta)$$

temos:

$$\begin{cases} |H_{nascer/por(Barnard)}| = 6^h 17^m \\ |H_{nascer/por(\odot)}| = 4^h 29^m \end{cases}$$

Determinando o tempo sideral de nascer e ocaso do Sol e da Estrela de Barnard, sabendo que no dia  $\alpha_{\odot} = 18^h$  e que  $TS = H + \alpha$ :

$$\begin{cases} TS_{nascer(Barnard)} = 11^h 41^m \\ TS_{nascer(\odot)} = 13^h 31^m \\ TS_{ocaso(Barnard)} = 0^h 15^m \\ TS_{ocaso(\odot)} = 22^h 29^m \end{cases}$$

A estrela pode ser observada quando ela estiver no céu enquanto o Sol está abaixo do horizonte, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta t &= (TS_{nascer(\odot)} - TS_{nascer(Barnard)}) + (TS_{ocaso(Barnard)} - TS_{ocaso(\odot)}) \\ &\therefore \boxed{\Delta t = 3^h 36^m} \end{aligned}$$

- (f) Aplicando a Equação de Pogson, comparando com a magnitude limite do olho e sabendo que o fluxo é inversamente proporcional a área coletora, temos:

$$m_{tel} - m_{olho} = -2,5 \log \left( \frac{F_{tel}}{F_{olho}} \right)$$

$$m_{tel} - m_{olho} = -5 \log \left( \frac{D_{olho}}{D_{tel}} \right)$$

$$\therefore \boxed{m_{tel} = 12,5}$$

Como  $m_{tel} > m_{Barnard} = 9,5$ , será possível observar a Estrela de Barnard com esse telescópio.

- (g) Precisamos determinar a distância no limite em que a Estrela de Barnard é visível. Usando a magnitude limite do telescópio como parâmetro, temos

$$m_{tel} - M = 5 \log d(t) - 5$$

$$\therefore d(t) = 7,24 \text{ pc}$$

Aplicando no resultado do item d e melhorando a expressão,

$$d(t) = \sqrt{d_0^2 + (Vt)^2 - 2Vtd_0 \cos \theta_0}$$

$$t^2 V^2 - t(2Vd_0 \cos \theta_0) + (d_0^2 - d(t)^2) = 0$$

. Resolvendo de modo conveniente para  $t$ , obtemos:

$$\therefore \boxed{t = 59.437 \text{ anos}}$$

### 3. Prevendo Imprevistos (85 pontos)

No exoplaneta H9095, com semi-eixo maior  $a_1 = 7 \text{ UA}$ , Hugão estuda as crateras do planeta P9095. Todavia, ele esquece de limpar as antenas de seu equipamento, acabando por inutilizar todos os dados que coletou.



Considere que os planetas orbitam a mesma estrela (semelhante ao Sol), em órbitas circulares e coplanares.

- (a) Preocupado com o futuro de sua pesquisa, Hugão precisa saber quando será o próximo trânsito entre H9095 e P9095. Sabendo que o trânsito acabou de ocorrer, encontre as possíveis expressões para o tempo que Hugão deverá esperar até que outro trânsito ocorra, em função dos períodos orbitais dos planetas.

**Dica:** não assuma nada a respeito do sentido de translação dos planetas.

- (b) Pelas expressões dos itens anteriores, Hugão calcula que terá de esperar 27 anos. Insatisfeito, ele quer ir pessoalmente estudar a superfície de P9095. Para facilitar seus cálculos, Hugão decide ter de antemão o valor do semi-eixo maior (UA) e período (anos) dos planetas. Encontre esses valores.

- (c) Hugão decide tentar usar a transferência de Hohmann para visitar P9095, mas antes da viagem ele precisa saber se terá combustível suficiente para realizar as manobras da transferência, sendo que a massa de seu foguete, totalmente abastecido, é de 5000 toneladas.

Para evitar futuros transtornos, encontre a quantidade (em kg) de propelente que será usado durante a transferência, considerando apenas a atração gravitacional da estrela.

**Dica:** a equação do foguete nos diz que

$$|\Delta v| = g \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

em que  $m_0$  e  $m$  são, respectivamente, a massa antes e depois do impulso, enquanto  $g$  é uma constante que assumiremos igual a 700 m/s.

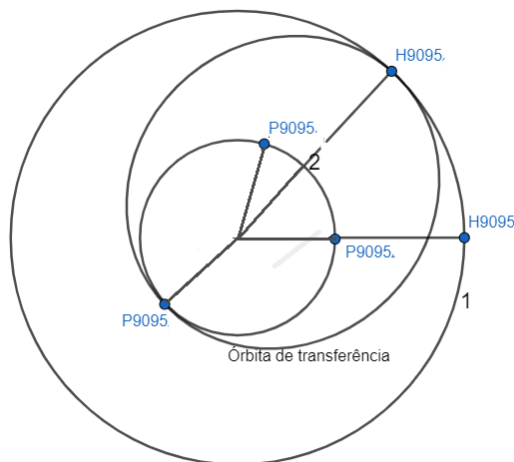


Figura 2: Esquemática da transferência de Hohmann

- (d) Querendo partir o quanto antes, Hugão tenta calcular o tempo que deverá esperar após a conjunção ( $t_1$ ) para que possa iniciar a transferência e colidir em P9095 em sua primeira passagem por sua órbita, partindo de H9095 antes da próxima oposição entre os dois planetas. Hugão está usando a esquematização do item acima em seus cálculos, mas está encontrando algumas dificuldades em obter uma conclusão ...

É possível realizar a transferência nessas condições? Justifique com cálculos.

- (e) Assim que passou a conjunção inicial, Hugão cogita alterar a órbita de seu planeta para uma órbita elíptica com periastro na órbita de P9095.

Apressado, Hugão decide iniciar a transferência na primeira oportunidade que tiver. Sendo assim, quanto tempo ele deverá esperar até a colisão? Suponha que o impulso que altera a órbita de H9095 é instantâneo e despreze a gravidade dos planetas.

**Solução:**

- (a) Definindo o raio de H9095 e P9095 como, respectivamente,  $a_1$  e  $a_2$  sabemos de maneira implícita pelo enunciado que  $a_1 > a_2$ , uma vez que P9095 trãsita a estrela do sistema. Para encontrar o tempo entre duas conjunções temos duas possíveis situações:

I - ambos planetas orbitam a estrela no mesmo sentido ou

II - orbitam a estrela em sentidos opostos.

Caso I:

Nesse caso, P9095 completará uma translação antes de ocorrer a conjunção, logo:

$$T_{sI}\omega_2 - 2\pi = \omega_1 T_{sI}$$

$$\therefore \frac{1}{T_{sI}} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$$

Caso II: Nesse caso, os planetas irão se encontrar novamente antes de completarem uma translação:

$$T_{sII}\omega_2 + T_{sII}\omega_1 = 2\pi$$

$$\therefore \frac{1}{T_{sII}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

- (b) Inicialmente precisamos determinar o semi-eixo maior dos planetas com a Terceira Lei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

onde podemos usar simplesmente  $T^2 = a^3$  (com  $T$  em anos e  $a$  em UA), já que a estrela é semelhante ao Sol.

$$a_1 = 7 \text{ UA} \implies T_1 = 18,5 \text{ anos}$$

Sabemos que  $T_s = 27$  anos, mas não temos informações suficientes para determinar se os planetas giram ou não no mesmo sentido. Contudo, podemos fazer uma análise por eliminativa, tomando os casos do item a, do seguinte modo:

Caso I:

$$\frac{1}{T_{sI}} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \implies T_2 = 11,0 \text{ anos}$$

Caso II:

$$\frac{1}{T_{sII}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \implies T_2 = -58,8 \text{ anos} < 0$$

Por absurdo, constatamos que os planetas devem estar orbitando a estrela no mesmo

sentido e, então, juntando os dados fornecidos com os obtidos aplicando a Terceira Lei de Kepler, concluímos:

$$a_1 = 7,0 \text{ UA}$$

$$a_2 = 4,9 \text{ UA}$$

$$T_1 = 18,5 \text{ anos}$$

$$T_2 = 11,0 \text{ anos}$$

- (c) Sabendo que o foguete tem inicialmente  $5 \cdot 10^5 \text{ kg}$  e que, para satisfazer a condição de menor gasto energético, a manobra utilizada será a Transferência de Hohmann, cujo semi-eixo maior da órbita de transferência será

$$2a_T = a_1 + a_2$$

$$a_T = 6,0 \text{ UA}$$

Encontrando as variações de velocidade necessárias para a transferência, ou seja, para entrada e saída da órbita de transferência.

$$\Delta V_1 = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_T} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{a_1}}$$

$$\Delta V_1 = \left( \sqrt{\frac{a_2}{a_T}} - 1 \right) \sqrt{\frac{\mu}{a_1}}$$

$$\Delta V_1 = -1084 \text{ m/s}$$

Analogamente:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_T} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{a_2}}$$

$$\Delta V_2 = \left( \sqrt{\frac{a_1}{a_T}} - 1 \right) \sqrt{\frac{\mu}{a_2}}$$

$$\Delta V_2 = 1078 \text{ m/s}$$

Inicialmente temos uma massa  $m_0$ , uma massa intermediária  $m'_0$  e a massa final  $m_f$ . Para encontrar  $\Delta m$ , que será exclusivamente devido às propulsões, basta aplicarmos duas vezes a equação do foguete. Segue:

$$|\Delta V_1| = g \ln \left( \frac{m_0}{m'_0} \right)$$

$$|\Delta V_2| = g \ln \left( \frac{m'_0}{m_f} \right)$$

Logo, com  $\Delta m = m_f - m_0$ :

$$|\Delta V_1| + |\Delta V_2| = g \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - \Delta m} \right)$$

$$\frac{m_0}{m_0 - \Delta m} = e^{\frac{|\Delta V_1| + |\Delta V_2|}{g}}$$

$$\Delta m = (e^{-\frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{g}} - 1)m_0$$

$$\therefore \Delta m = -4,7 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

(d) A imagem abaixo representa o esquema esperado:

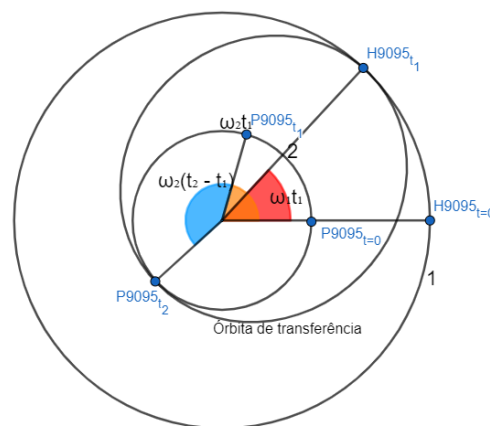


Figura 3: Esquemática da transferência de Hohmann antes da oposição.

Para o foguete atingir P9095 de imediato partindo de H9095 em  $t_1$  teríamos que satisfazer a geometria do esquema acima, considerando que P9095 encontra o foguete assim que ele o alcança. Ou seja,

$$\omega_2(t_2 - t_1) + (\omega_2 - \omega_1)t_1 = \pi$$

(1c.I)

Por outro lado, sendo  $T$  o período da órbita de transferência, usando unidades astronômicas e anos (já que a estrela é semelhante ao Sol), constatamos que

$$\frac{T}{2} = t_2 - t_1$$

(1c.II),

enquanto pela Terceira Lei de Kepler

$$T^2 = \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3$$

(1c.III).

Substituindo (1c.II) em (1c.III):

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3}$$

(1c.IV)

Substituindo (1c.IV) em (1c.I)

$$t_1 = \frac{\pi - \frac{1}{2} \omega_2 \sqrt{\left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3}}{\omega_2 - \omega_1}$$

Pelas condições enunciadas, temos  $r_2 < r_1$  e, obviamente,  $t_1 > 0$ , então

$$\pi - \frac{1}{2} \omega_2 \sqrt{\left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3} > 0$$

$$\implies T_2^2 = a_2^3 > \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3 \implies a_2 > a_1$$

ABSURDO!

Logo, é impossível que isso ocorra.

(e)

Inicialmente precisamos determinar a separação angular mínima ( $\phi$ ) entre os planetas medida com vértice na estrela que possibilite a transferência ocorrer. Para que ocorra com sucesso, precisamos que o deslocamento angular de P9095 durante a transferência seja suficiente para deixá-lo em oposição a posição inicial de H9095, ou seja, o ponto de início da transferência. Sendo assim, partindo da conjunção e escolhendo  $\phi < \pi$ , considerando P9095 adiantado na órbita em relação a H9095 e  $T$  como o período de H9095 após a mudança de órbita:

$$\frac{\omega_2 T}{2} + \phi = \pi$$

Aplicando a terceira Lei de Kepler para determinar o período da nova órbita de H9095

$$T^2 = \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3$$

$$T = 14,5 \text{ anos}$$

Logo

$$\phi = -57,5^\circ$$

O valor negativo indica que nossa consideração de P9095 estar adiantado na órbita está equivocada, quando na verdade é o contrário. Assumir o contrário no início levaria direto ao valor positivo, ou seja, ambas soluções são equivalente e pontuam igualmente.

Por fim, como ambos iniciam na conjunção, sendo  $t$  o tempo para chegar na configuração propício para o início da transferência, temos:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi + \phi$$

$$(\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi + \phi t$$

$$\therefore t = 22,8 \text{ anos}$$

Esse é o tempo que Hugão deverá esperar para alterar a órbita de seu planeta, então, para encontrar o tempo total para colisão, resta somar o tempo necessário para chegar em P9095. Esse tempo é simplesmente metade do novo período orbital de H9095.

$$\Delta t = \frac{T}{2} + t$$

$$\therefore \Delta t = 30,1 \text{ anos}$$

**4. Tacoclina (55 pontos)** Uma das técnicas experimentais mais fascinantes na astronomia é a de ouvir estrelas. Analisando o dopplergrama de uma estrela, os astrônomos conseguem obter informações suficientes sobre os modos de oscilação e, assim, descobrir diversas características sobre o interior estelar. Essa área da astronomia é chamada de asterosismologia, ou heliosismologia, para o caso específico do Sol.

- (a) Pesquisas heliosismológicas concluem que podemos dividir o Sol em duas camadas: a mais interna (radioativa), que gira como uma bola rígida, e a mais externa (convectiva), que possui rotação diferencial, isto é, com velocidades angulares irregulares. O coeficiente  $c_3$  de Clebsch-Gordon possui relação direta com o valor dessa rotação. Considerando essas informações e a tabela abaixo, estime um intervalo (com tamanho de, no máximo,  $0.25 R_\odot$ ), o qual capture a região de transição entre as duas camadas. Forneça uma breve justificativa para o intervalo escolhido.

distância ( $R_\odot$ )	$c_3$ (nHz)
0.39	-13.32
0.45	-13.73
0.51	-14.09
0.55	-14.36
0.61	-15.05
0.65	-16.30
0.70	-19.15
0.75	-19.94
0.81	-20.09
0.85	-20.40
0.90	-20.48
0.95	-20.18

Tabela 1: Coeficientes  $c_3$  em função da distância ao centro do Sol.

- (b) Essa região de transição é chamada de tacoclina, e muitos estudos são conduzidos para

investigar suas propriedades (mais especificamente, a posição, espessura e a diferença entre as velocidades de rotação). Atualmente, também há estudos que buscam relacionar essa região com a atividade magnética do Sol, relacionando como esses parâmetros variam em função da atividade solar. Portanto, ela é de suma importância para entender a dinâmica interna do Sol. Um modelo teórico bastante utilizado para achar a velocidade de rotação do sol na região de rotação diferencial é o seguinte:

$$\Omega(r) = \frac{\delta\Omega}{1 + \exp((r_d - r)/w)}$$

Nessa equação,  $\delta\Omega = \Omega_{sur} - \Omega_c$ , onde  $\Omega_{sur}$  representa a velocidade de rotação perto da superfície, e  $\Omega_c$  a velocidade no interior (a qual assumimos ser bem pequena),  $w$  representa a espessura da tacoclina, e  $r_d$  representa a distância do meio dessa zona de transição até o centro do Sol. A tabela abaixo mostra valores de  $\Omega(r)$  em função de  $r$  para diversas posições. Note que, apesar de todos os valores estarem corretos matematicamente, a equação só é válida fisicamente quando  $r \geq r_d$ .

$r (R_\odot)$	$\Omega$ (nHz)
0.39	0.032
0.45	0.108
0.51	0.353
0.55	0.768
0.61	2.342
0.65	4.559
0.70	8.904
0.75	13.714
0.81	17.574
0.85	18.832
0.90	19.554
0.95	19.833

Tabela 2: Velocidade de rotação em função da distância ao centro do Sol.

Com base na tabela e nas informações fornecidas no enunciado, ache o valor de  $\delta\Omega$  aproximado ao inteiro mais próximo,  $w$ , e  $r_d$ . O seu valor de  $r_d$  está de acordo com o intervalo do item (a)?

**Solução:**

- (a) A observação chave para resolver esse item é ver em qual intervalo os valores de  $c_3$  começam a variar rapidamente. Como dito no enunciado,  $c_3$  tem uma conexão direta com a taxa de velocidade. Portanto, como há uma transição de valores próximos de  $-14$  até  $-20$ , pode-se estimar que devemos buscar a região onde isso acontece. Se observarmos a tabela, a partir de  $0.55$  até  $0.81$  tem uma variação brusca, indo de  $-14.09$  até  $-20.09$ , e após essa distância os valores começam a se estabilizar ao redor de  $-20$ . Portanto, uma possível resposta é o intervalo  $0.55 R_\odot \leq r \leq 0.80 R_\odot$ . O gráfico abaixo, fruto de uma análise com diversas tabelas e modelos teóricos, contém os pontos dados na tabela (junto com muitos outros). Como pode-se observar, há uma queda brusca entre  $0.55$  e  $0.8$  (mais especificamente a partir de  $0.6$ ), e o valor utilizado para a posição central da zona de transição, nesse modelo, foi  $r = 0.711 R_\odot$ , com uma espessura de  $0.05 R_\odot$ . Portanto, será considerado correto qualquer intervalo que contenha  $0.70 \leq r \leq 0.77$ .

