



PROVA TEÓRICA P2  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

---

## Instruções Gerais

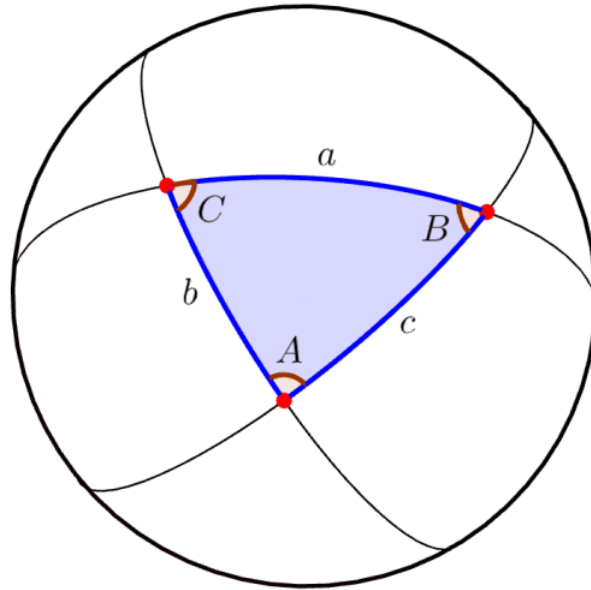
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74$ mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Magnitude Absoluta na banda do visível ( $M_V$ )	0,582 mag	<b>Vega</b>
Índices de Cor ( $U - B$ ) <sub>0</sub> , ( $B - V$ ) <sub>0</sub> e ( $V - I$ ) <sub>0</sub>	0	
Luminosidade na Banda U ( $L_U$ )	$1,48 \cdot 10^{27}$ W	
Luminosidade na Banda B ( $L_B$ )	$3,51 \cdot 10^{27}$ W	
Luminosidade na Banda V ( $L_V$ )	$2,19 \cdot 10^{27}$ W	
Luminosidade na Banda I ( $L_I$ )	$1,13 \cdot 10^{27}$ W	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse (a partir do foco):

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Forma Polar da elipse (a partir do centro):

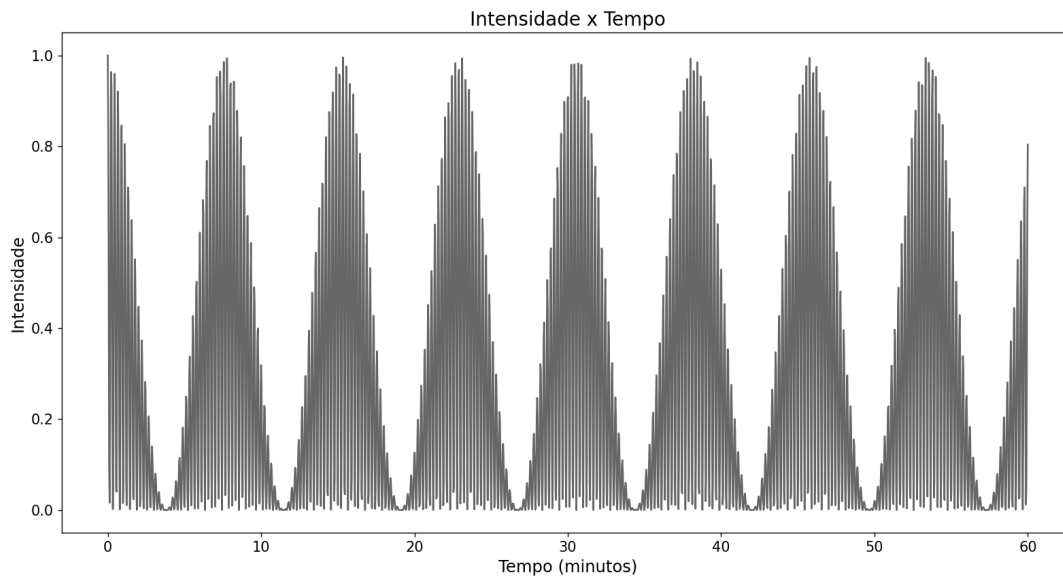
$$r = a(1 - e \cdot \cos E)$$

- Equação de Kepler :

$$M = E - e \cdot \text{sen}E$$

## Questões Curtas

1. **Interferômetros (10 pontos)** Visando captar os sinais da estrela 3PYL-4U, Raul criou um receptor que coletava ondas eletromagnéticas emitidas por 3PYL-4U a partir de dois interferômetros distintos localizados sobre a superfície do equador terrestre. Devido a rotação da Terra e a separação entre as antenas, os sinais recebidos por Raul apresentavam uma diferença de fase, responsável pelo padrão de interferência que ele observava em seu laboratório. Sabendo que todas as observações foram feitas no rádio,  $\lambda = 2$  km, e que o gráfico da intensidade dos sinais resultantes de 3PYL-4U, quando observados por Raul, em função do tempo, é dado por:



calcule a separação  $L$  entre os dois interferômetros. Considere que a estrela se localiza no equador celeste, que sua posição é fixa e que a distância entre os interferômetros é muito menor que o raio da Terra. Além disso, assuma que no instante inicial os interferômetros estavam equidistantes de 3PYL-4U.

**Dado:** Se necessário utilize que  $\sin x \approx x$ , para  $x \ll 1$ .

### Solução:

Para resolver essa questão, considere o esquema abaixo que representa o caminho da luz emitida por 3PYL-4U até chegar nos interferômetros após um intervalo de tempo  $t$ .

Perceba que, pela imagem, a diferença de caminho óptico da luz que chega nas antenas é dada por:

$$\Delta r = L \sin(\omega_{\oplus} t)$$

Para pequenos ângulos, a expressão acima se reduz para:

$$\Delta r \approx L \omega_{\oplus} t$$

Sendo assim, pela condição de interferência construtiva, para máximos de intensidade, teremos:

$$L \omega_{\oplus} t = m \lambda$$

Nesse caso, calculando a separação temporal  $\Delta t$  entre dois máximos de interferência consecutivos,  $\Delta m = 1$ , obtemos que:

$$L \omega_{\oplus} \Delta t = \lambda$$

e então:

$$L = \frac{\lambda}{\omega_{\oplus} \Delta t}$$

Pelo gráfico, obtemos que  $\Delta t \approx 7,6$  min, de tal modo que:

$L \approx 60 \text{ km}$

**2. Redshift Cosmológico como Efeito Doppler (10 pontos)** Para objetos próximos com velocidade de recessão  $Hr \ll c$ , a equação do efeito Doppler em primeira ordem nos dá  $\lambda_o/\lambda_e = 1 + Hr/c$ , onde  $\lambda_e$  é o comprimento de onda emitido pelo objeto,  $\lambda_o$  o comprimento de onda observado,  $r$  a distância própria até o objeto e  $H = \dot{a}/a$  o parâmetro de Hubble. Neste problema, definimos o **fator de redshift** como sendo  $R = \lambda_o/\lambda_e$ . Para encontrar o seu valor para um objeto distante, podemos dividir o caminho da luz em muitos pedaços pequenos de forma que  $H\Delta r \ll c$ , onde  $\Delta r$  é o comprimento próprio de um segmento.

- (a) **(4 pontos)** Utilizando a equação do efeito Doppler em primeira ordem, mostre que para um segmento que é percorrido entre os tempos  $t$  e  $t + \Delta t$ , o fator de redshift entre seu ponto inicial e

o seu ponto final é aproximadamente

$$R(t, t + \Delta t) \approx \exp\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \Delta t\right)$$

**Dado:** Se necessário, utilize que  $e^x \approx 1 + x$ , para  $x \ll 1$ .

(b) (6 pontos) A partir do resultado anterior, obtenha a fórmula usual do redshift cosmológico:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e}$$

Onde normalmente definimos  $a_0 = 1$ .

**Dado:** Se necessário, utilize que

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

**Solução:**

(a) Quando a luz vem da distância própria  $r + \Delta r$  até a distância própria  $r$ , um observador nessa distância  $r$  diria que a velocidade de recessão da fonte que emitiu a luz é  $H\Delta r$ . Como essa quantidade é muito menor que a velocidade da luz, podemos utilizar a equação do efeito Doppler em primeira ordem:

$$R(t, t + \Delta t) = \frac{\lambda(t + \Delta t)}{\lambda(t)} = 1 + \frac{H\Delta r}{c}$$

Ainda, como  $\Delta r$  é a distância própria percorrida pela luz em um tempo  $\Delta t$ , temos que  $\Delta r = c \cdot \Delta t$ :

$$R(t, t + \Delta t) = 1 + H\Delta t$$

Lembrando a definição de  $H$ :

$$R(t, t + \Delta t) = 1 + \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \Delta t$$

Como  $\Delta t$  é muito pequeno, podemos utilizar a aproximação do enunciado (sendo  $x$  igual a  $H\Delta r$ ):

$$R(t, t + \Delta t) \approx \exp\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \Delta t\right)$$

(b) Multiplicando sucessivos fatores de redshift, podemos obter  $R(t_e, t_0)$  para um tempo  $t_e$  de emissão e um tempo  $t_0$  de observação:

$$R(t_e, t_0) = R(t_e, t_e + \Delta t) \times R(t_e + \Delta t, t_e + 2\Delta t) \times \dots \times R(t_0 - 2\Delta t, t_0 - \Delta t) \times R(t_0 - \Delta t, t_0)$$

Isso é válido pois os sucessivos comprimentos de onda se cancelam, restando apenas o comprimento observado no numerador e o comprimento emitido no denominador. Como a multiplicação de exponenciais equivale a uma soma dos expoentes, podemos aproximar, no limite em que  $\Delta t$  tende a 0,

$$R(t_e, t_0) = \exp\left(\int_{t=t_e}^{t=t_0} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt\right)$$

Podemos simplificar a integral:

$$R(t_e, t_0) = \exp\left(\int_{a_e}^{a_0} \frac{1}{a} da\right) = \exp\left(\ln \frac{a_0}{a_e}\right)$$

Como a exponencial do logaritmo de uma função é simplesmente a própria função:

$$R(t_e, t_0) = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e}$$

### 3. Quantas galáxias? (10 pontos)

Wesley habita um universo curioso, que apesar de homogêneo e isotrópico, é muito diferente do nosso. Nele, a densidade numérica (quantidade por volume) de galáxias com magnitude absoluta entre  $M$  e  $M + \Delta M$ , onde  $|\Delta M| \ll |M|$ , pode ser representada por:

$$n(M, \Delta M) = \begin{cases} a \cdot 10^{M/5} \cdot \Delta M & \text{se } M_i \leq M \leq M_f \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sabendo que o universo de Wesley é infinito em espaço e em tempo, que não tem curvatura e que nunca se expande nem se contrai, encontre a quantidade de galáxias,  $N(m, \Delta m)$ , com magnitude aparente entre  $m$  e  $m + \Delta m$

#### Solução:

Vamos avaliar as galáxias numa casca esférica de raio  $r$  e espessura  $\Delta r$ . Para que a galáxia tenha magnitude aparente  $m$ , sua magnitude absoluta deve ser:

$$M = m + 5 - 5 \cdot \log(r)$$

Essa relação é válida para:

$$M_i < M < M_f$$

$$\frac{m + 5 - M_i}{5} < \log(r) < \frac{m + 5 - M_f}{5}$$

Já para ter magnitude aparente  $m + \Delta m$ :

$$M + \Delta M = m + \Delta m + 5 - 5 \cdot \log(r)$$

$$\Delta M = \Delta m$$

A quantidade de galáxias com magnitude aparente entre  $m$  e  $m + \Delta m$  é igual ao volume da casca vezes a densidade numérica de galáxias com magnitude absoluta  $M + \Delta M$ .

$$N(m, \Delta m) = 4\pi r^2 \Delta r \cdot a \cdot 10^{m/5} \cdot 10^{5/5} \cdot 10^{-5 \log(r)/5} \cdot \Delta m$$

$$N(m, \Delta m) = 40\pi r^2 \Delta r \cdot a \cdot 10^{m/5} \cdot \frac{1}{r} \cdot \Delta m$$

$$\frac{N(m, \Delta m)}{\Delta r} = 40\pi r \cdot a \cdot 10^{m/5} \cdot \Delta m$$

Perceba que o membro da esquerda é a densidade radial de galáxias. Por fim, calculamos o total de galáxias pela área do gráfico:

$$N(m, \Delta m) = 40\pi a \cdot 10^{m/5} \cdot \frac{10^{(m+5-M_i)/5} + 10^{(m+5-M_f)/5}}{2} \cdot \left(10^{(m+5-M_i)/5} - 10^{(m+5-M_f)/5}\right) \cdot \Delta m$$

$$N(m, \Delta m) = 2000\pi a \cdot 10^{3m/5} \cdot \left(10^{-2M_i/5} - 10^{-2M_f/5}\right) \Delta m$$

## Questões Médias

4. **Bandas e mais bandas (20 pontos)** Davi está vivendo altas aventuras na Universidade de São Paulo. Entre aulas, seminários com ganhadores do prêmio Nobel, e pesquisa, ele também arranhou tempo para fazer iniciação científica em espectroscopia de estrelas longínquas. Após tanto usar a Lei de Wien para achar a temperatura de astros, Davi pensou em fazer algo diferente para sair da rotina para calcular a temperatura de Acrux, sua estrela favorita. Em dados confiáveis, ele achou a magnitude aparente de Acrux em 4 filtros diferentes:

$$I = 0,51 \text{ mag}$$

$$V = 0,77 \text{ mag}$$

$$B = 0,53 \text{ mag}$$

$$U = 0,47 \text{ mag}$$

Além disso, de livros, ele obteve alguns coeficientes de extinção nos filtros  $B$ ,  $U$  e  $I$ , referentes à direção em que Acrux está e, também, a magnitude absoluta de Acrux na banda  $V$ :

$$a_B = 1,27 \text{ mag/Kpc}$$

$$a_U = 1,57 \text{ mag/Kpc}$$

$$a_I = 0,87 \text{ mag/Kpc}$$

$$V_0 = -4,30 \text{ mag}$$

**Dica:** Utilize a seguinte relação:

$$E_{B-V} = \frac{A_V}{3,1} = \frac{a_v d}{3,1}$$

Onde  $E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0$  se trata do excesso de cor para o índice de cor  $(B - V)$ .

- (6 pontos)** Qual seria a distância  $d$  de Acrux à Terra em parsecs que Davi encontrou?
- (4 pontos)** Quais seriam as magnitudes absolutas de cada banda restante  $B_0$ ,  $U_0$  e  $I_0$ ?
- (6 pontos)** Sabendo de todos esses dados, quais seriam as luminosidades da estrela em cada filtro  $L_B$ ,  $L_V$ ,  $L_I$  e  $L_U$ ?
- (4 pontos)** Considerando que os filtros tenham bandas que não tenham interseções e que fora deles o fluxo é desprezível, qual seria a temperatura da estrela? O diâmetro angular de Acrux é  $\theta = 5,08 \cdot 10^{-4}$  arcsec.

### Solução:

- a) Uma vez que há extinção, podemos escrever o módulo de distância nas bandas  $B$  e  $V$  como sendo:

$$B - B_0 = 5 \log d - 5 + a_B d$$

$$V - V_0 = 5 \log d - 5 + a_V d$$

Subtraindo uma da outra:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0 = d \cdot (a_B - a_V)$$

Usando a relação que foi dada:

$$\frac{a_v d}{3,1} = d \cdot (a_B - a_V)$$

$$a_v = \frac{3,1 a_b}{4,1}$$

$$a_v = 0,96 \text{ mag/Kpc}$$



Voltando ao módulo de distância, agora temos como achar  $d$  por iteração:

$$V - V_0 = 5 \log d - 5 + a_V d$$

$$\log d = \frac{V + 5 - V_0 - a_V d}{5}$$

$$d = 10^{\frac{10,07 - 0,96 \cdot 10^{-3} d}{5}}$$

$$\boxed{d = 98,86 \text{ pc}}$$

b) Usando módulo de distância novamente, temos que:

$$B_0 = B + 5 - 5 \log d - a_B d$$

$$I_0 = I + 5 - 5 \log d - a_I d$$

$$U_0 = U + 5 - 5 \log d - a_U d$$

Substituindo os valores, obtemos que:

$$\boxed{U_0 = -4,66 \text{ mag}}$$

$$\boxed{B_0 = -4,57 \text{ mag}}$$

$$\boxed{I_0 = -4,55 \text{ mag}}$$

c) Seja a banda  $J$ . Podemos, facilmente, achar a luminosidade  $L_j$  comparando  $J_0$  com  $M_{\text{Vega},J}$ . Perceba que precisamos usar a magnitude absoluta de uma estrela que esteja na mesma banda  $J$ , já que a constante aditiva da Equação de Pogson muda para cada banda. Isso vem do fato de que é convenção usar a magnitude aparente de Vega como referencial para todas as bandas, mas o fluxo varia de acordo com a banda escolhida. Daí:

$$J_0 - M_{\text{Vega},J} = -2,5 \log \left( \frac{L_J}{L_{\text{Vega}}} \right)$$

$$L_J = L_{\text{Vega}} \cdot 10^{\frac{-(J_0 - M_{\text{Vega},J})}{2,5}}$$

Da Tabela de Constantes, sabemos que a magnitude absoluta de vega, em todas as bandas, é  $M_{\text{Vega}} = 0,582 \text{ mag}$ , mas a luminosidade depende. Usando cada luminosidade em cada banda, obtemos:

$$\boxed{L_U = 1,85 \cdot 10^{29} \text{ W}}$$

$$\boxed{L_B = 4,04 \cdot 10^{29} \text{ W}}$$

$$\boxed{L_V = 1,96 \cdot 10^{29} \text{ W}}$$

$$\boxed{L_I = 1,27 \cdot 10^{29} \text{ W}}$$

d) Com as condições do problema, temos que:

$$\sum L_j = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$T = \left[ \frac{\sum L_j}{4\pi R^2 \sigma} \right]^{1/4}$$

O raio de Acrux pode ser facilmente achado usando o diâmetro angular:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{R}{d}$$

$$R = 3,76 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Somando as luminosidades encontradas:

$$L = \sum L_j = 9,12 \cdot 10^{29} \text{ W}$$

Finalmente:

$$T \approx 17300 \text{ K}$$

**5. Naufrago (30 pontos)** Eduardo estava em seu iate particular fazendo uma viagem de 50 dias sozinho em alto mar no hemisfério sul sem bússola, tentando se guiar apenas pelas estrelas, como modo de descansar em suas férias do ITA. Com seu drone, gravou vídeos incríveis da natureza intocada de ilhas remotas. Em determinado momento, ele cochilou e acordou com o som de sua embarcação se quebrando na beira de uma praia estranha. Ele imediatamente vê uma cabana abandonada e percebe que está em apuros.

- (a) **(10 pontos)** Na cabana, Eduardo achou um velho almanaque astronômico em uma língua estranha. Tudo o que conseguiu perceber foi que estava escrita a variação do azimute do Sol naquela ilha ao longo de um ano ( $\Delta A = 80,1^\circ$ ). Qual é a latitude de Eduardo?
- (b) **(6 pontos)** Como Eduardo é um homem excêntrico e que viaja bastante, o seu relógio de pulso marca o Tempo Sideral de Greenwich, que ele acha mais conveniente. Por sorte, quando  $TSG = 3h13min31s$ , ele conseguiu observar o nascer de Sirius, estrela esta que ele sabe as coordenadas de cabeça ( $\alpha = 06h45m09s$ ,  $\delta = -16^\circ 42' 58''$ ). Qual é a longitude de Eduardo?
- (c) **(14 pontos)** Sabendo onde estava, Eduardo sabia que agora poderia, de alguma forma, pedir ajuda. Comendo alguns cocos e conversando com sua bola de vôlei, Eduardo teve uma ideia genial: mandar o seu drone com um pedido de ajuda para um ponto sobre a superfície terrestre onde ele tinha visto a guarda costeira ( $\phi = -54^\circ 57' 39''$ ,  $\lambda = -67^\circ 22' 33''$ ). Considerando a direção norte com  $A = 0^\circ$ , para qual direção, em azimute, ele deve ser mandado?

**Solução:**

- a) Podemos facilmente desenhar a situação do Sol ao longo de um ano, tomando como principais pontos 1, 2 e 3, que são, respectivamente, os pontos do nascer do sol no solstício de verão, nos equinócios e no solstício de inverno:



$$\sin(90^\circ - |\phi|) = \frac{\sin \epsilon}{\sin\left(\frac{\Delta A}{2}\right)}$$

$$\cos|\phi| = \frac{\sin \epsilon}{\sin\left(\frac{\Delta A}{2}\right)}$$

$$\phi = -51^\circ 47' 48'' \approx -51,8^\circ$$

- b) Duas relações conhecidas que envolvem o Tempo Sideral Local podem ser utilizadas para chegarmos no que foi pedido:

$$TSL = H + \alpha = TSG + \lambda$$

$$\lambda = H + \alpha - TSG$$

Em que  $H$  é o ângulo horário de Sirius ao nascer e  $\lambda$  é a latitude de Eduardo. É fácil achar  $H$ :

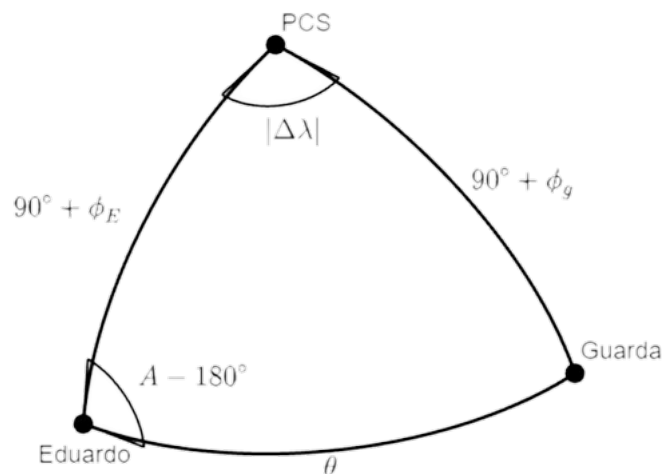
$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta$$

$$H \approx -112,43^\circ$$

Perceba que  $H$  é negativo, já que a estrela nasce no lado leste do horizonte. Daí:

$$\lambda = -59^\circ 31' 18'' \approx -59,52^\circ$$

- c) Nesse item, era fundamental perceber que o menor ângulo entre o meridiano de Eduardo e o menor arco que liga onde Eduardo está até onde a guarda costeira está vale  $A - 180^\circ$ , em que  $A$  é o azimute requisitado. Veja:



No triângulo, foi respeitado o fato de que Eduardo está mais a leste do que a Guarda Costeira. Podemos achar  $\theta$  com uma simples lei dos cossenos:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sin \phi_g \sin \phi_E + \cos \phi_g \cos \phi_E \cos \Delta \lambda \\ \theta &= 5^\circ 38' 54,4'' \approx 5,648^\circ\end{aligned}$$

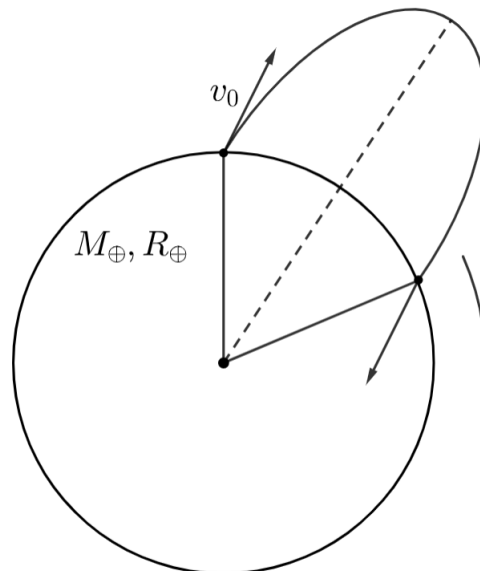
Aplicando lei dos senos no mesmo triângulo:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(A - 180^\circ)}{\sin(90 + \phi_g)} &= \frac{\sin \Delta \lambda}{\sin \theta} \\ \sin A &= -\frac{\sin \Delta \lambda \cos \phi_g}{\sin \theta}\end{aligned}$$

$$A = 232^\circ 51' 24,7'' \approx 232,85^\circ$$

Perceba que o azimute escolhido a partir da função seno é o correto porque a guarda costeira está mais perto do Polo Sul do que Eduardo, logo o ângulo  $A - 180^\circ$  deve ser menor que  $90^\circ$ .

- 6. A Terra é Oca! (40 pontos)** Em um universo paralelo, a Terra é oca, de modo que sua massa superficial é  $M = M_\oplus$ , seu raio é  $R = R_\oplus$  e sua velocidade angular de rotação é extremamente alta, com  $\omega = 30\omega_\oplus$ . Paulinho, residente desse universo que se situava no equador terrestre, decidiu um dia lançar um foguete de sua casa até a moradia de seu amigo Mychel, que também se localizava no equador terrestre. Sabe-se que, contando a partir do meridiano de Greenwich, a longitude de Paulinho é  $\lambda_P$  e a de Mychel  $\lambda_M$ , e que o foguete é lançado com velocidade  $v_0$  no referencial do centro da Terra. Contudo, em seus cálculos, Paulinho esqueceu de considerar o movimento relativo de Mychel devido à rotação terrestre, que nesse universo, não era desprezível. Assim, seu modelo se tornou extremamente simplificado e falho. Sabendo disso, responda:



- (a) **(5 pontos)** Determine o semi-eixo maior  $a$  e a excentricidade  $e$  da órbita do foguete lançado por Paulinho assumindo que ele atingiria Mychel e ignorando a rotação da Terra. Deixe sua resposta em função de  $M_\oplus, R_\oplus, \lambda_P$  e  $\lambda_M$  e assuma que  $a \geq R_\oplus$ . Você pode deixar a expressão da excentricidade em função de  $a$ .

- (b) **(5 pontos)** Escreva uma expressão para o tempo  $t_0$  que o foguete levaria para atingir Mychel, ignorando a rotação da Terra. Deixe sua resposta em função de  $a, e, M_{\oplus}, R_{\oplus}, \lambda_P$  e  $\lambda_M$ .

Devido a rotação terrestre, passado um intervalo de tempo  $t = t_0$ , Mychel terá se deslocado angularmente de  $\alpha = \omega t_0$  em relação ao centro da Terra, de tal modo que ele não será atingido pelo foguete de Paulinho. Consequentemente, o foguete irá continuar em sua trajetória e passará a se mover ao longo do interior da Terra oca. Devido a isso, a sua órbita será precessionada periodicamente. Felizmente, para Paulinho, também como resultado da precessão do foguete, passado certo intervalo de tempo  $t = t'$ , a órbita do foguete irá inevitavelmente se intersectar com a localização geográfica de Mychel e, finalmente, o atingir. No item (c), você não precisa substituir os valores de  $a, e$  e  $t_0$  encontrados anteriormente. Com base nisso:

- (c) **(14 pontos)** Escreva uma expressão para o ângulo  $\Delta\varphi$  em que a órbita do foguete é precessionada a cada período de translação.
- (d) **(16 pontos)** Considerando  $v_0 = 8$  km/s,  $\lambda_P = 70^\circ$  e  $\lambda_M = 160^\circ$ , determine o valor do tempo  $t = t'$ , em horas, para que o foguete lançado por Paulinho atinja Mychel.

**Solução:**

- (a) Sabendo a energia total da órbita elíptica, podemos encontrar o semi-eixo maior da órbita do foguete de Paulinho. Acompanhe:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = -\frac{GM_{\oplus}m}{2a}$$

Manipulando algebricamente, obtemos:

$$a = \frac{GM_{\oplus}R_{\oplus}}{2GM_{\oplus} - v_0^2R_{\oplus}}$$

Já para calcular a excentricidade  $e$  da órbita, podemos perceber que, pela figura do enunciado, a anomalia verdadeira da órbita no momento de lançamento é

$$\theta = \pi - \frac{\lambda_M - \lambda_P}{2}$$

Substituindo na equação polar da elipse, obtemos:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\left(\pi - \frac{\lambda_M - \lambda_P}{2}\right)}$$

Manipulando, obtemos uma equação de segundo grau para  $e$ :

$$ae^2 - eR \cos\left(\frac{\lambda_M - \lambda_P}{2}\right) + R - a = 0$$

De onde obtemos:

$$e = \frac{R \cos\left(\frac{\lambda_M - \lambda_P}{2}\right) + \sqrt{\left(R \cos\left(\frac{\lambda_M - \lambda_P}{2}\right)\right)^2 + 4a(a - R)}}{2a}$$

Onde foi pego a raiz positiva, pois caso contrário,  $e < 0$ , o que é um absurdo.

- (b) Nesse caso, podemos utilizar a Equação de Kepler para calcular o tempo de voo  $t_0$  do foguete. Calculando a sua anomalia excêntrica no momento inicial:

$$R_{\oplus} = a(1 - e \cos E_0)$$

ou seja:

$$E_0 = \arccos\left(\frac{a - R_{\oplus}}{ae}\right)$$

e, no momento final:

$$E_f = 2\pi - \arccos\left(\frac{a - R_{\oplus}}{ae}\right)$$

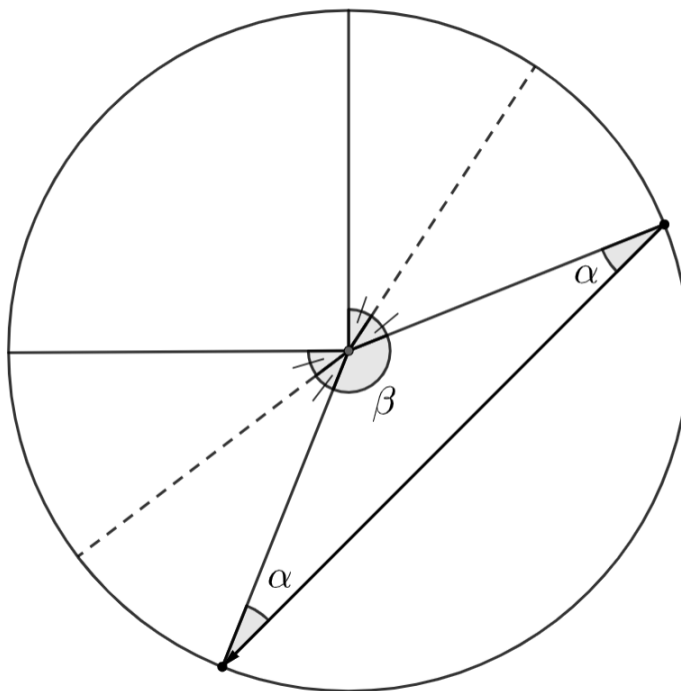
Desse modo, pela equação de Kepler, teremos:

$$\Delta M = E_f - E_0 - e(\sin E_f - \sin E_0)$$

Assim, substituindo os valores e manipulando, obtemos:

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}}\left(\pi - \arccos\left(\frac{a - R_{\oplus}}{ae}\right) - \frac{\sqrt{2aR - R^2 - a^2(1 - e^2)}}{a}\right)$$

- (c) Dentro da Terra oca, não há campo gravitacional, de modo que a trajetória do foguete é retilínea. Abaixo, acompanhe a geometria do problema:



Definiremos  $\alpha$  como o ângulo em que o vetor velocidade do foguete faz com o raio terrestre, no momento em que ele entra na Terra oca. Por conservação de momento angular:

$$mv_0 R_{\oplus} \sin \alpha = \sqrt{GM_{\oplus} m^2 a(1 - e^2)}$$

logo:

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\sqrt{GM_{\oplus}a(1-e^2)}}{v_0 R_{\oplus}} \right)$$

Pela geometria do problema, percebemos que o ângulo na qual a órbita do foguete é rotacionada é dada por:

$$\Delta\varphi = \beta + \lambda_M - \lambda_P$$

Pela figura, conseguimos calcular  $\beta$  por:

$$\beta = \pi - 2\alpha$$

de modo que, então:

$$\Delta\varphi = \pi + \lambda_M - \lambda_P - 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{GM_{\oplus}a(1-e^2)}}{v_0 R_{\oplus}} \right)$$

- (d) Para esse item, perceba que a velocidade angular do foguete lançado por Paulinho ao longo da superfície da Terra é descontínua, de modo que não conseguimos escrever uma função exata para seu deslocamento angular em função do tempo, tendo assim que recorrer a soluções gráficas. Seja  $t_1$  o tempo que o foguete permanece no interior da Terra a cada ciclo, temos que:

$$v_0 t_1 = 2R_{\oplus} \cos \alpha$$

ou seja:

$$t_1 = \frac{2R_{\oplus} \cos \alpha}{v_0}$$

Sempre que o foguete passa por dentro da Terra oca, ele é deslocado angularmente de  $\beta$  em sua superfície após um tempo  $t_1$ . Analogamente, sempre que o foguete está fora da Terra oca, ele é deslocado angularmente de  $\lambda_M - \lambda_P$  ao longo da superfície da Terra após um tempo  $t_0$ . Dessa forma:

$$\lambda_M - \lambda_P \rightarrow t_0$$

$$\lambda_M - \lambda_P + \beta \rightarrow t_0 + t_1$$

$$2(\lambda_M - \lambda_P) + \beta \rightarrow 2t_0 + t_1$$

$$2(\lambda_M - \lambda_P) + 2\beta \rightarrow 2t_0 + 2t_1$$

.

.

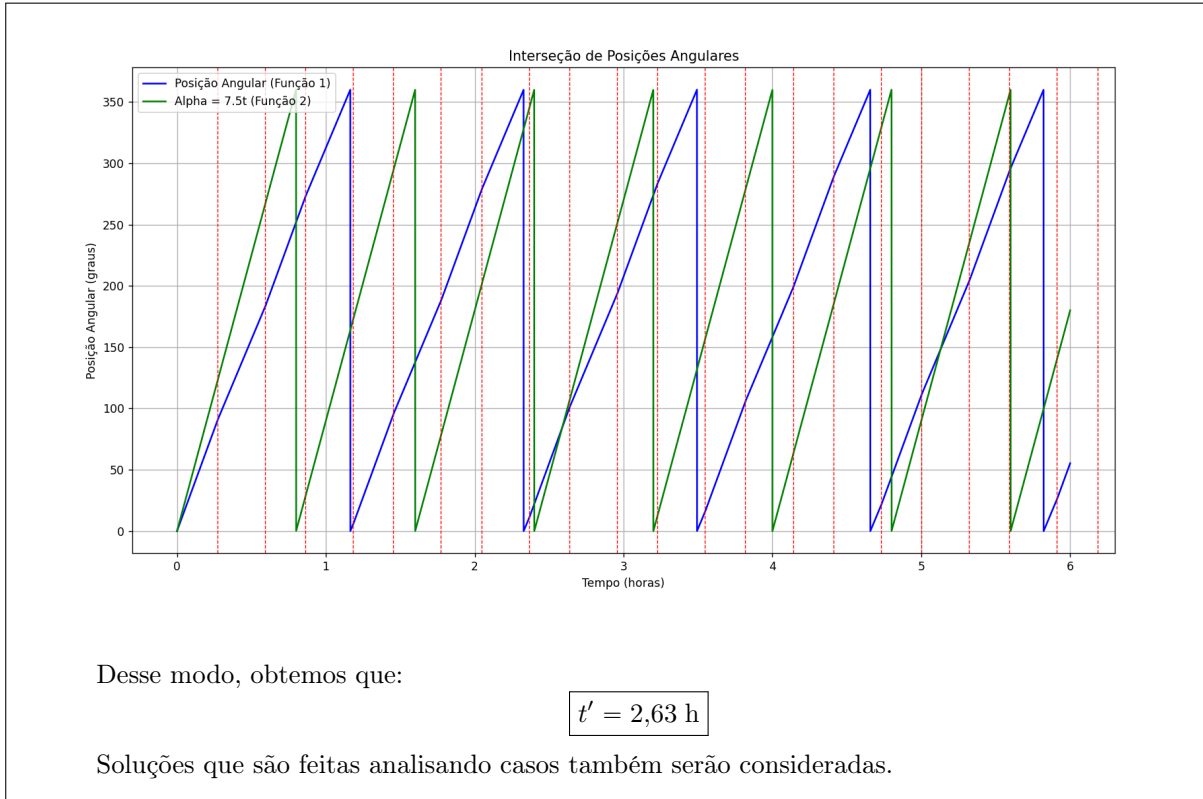
.

Já Mychel, estará em um movimento curvilíneo e uniforme ao longo da superfície da Terra, de modo que seu deslocamento angular em função do tempo pode ser calculado por:

$$\alpha = 30\omega_{\oplus}t$$

Para encontrar o instante  $t = t'$  que o foguete atinge Mychel pela primeira vez, basta encontrar a intersecção dos gráficos do deslocamento angular em função do tempo de Mychel e do foguete lançado por Paulinho. Assim, substituindo os respectivos valores numéricos, conseguimos fazer o seguinte gráfico da intersecção do deslocamento angular do foguete com o deslocamento angular de Mychel em função do tempo:





## Questões Longas

7. **Manchas Solares (65 pontos)** As manchas solares são extremamente importantes para a astronomia e astrofísica, sendo cruciais para determinação de diversos parâmetros, dentre os quais se destacam a curva de velocidade angular do Sol. Como já é conhecido por diversos cientistas, a rotação do Sol não é constante e, portanto, varia dependendo da latitude. Nessa questão, proporemos um modelamento teórico simplificado para esse fenômeno e utilizaremos de manchas solares para a sua comprovação experimental. Todas as partes da questão são **independentes** entre si.

### Parte A: Rotação Diferencial do Sol

Diversos modelos foram criados ao longo dos anos para modelar a rotação diferencial do Sol. Nessa parte da questão, assumiremos que o Sol é uma esfera de raio  $R$  e massa  $M$ , composta principalmente por gás ideal de massa molar  $\mu$ , temperatura  $T$  no núcleo e densidade  $\rho$ . Devido à turbulência atmosférica, não podemos considerar que a superfície solar é equipotencial, tendo assim que recorrer à condições de equilíbrio hidrostático. Uma vez que o Sol está rotacionando, a equação de equilíbrio hidrostático também deve levar em conta a força centrífuga, de modo que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\rho g_{eff}$$

em que  $g_{eff}$  é a gravidade efetiva em um ponto de latitude  $\varphi$ .

- (a) **(5 pontos)** Mostre que, para baixos valores de  $\omega$ , o valor de  $g_{eff}$  pode ser aproximado para:

$$g_{eff} \approx g_0 - \omega^2 r \cos^2 \varphi$$

em que  $r$  é a distância da partícula de prova até o centro do Sol,  $\omega$  é a sua velocidade angular em uma latitude  $\varphi$ , e  $g_0$  é o valor de sua gravidade em repouso.

**Dado:** Se necessário use que  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $x \ll 1$ . Você pode desprezar termos de ordem maior que  $\omega^2$ .

Para modelar a pressão interna do Sol, devemos contabilizar o termo devido ao gás ideal e à pressão magnética. Com isso, é importante calcular o campo magnético gerado devido a correntes no plasma solar. Para o que segue, assuma que a densidade de elétrons no Sol é dada por  $\eta_e$  e considere que o campo magnético em certa latitude  $\varphi$  é aproximado para a de um anel de raio  $r_A = R \cos \varphi$ , tal que:

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{r_A} \approx \frac{\mu_0 \rho_e R^2 v_\varphi}{r_A}$$

em que  $v_\varphi$  é a velocidade dos elétrons na superfície da latitude  $\varphi$  e  $\rho_e$  é a densidade volumétrica de carga no plasma.

(b) **(3 pontos)** Demonstre, com base no que foi visto, que:

$$B \approx \mu_0 \eta_e e \omega R^2$$

Já a pressão magnética devido às correntes no plasma solar pode ser calculada pela seguinte formula:

$$P_M = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Perceba que  $P_M$  é proeminente principalmente na superfície solar, uma vez que o campo magnético na superfície é mais intenso do que no núcleo.

(c) **(14 pontos)** Assumindo que a pressão do gás ideal no núcleo do Sol seja bem maior que em sua superfície,  $P \gg P_0$ , e que toda a sua massa esteja concentrada em seu núcleo, mostre que, pela condição de equilíbrio hidrostático:

$$\omega \approx a + b \cos^2 \varphi$$

e encontre os valores das constantes positivas  $a$  e  $b$ . Pela expressão acima, podemos dizer que a velocidade angular do Sol aumenta ou diminui com a latitude?

**Observação:** Para fins de estimativa, use que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \approx -\frac{P - P_M}{R}$$

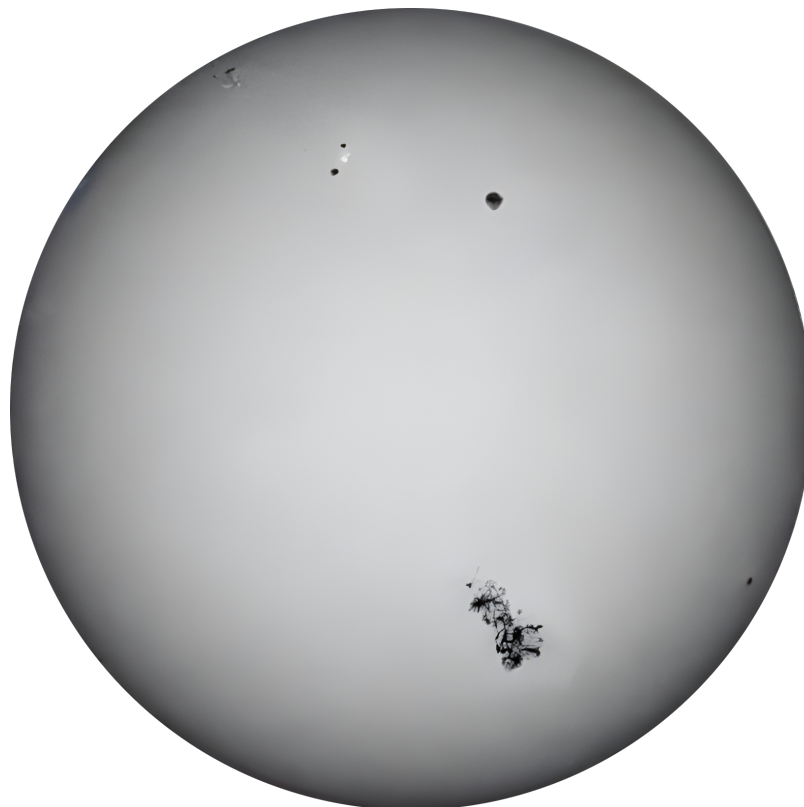
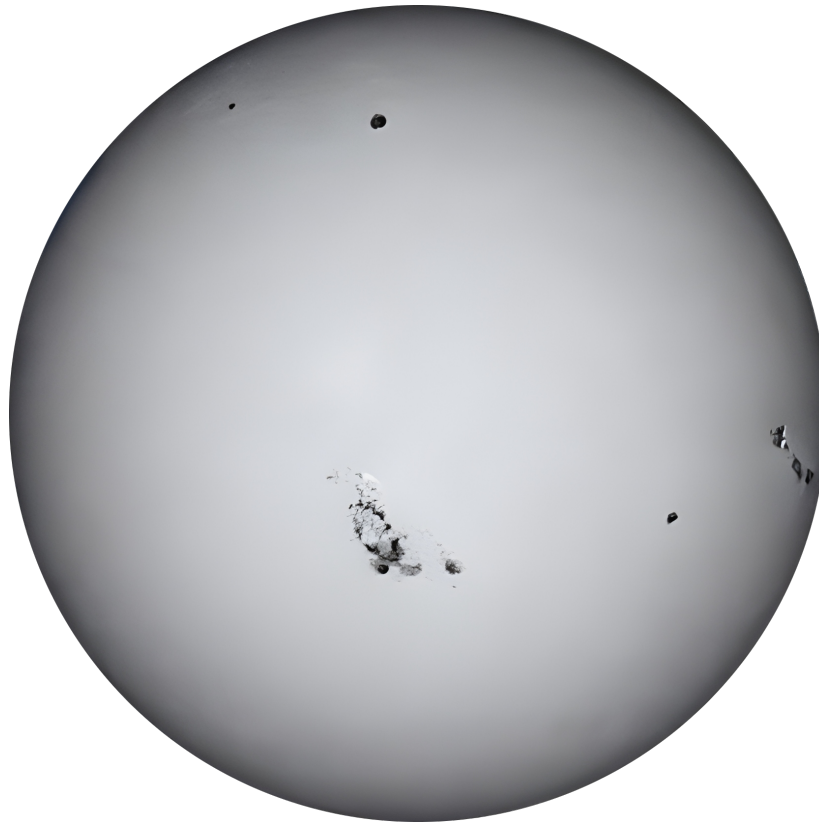
Assuma também que:

$$\rho \ll \mu_0 \eta_e^2 e^2 R^2$$

**Dado:** Se necessário, use que  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $x \ll 1$ .

## Parte B: Mapeamento de Manchas Solares

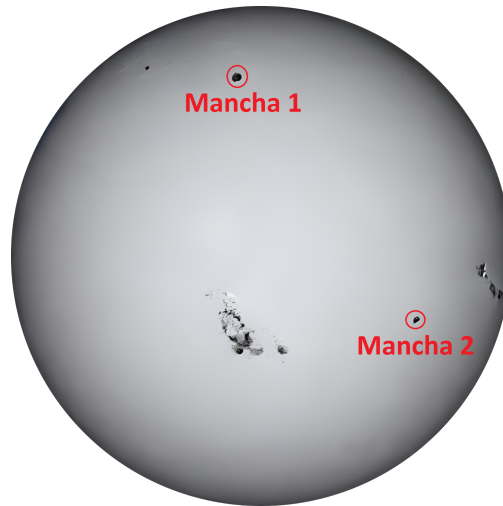
Para confirmarmos que os resultados anteriores realmente são um bom modelo para representar a velocidade angular do Sol em função da latitude, brinquemos um pouco. Veja as imagens abaixo do Sol com suas manchas solares em dois dias diferentes retiradas do banco de imagens da NASA:



- (d) **(7 pontos)** Nas imagens, desenhe o equador do Sol. Considere que a inclinação entre o equador do Sol e a eclíptica é nula.
- (e) **(3 pontos)** Com base no item anterior, desenhe, aproximadamente, onde se encontram os polos do Sol na imagem. Não é preciso especificar qual é o sul e qual é o norte. Não esqueça de, ao final da prova, escanear essa imagem também (e escaneie de forma que fique **bem** visível).

Agora, tentaremos encontrar a velocidade angular de rotação de uma dada latitude do Sol a partir das medidas que podemos fazer nas imagens. Suponha que uma dada mancha solar está a uma distância angular  $D$  do centro do Sol quando vista da Terra (**medida em raios angulares do Sol**), e que a inclinação do segmento que vai do centro do Sol até a mancha em relação ao equador solar é  $i$ .

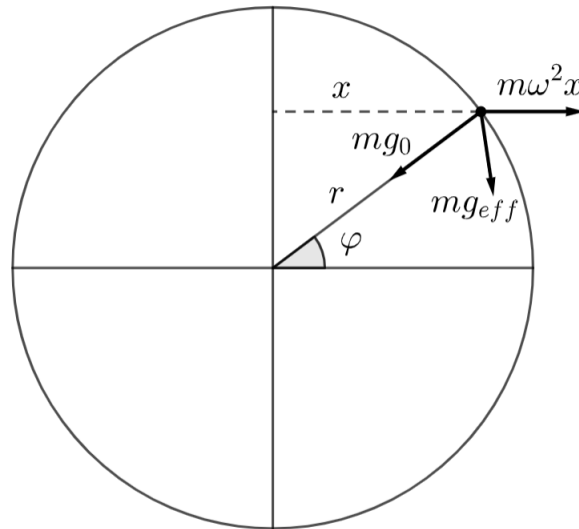
- (f) **(8 pontos)** Encontre a expressão para a latitude  $\varphi$  da mancha, contada a partir do equador do Sol, e para distância angular  $\theta$  entre a mancha e a Terra quando vista do centro do Sol. Deixe suas respostas em termos de  $D$  e  $i$ .
- (g) **(4 pontos)** A partir do item anterior, encontre uma expressão para a magnitude  $\lambda$  da distância angular entre a mancha e o meridiano que é perpendicular ao equador e passa pelo centro do Sol quando visto da Terra.
- (h) **(20 pontos)** As figuras da página anterior mostram duas imagens do Sol, separadas por um intervalo de tempo  $\Delta t = 2$  dias. Utilize as manchas indicadas na figura a seguir para realizar suas medidas com a régua e calcule  $\varphi$ ,  $\lambda_1$  (primeira imagem) e  $\lambda_2$  (segunda imagem) para elas utilizando as fórmulas dos itens anteriores. A partir dos resultados, calcule a velocidade angular em cada latitude e preencha a tabela a seguir, onde  $\theta_{\odot}$  representa o raio angular do Sol (novamente, **não se esqueça de escaneá-la ao final da prova**). O resultado concorda com o modelo previsto na parte A dessa questão?



Mancha	$D_1(\theta_{\odot})$	$D_2(\theta_{\odot})$	$i_1(^{\circ})$	$i_2(^{\circ})$	$\lambda_1(^{\circ})$	$\lambda_2(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\omega(^{\circ}/\text{dia})$
1								
2								

**Solução:**

- (a) Para resolução desse item, podemos fazer o seguinte esquema de forças em uma partícula de prova na superfície do Sol:



Por uma lei dos cossenos, conseguimos determinar o valor de  $g_{eff}$ . Acompanhe:

$$g_{eff}^2 = g_0^2 + (\omega^2 r \cos \varphi)^2 - 2g_0\omega^2 r \cos^2 \varphi$$

Uma vez que  $\omega^2 \ll 1$ , podemos desprezar termos de quarta ordem, tal que:

$$g_{eff}^2 \approx g_0^2 - 2g_0\omega^2 r \cos^2 \varphi$$

ou seja:

$$g_{eff} \approx g_0 \left( 1 - \frac{2\omega^2 r \cos^2 \varphi}{g_0} \right)^{1/2}$$

Utilizando a aproximação binomial, obtemos por fim:

$$g_{eff} \approx g_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 r \cos^2 \varphi}{g_0} \right)$$

e, então:

$$g_{eff} \approx g_0 - \omega^2 r \cos^2 \varphi$$

- (b) Nesse item, é importante perceber que a densidade de carga  $\rho_e$  no plasma solar pode ser calculada por:

$$\rho_e = \eta_e e$$

Além disso, perceba que a velocidade média  $v_\varphi$  dos elétrons ao longo do equador solar pode ser escrita por:

$$v_\varphi = \omega R \cos \varphi$$

de modo que, substituindo os valores na fórmula do enunciado, obtemos:

$$B = \mu_0 \eta_e e \omega R^2$$

- (c) Nesse caso, teremos, pela equação do equilíbrio hidrostático, que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \approx -\frac{P - P_M}{R} = -\rho g_{eff} \approx -\frac{\rho G M}{R^2} + \rho \omega^2 R \cos^2 \varphi$$

Assim:

$$P = \frac{\rho GM}{R} - \rho\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Substituindo o valor encontrado para  $B$ , temos que:

$$P = \frac{\rho GM}{R} - \rho\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi + \frac{\mu_0 \eta_e^2 e^2 \omega^2 R^4}{2}$$

Sabemos, contudo, pela Lei dos Gases Ideais, que:

$$P = \frac{\rho k_b T}{\mu}$$

Com isso, teremos que:

$$\frac{\rho k_b T}{\mu} = \frac{\mu_0 \eta_e^2 e^2 \omega^2 R^4}{2} + \frac{\rho GM}{R} - \rho\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi$$

ou seja:

$$\omega^2 R^2 \left( \frac{\mu_0 \eta_e^2 e^2 R^2}{2} - \rho \cos^2 \varphi \right) = \frac{\rho k_b T}{\mu} - \frac{\rho GM}{R}$$

logo:

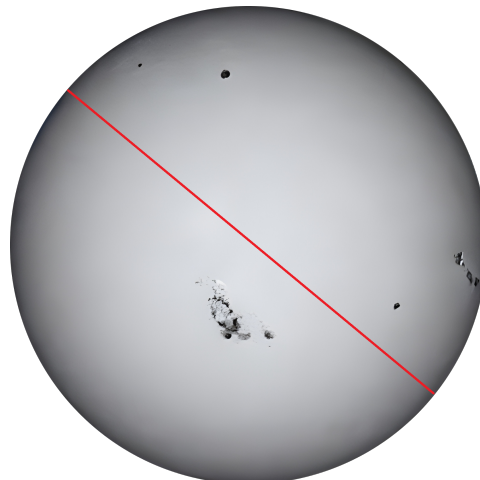
$$\omega = \sqrt{\left( \frac{2}{\mu_0 \eta_e^2 e^2 R^4} \right) \left( \frac{\rho k_b T}{\mu} - \frac{\rho GM}{R} \right) \left( 1 - \frac{2\rho \cos^2 \varphi}{\mu_0 \eta_e^2 e^2 R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}}$$

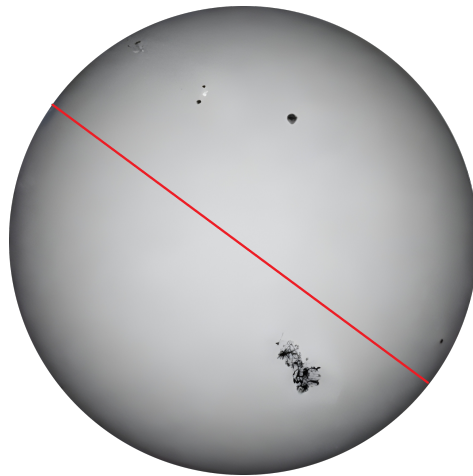
Por fim, utilizando a aproximação binomial, obtemos que:

$$\omega \approx \sqrt{\left( \frac{2}{\mu_0 \eta_e^2 e^2 R^4} \right) \left( \frac{\rho k_b T}{\mu} - \frac{\rho GM}{R} \right) \left( 1 + \frac{\rho \cos^2 \varphi}{\mu_0 \eta_e^2 e^2 R^2} \right)}$$

Repare que, pela expressão obtida,  $\omega$  diminui com a latitude  $\varphi$ .

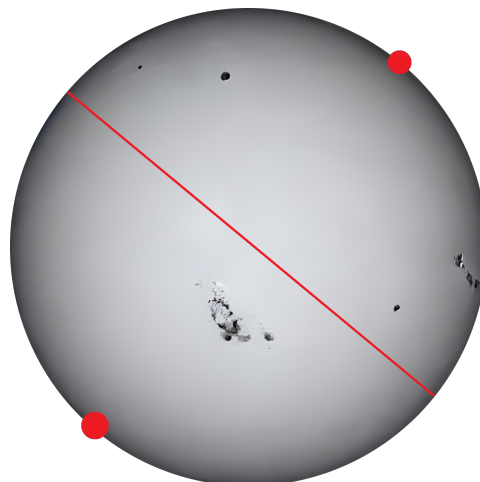
- (d) É fundamental perceber que as manchas vão se mover paralelamente ao equador do Sol. Assim, o sentido de movimento das manchas de uma imagem à outra permite que tracemos a linha do equador, que também deve passar pelo centro da imagem. Daí, a resposta ideal seria algo parecido com essas figuras:

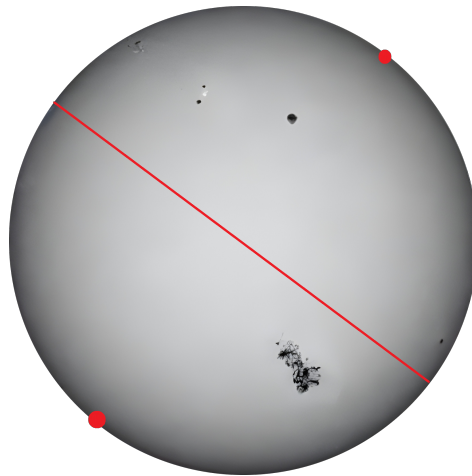




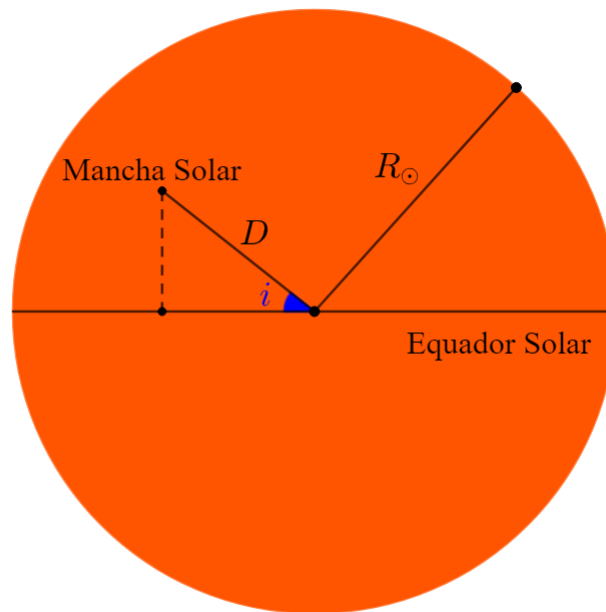
O ideal é que a linha passe pelo centro da figura, então, seria interessante marcar o centro precisamente usando alguma construção geométrica.

- (e) Para os polos, basta pegar a reta perpendicular ao equador e que também passa pelo centro da imagem. A interseção dela com as bordas do sol nos dá os polos:





- (f) Para resolver esse item, utilizaremos um esquema representando uma mancha solar vista da Terra:



Como  $D$  é uma distância angular muito pequena, podemos aproximá-la para uma reta. A distância entre a mancha solar e a reta que vai do centro da Terra até o centro da Terra é aproximadamente  $a_{\oplus}D(rad)$ . Assim, a distância angular entre a mancha e a Terra quando vista do centro do Sol é

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{a_{\oplus}D(rad)}{R_{\odot}} \right)$$

Como o  $D$  do enunciado está em unidades do raio angular do Sol, o qual é igual a  $R_{\odot}/a_{\oplus}$ , a resposta final é

$$\theta = \sin^{-1} D$$

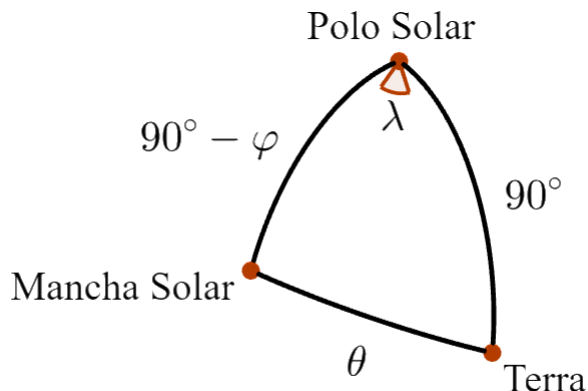
Para encontrar a latitude da mancha solar, seguimos um raciocínio análogo, porém dessa vez devemos considerar a distância angular entre o equador solar e a mancha, a qual é dada por



$D \sin i$ . Assim, a resposta é

$$\varphi = \sin^{-1}(D \sin i)$$

(g) Considere o triângulo esférico a seguir, na perspectiva de um observador no centro do Sol:



Pela lei dos cossenos,

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \lambda$$

Manipulando a equação e usando os resultados do item anterior:

$$\cos \lambda = \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{1 - D^2}{1 - D^2 \sin^2 i}}$$

$$\lambda = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - D^2}{1 - D^2 \sin^2 i}} \right)$$

(h) Para encontrar  $D$ , pegamos a fração entre a distância da mancha até o centro do Sol e o raio do Sol na imagem. Para encontrar  $i$ , traçamos o equador nas imagens e medimos o ângulo de acordo com a sua definição utilizando o transferidor (equivalentemente, pode-se aplicar a fórmula do seno/cosseno/tangente a um triângulo retângulo com hipotenusa paralela à reta que vai do centro à mancha e com um dos catetos paralelo ao equador). Depois, podemos calcular os outros dados utilizando as fórmulas encontradas nos itens anteriores. No caso de valores de  $\varphi$  diferentes para uma mesma mancha nas duas imagens, tiramos a média desses valores (é esperado que tenhamos uma certa incerteza nas nossas medidas). Finalmente, para encontrar  $\omega$  na latitude de uma das manchas, dividimos a módulo da sua variação de longitude pelo intervalo de tempo entre as imagens:

$$\omega = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\Delta t}$$

A resposta final é:

Mancha	$D_1(\theta_\odot)$	$D_2(\theta_\odot)$	$i_1(^{\circ})$	$i_2(^{\circ})$	$\lambda_1(^{\circ})$	$\lambda_2(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\omega(^{\circ}/\text{dia})$
1	0,70	0,56	41	77	36,5	8,6	30	14,0
2	0,67	0,96	12	10	41,4	73,5	8,8	16,1

O que é condizente com o modelo teórico previsto, uma vez que a velocidade angular diminui com a latitude.

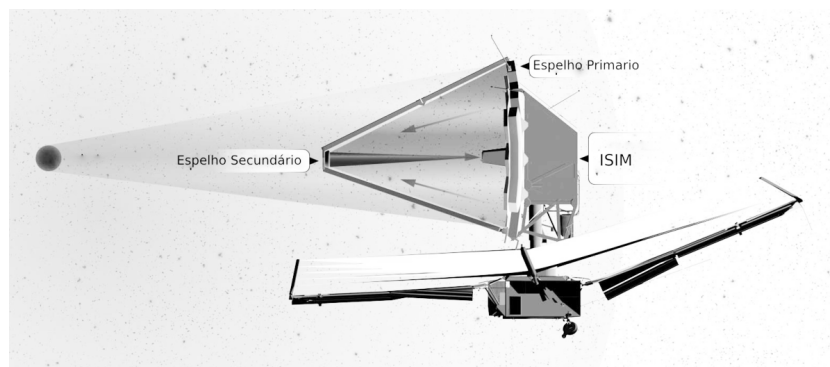
8. **James Webb Space Telescope (75 pontos)** Nessa questão, estudaremos as propriedades orbitais, ópticas e termodinâmicas do telescópio espacial James Webb (JWST), que foi lançado pela NASA em dezembro de 2021. Para o que segue, considere que o aparato está localizado no segundo ponto de Lagrange (L2), externo a órbita terrestre na linha que liga a Terra e o Sol, que a área efetiva de seu espelho primário é  $A_m = 25 \text{ m}^2$  e que sua razão focal é  $f/20$ . Todas as partes da questão são independentes entre si.

### Parte A: Parâmetros Orbitais

- (a) (4 pontos) Assumindo que o L2 é um dos pontos em que um satélite aparenta estar em repouso quando visto pela Terra, calcule a distância entre JWST e a Terra.  
**Dado:** Se necessário use que  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  para  $x \ll 1$ .
- (b) (4 pontos) Sabendo que o telescópio se movimenta ao redor do L2 em uma órbita circular de raio  $r$ , em que  $r$  é a menor distância para o que JWST não seja ocultado pelo cone da sombra terrestre, determine o valor numérico de  $r$  em km.

### Parte B: Parâmetros Ópticos

Já agora, uma vez que sabemos que o telescópio não será ocultado pela Terra, estamos prontos para estudar a formação de imagens no James Webb Space Telescope e suas propriedades ópticas. Considere, para tanto, que o JWST é um telescópio do tipo Cassegrain, possuindo dois espelhos, sendo um primário, de formato parabólico e foco  $f = 3,31972 \text{ m}$ , e um secundário, de formato esférico, concavo, e raio  $R = 0,37 \text{ m}$ . Além disso, a distância entre os espelhos é dada por  $d = 7,00 \text{ m}$ . Abaixo, segue um esquema para a formação de imagens no telescópio.



Fonte: NASA. Formação de imagens no JWST.

- (c) (15 pontos) A partir da imagem acima, dos seus conhecimentos de óptica geométrica, e do que foi dito, determine o comprimento focal efetivo  $f_{ef}$  do JWST.
- (d) (5 pontos) Calcule também a magnitude limite no visível, o poder de resolução médio (em segundos de arco) e a escala de placa (em  $''/\text{m}$ ) do James Webb Space Telescope. Considere que a refletividade dos espelhos do telescópio é de 98%.
- Dado:** O JWST opera entre os comprimentos de onda de 0.6 a 28.5 microns.

Considere agora as observações do JWST de uma estrela de temperatura  $T = 3600 \text{ K}$ , magnitude no visível  $m = -2,91$  e magnitude absoluta no visível  $M = -5,09$ .

- (e) (7 pontos) Determine (i) se o telescópio conseguirá observar e distinguir a estrela. Calcule (ii) o raio da imagem da estrela no CCD. Por fim, considerando que o CCD não é resfriado e só pode perder calor por meio da radiação na parte superior de sua superfície, e apenas no local onde sua

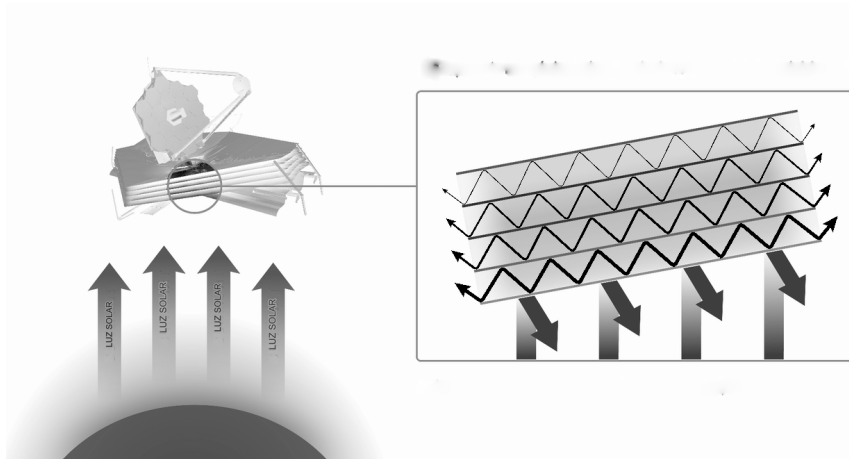
imagem é formada, obtenha (iii) a sua temperatura de equilíbrio. Considere o CCD como um corpo cinza de emissividade  $\epsilon = 0,05$  e não se esqueça que a refletividade dos espelhos do JWST é de 98%.

**Dado:** Considere o comprimento de onda no visível como 600 nm.

Eventualmente, caso o cenário anterior fosse possível, e o JWST não fosse resfriado, o seu CCD seria danificado e, conseqüentemente, o telescópio não conseguiria realizar observações astronômicas.

### Parte C: Parâmetros Termodinâmicos

Visando evitar hiperaquecimento, o JWST possui um sistema de resfriamento complexo que impede que o seu CCD seja danificado por altas temperaturas. Nessa parte da questão, tentaremos modelar esse sistema de uma forma simples, assumindo que ele seja composto por **5 placas idênticas mais o CCD, todos com a mesma área e paralelos entre si**. Assuma que a distância entre duas placas consecutivas ou entre a última placa e o CCD são pequenas o suficiente para desprezar a energia que escapa entre eles. Tanto as placas quanto o CCD possuem área  $S$  e emissividade  $\epsilon$ . Suponha que a temperatura do espaço é desprezível e que as placas são finas com temperaturas iguais nas duas faces.



Fonte: Nasa. Sistema de Resfriamento do CCD do JWST

- (f) **(18 pontos)** Para nos prepararmos para resolver a questão, considere duas placas consecutivas, chamadas de  $A$  e  $B$ , ambas com área  $S$  e emissividade  $\epsilon$ . Se a placa  $A$  está sendo mantida a uma temperatura  $T_A$  e a placa  $B$  está sendo mantida a uma temperatura  $T_B$ , prove que a energia total que flui por unidade de tempo da placa  $A$  para a placa  $B$  é dada por

$$Q_{AB} = \alpha(\epsilon)S\sigma(T_A^4 - T_B^4)$$

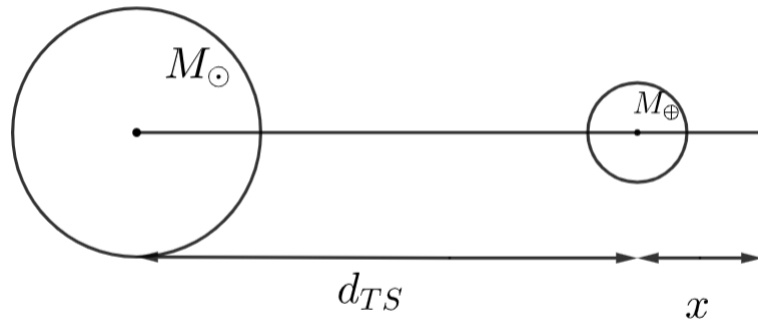
E encontre uma expressão para a constante  $\alpha$ , que só depende de  $\epsilon$ .

**Dica:** Lembre-se que um corpo com emissividade  $\epsilon$  possui absorvidade  $\epsilon$  e refletividade  $1 - \epsilon$ .

- (g) **(20 pontos)** Assuma que um fluxo  $F_0$  vindo do Sol incida sobre a primeira placa após passar pelo aparato óptico do JWST. Escreva as equações de conservação de energia para o sistema das 5 placas e o CCD, chamando a temperatura da  $i$ -ésima placa de  $T_i$  ( $i \in \{1,2,3,4,5\}$ ) e a temperatura do CCD de  $T_6$ . A partir de seu sistema de equações, encontre uma expressão para  $T_6$  em termos de  $F_0$ ,  $\sigma$  e  $\epsilon$ . Caso você não tenha resolvido o item anterior, deixe sua resposta também em termos de  $\alpha$ .
- (h) **(2 pontos)** Assumindo valores de  $F_0 = 1360 \text{ W/m}^2$  e  $\epsilon = 0,05$ , calcule o valor numérico da temperatura do CCD do James Webb Space Telescope em Kelvin.

**Solução:**

(a) Para resolução desse item, considere a figura:



Escrevendo a segunda Lei de Newton para o sistema, obtemos que:

$$\frac{GM_{\odot}m}{(d_{TS} + x)^2} + \frac{GM_{\oplus}m}{x^2} = m\omega^2(d_{TS} + x)$$

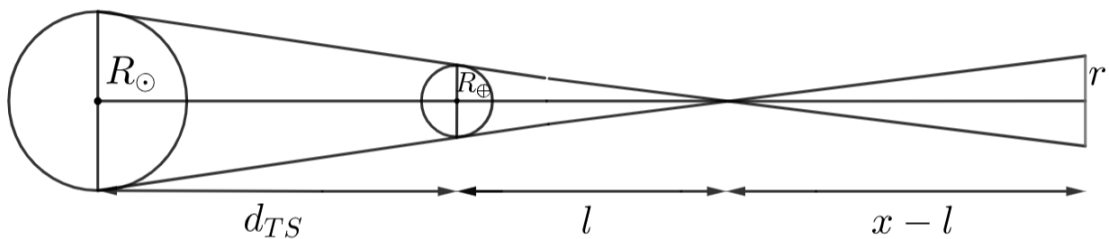
Utilizando a aproximação binomial dada e substituindo o valor de  $\omega$ :

$$\frac{GM_{\odot}}{d_{TS}^2} \left(1 - \frac{2x}{d_{TS}}\right) + \frac{GM_{\oplus}}{x^2} \approx \frac{GM_{\odot}}{d_{TS}^2} \left(1 + \frac{x}{d_{TS}}\right)$$

Manipulando algebricamente, obtemos que:

$$x \approx \left(\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{3}} d_{TS} \approx 1,5 \times 10^6 \text{ km}$$

(b) Já para resolver esse item, atente-se a figura:



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{l}{R_{\oplus}} = \frac{d_{TS} + l}{R_{\odot}}$$

Manipulando, obtemos que:

$$l = \frac{R_{\oplus}d_{TS}}{R_{\odot} - R_{\oplus}}$$

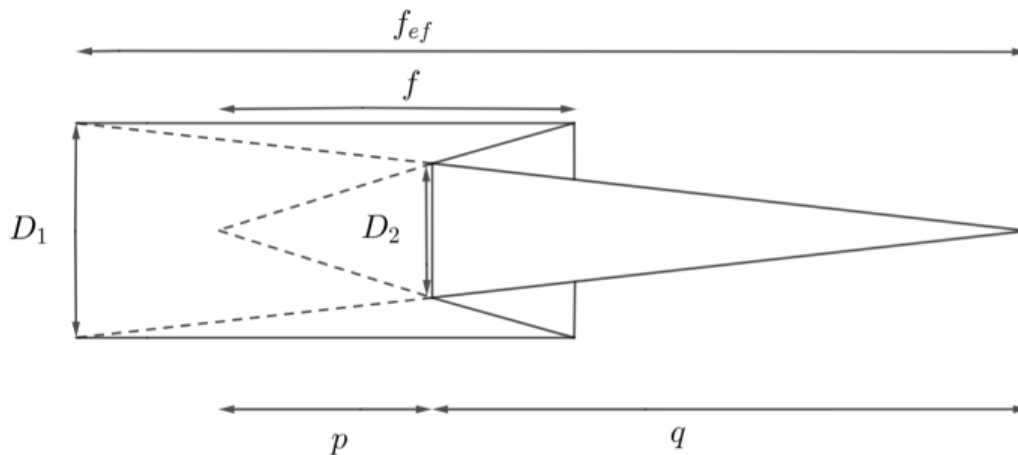
Novamente, por semelhança de triângulos, obtemos que:

$$\frac{r}{x-l} = \frac{R_{\oplus}}{l}$$

Tal que, por fim:

$$r = \left( \frac{x(R_{\odot} - R_{\oplus})}{R_{\oplus}d_{TS}} - 1 \right) R_{\oplus} \approx 5,34 \times 10^5 \text{ m}$$

- (c) Para esse item, seja  $p$  a distância do espelho secundário ao foco do espelho primário e  $q$  a distância do espelho secundário ao foco do sistema, acompanhe o esquema da formação de imagem no sistema:



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{D_1}{f} = \frac{D_2}{p}$$

e

$$\frac{D_1}{f_{ef}} = \frac{D_2}{q}$$

tal que, manipulando, obtemos:

$$f_{ef} = \frac{q}{p}f$$

Como o espelho secundário é esférico e côncavo, teremos que, pela Equação dos Pontos Conjugados,

$$\frac{1}{-p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

onde o sinal negativo indica um ponto objeto virtual. Utilizando que  $f = R/2$  e manipulando, obtemos que:

$$q = \frac{Rp}{R + 2p}$$

Assim,

$$f_{ef} = \frac{Rf}{R + 2p}$$

Perceba que  $p = f - d$ , de tal modo que, por fim:

$$f_{ef} = \frac{Rf}{R + 2f - d} = 130 \text{ m}$$

**Nota:** No enunciado da prova, está escrito que o espelho é convexo, no entanto, era para ser concavo. Tendo em vista isso, as correções serão feitas de acordo com o fato de que o espelho é convexo.

- (d) Nesse caso, seja  $r$  a refletividade dos espelhos, podemos calcular o fluxo total que chega no CCD por:

$$F = F_0 r^2$$

em que  $F_0$  é o fluxo incidente devido a estrela. Seja  $A$  a área do espelho primário, obtemos que:

$$P_0 = FA = F_0 A r^2$$

de tal modo, comparando a potência captada pelo telescópio e pelo olho humano:

$$m_L = m_O + 2,5 \log \left( \frac{4Ar^2}{\pi d_O^2} \right) = 20,82$$

Já a resolução angular média pode ser calculada pela condição de Rayleigh-Jeans:

$$\theta_M = \frac{1,22\lambda_M}{D}$$

em que  $\lambda_M$  é o valor médio dos comprimentos de onda operáveis pelo JWST. Substituindo os valores, obtemos que:

$$\theta_M = 0,56''$$

Por fim, a escala de placa do telescópio pode ser calculada por:

$$e = \frac{1}{f} = 1,59''/mm$$

- (e) Primeiramente, perceba que o telescópio conseguirá enxergar a estrela, já que sua magnitude é menor que a limite do JWST. Além disso, para determinar se o telescópio conseguirá distinguir a estrela, basta conferir se a condição de Rayleigh-Jeans é satisfeita, ou seja, se:

$$\theta_R = \frac{1,22\lambda_V}{D} \leq \theta_S = \frac{2R_S}{d_S}$$

Pela equação do módulo de distância:

$$m - M = 5 \log d_S - 5$$

obtemos que:

$$d_S = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$$

Já pela Equação de Pogson,

$$M - M_\odot = -2,5 \log \left( \frac{L}{L_\odot} \right)$$

obtemos que a luminosidade da estrela é dada por:

$$L = L_\odot 10^{\frac{M_\odot - M}{2,5}}$$

e, então:

$$R_S = \sqrt{\frac{L_\odot}{4\pi\sigma T^4}} 10^{\frac{M_\odot - M}{5}}$$

Substituindo os valores numéricos, vemos que

$$\theta_R = 23,23 \text{ mas}$$

e

$$\theta_S = 83,28 \text{ mas}$$

de modo que  $\theta_R \leq \theta_S$ . Com isso, a condição de Rayleigh Jeans é satisfeita e, portanto, o JWST consegue distinguir a estrela. Já para determinar o raio da imagem, pode-se utilizar a escala de placa para obter:

$$r_S = \frac{R_S}{d_S} e$$

ou seja:

$$r_S = \frac{R_S f}{d_S} = 26,25 \text{ } \mu\text{m}$$

Por fim, para calcular a temperatura do CCD na região em que a imagem da estrela é formada, basta equilibrar a energia incidente com a irradiada pela placa. De tal modo, calculando a potência incidente considerando a refletividade  $r$  dos espelhos e a absorvidade  $\epsilon$  do CCD:

$$P_{abs} = \frac{\epsilon L A r^2}{4\pi d_S^2}$$

Já a potência irradiada pode ser calculada por:

$$P_{out} = 4\epsilon\pi r_S^2 \sigma T^4$$

de modo que:

$$\frac{\epsilon L A r^2}{4\pi d_S^2} = \epsilon\pi r_S^2 \sigma T^4$$

Manipulando, obtemos que:

$$T = \left( \frac{L A r^2}{4\sigma\pi^2 r_S^2 d_S^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 317 \text{ K}$$

- (f) Seja  $Q_A$  a energia emitida pela placa  $A$  na direção da placa  $B$  por unidade de tempo, e seja  $Q_B$  a energia emitida pela placa  $B$  na direção da placa  $A$  por unidade de tempo. Sabemos que  $Q_A = \epsilon S \sigma T_A^4$  e  $Q_B = \epsilon S \sigma T_B^4$ . Consideraremos primeiro o que acontece com a energia  $Q_A$ . Após sair da placa  $A$ , uma parte  $1 - \epsilon$  dela é refletida na placa  $B$  e, dessa, uma parte  $1 - \epsilon$  é novamente refletida na placa  $A$  em direção à placa  $B$ . Assim, a cada volta entre as duas placas, a energia incidente na placa  $B$  diminui por  $(1 - \epsilon)^2$ . Dessa, apenas  $\epsilon$  é absorvida. A expressão para a energia total incidente que é absorvida, vindo de  $Q_A$ , é, então:

$$\epsilon Q_A + \epsilon(1 - \epsilon)^2 Q_A + \epsilon(1 - \epsilon)^4 Q_A + \dots = \frac{1}{1 - (1 - \epsilon)^2} \epsilon Q_A$$

Fazendo um raciocínio análogo, concluímos que a fração de  $Q_B$  que é realmente absorvida pela placa  $A$  é dada por

$$\frac{1}{1 - (1 - \epsilon)^2} \epsilon Q_B$$

Como o a potência efetiva da placa  $A$  em direção à placa  $B$  é a subtração dessas duas quantidades:

$$Q_{AB} = \frac{\epsilon(Q_A - Q_B)}{1 - (1 - \epsilon)^2}$$

Substituindo as expressões de  $Q_A$  e  $Q_B$ :

$$Q_{AB} = \frac{\varepsilon S \sigma (T_A^4 - T_B^4)}{2 - \varepsilon}$$

De forma que a constante  $\alpha$  é dada por

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}$$

- (g) Seja  $Q_{ij}$  a potência trocada entre a placa  $i$  e a placa  $j$ , numeradas de acordo com o enunciado. Adotaremos como índice 0 o espaço à esquerda da placa 1 e como índice 7 o espaço à direita do CCD. As equações para os sucessivos  $Q_{ij}$  são tais que

$$Q_{01} = \varepsilon S (F_0 - \sigma T_1^4)$$

$$Q_{12} = \alpha S \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$Q_{23} = \alpha S \sigma (T_2^4 - T_3^4)$$

E assim sucessivamente até chegar no CCD:

$$Q_{56} = \alpha S \sigma (T_5^4 - T_6^4)$$

$$Q_{67} = \varepsilon S \sigma T_6^4$$

Por conservação de energia, todos os  $Q_{ij}$  devem ser iguais. Em particular, podemos fazer todos iguais a  $Q_{67} = \varepsilon S \sigma T_6^4$ . Se somarmos todas as equações acima, obteremos:

$$7\varepsilon S \sigma T_6^4 = (\varepsilon - \alpha) S \sigma (T_6^4 - T_1^4) + \varepsilon S F_0$$

E da primeira equação sozinha,

$$\varepsilon S \sigma T_6^4 = \varepsilon S (F_0 - \sigma T_1^4)$$

Isolando  $T_1^4$ :

$$T_1^4 = \frac{F_0}{\sigma} - T_6^4$$

Substituindo na outra equação:

$$7\varepsilon S \sigma T_6^4 = (\varepsilon - \alpha) S \sigma \left( 2T_6^4 - \frac{F_0}{\sigma} \right) + \varepsilon S F_0$$

Simplificando e resolvendo para  $T_6$ :

$$T_6 = \left[ \frac{\alpha F_0}{\sigma(2\alpha + 5\varepsilon)} \right]^{1/4}$$

Alternativamente, em termos de  $\varepsilon$  apenas,

$$T_6 = \left[ \frac{F_0}{\sigma(12 - 5\varepsilon)} \right]^{1/4}$$

- (h) Substituindo os valores,

$$T_6 \approx 213 \text{ K}$$