OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

PROVA TEÓRICA P3

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

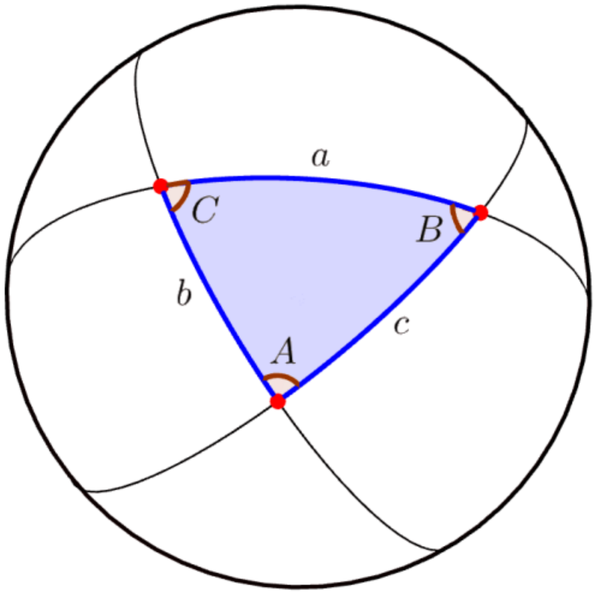
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco"e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2$\cdot$kg^{-2}	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	8,314 N $\cdot$ m $\cdot$ mol^{-1}$\cdot$K^{-1}	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m^{-2}$\cdot$K^{-4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K	
Constante de Hubble (H_0)	67,8 km $\cdot$ s^{-1}$\cdot$Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse (a partir do foco):

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Forma Polar da elipse (a partir do centro):

$$r = a(1 - e \cdot \cos E)$$

- Equação de Kepler :

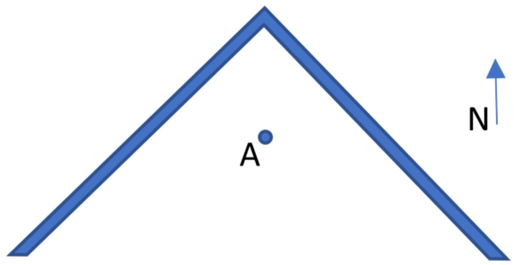
$$M = E - e \cdot \text{sen} E$$

- Se necessário, use que:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

Questões Curtas

1. **Entre Paredes (10 pontos)**
Um observador está localizado na latitude $\phi = 40^\circ$ N, no ponto A. Duas paredes perpendiculares entre si (com altura de 5 metros) estão à sua frente. A figura abaixo mostra a vista do observador a partir do zênite. A distância do observador até cada uma das paredes é de 10 metros. Entre as estrelas que estão sempre visíveis ao observador, qual é a declinação mínima? (a flecha da figura aponta em direção ao norte, ao longo do eixo de simetria das paredes).



2. **Telescópio Kleperiano (10 pontos)**
A objetiva e a ocular de um telescópio são lentes simétricas duplamente convexas feitas de vidro com um índice de refração $n = 1.5$. O telescópio é ajustado ao infinito quando a separação entre a objetiva e a ocular objetiva e a ocular é $L_0 = 16$ cm. Determine a distância L que separa a objetiva e a ocular do telescópio ajustado ao infinito quando há água no espaço entre a objetiva e a ocular ($n_W = 1{,}3$).

3. **Trânsito Diferente (10 pontos)**
Considere um planeta que realiza uma órbita elíptica de semi-eixo maior $a = 4$ UA e excentridade $e = 0.4$ ao redor de uma Super Gigante Vermelha de massa $M_s = 25\ M_\odot$. Observadores na Terra observam diminuições periódicas no fluxo da estrela devido à transitos planetários que duram, em média, $\Delta t = 167$ dias. Sabe-se que os momentos de alinhamento central dos trânsitos ocorrem sempre no apoastro e que ocasionam em uma variação de magnitude $\Delta m = 0.000001$. Com base nisso:

   (a) **(8 pontos)** Encontre o raio R_s da estrela em termos do raio do Sol.

   (b) **(2 pontos)** Encontre o raio r_p do planeta em termos do raio de Júpiter.

4. **Neutrinos Cósmicos (15 pontos)**
Neste problema, vamos calcular a relação entre a temperatura da radiação cósmica de fundo e a temperatura dos neutrinos cósmicos após a aniquilação de elétrons e pósitrons, usando a conservação de entropia.

   Sabemos que quando a temperatura do universo era aproximadamente $10^{10}\,\mathrm{K}$ ($\sim 1\,\mathrm{MeV}$), os neutrinos cósmicos se desacoplaram. Após este evento, na temperatura de $5 \times 10^9\,\mathrm{K}$ ($\sim 0.5\,\mathrm{MeV}$), os pares elétron-pósitron se aniquilaram e após isso, não interagiram mais com outras partículas.

   A aniquilação ocorre conforme a equação:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

   resultando na produção de dois fótons. Esta produção de fótons retarda a taxa de resfriamento da radiação cósmica de fundo.

   A lei de conservação da entropia no universo é dada por:

$$\frac{d(sa^3)}{dt} = 0$$

onde a é o fator de escala e s é a densidade de entropia, que é dada pela soma das densidades de entropia de cada partícula compondo o universo. Assuma a seguinte expressão para a densidade de entropia de um bóson:

$$s_b = \frac{2\pi^2}{45} g_b T_b^3$$

onde T_b é a temperatura da partícula, g_b é o grau de liberdade ou número de espécies da partícula. Para um férmion, a expressão é a mesma exceto por um fator multiplicativo adicional de $7/8$.

Após a aniquilação dos pares elétron-pósitron, **calcule a razão entre a temperatura dos neutrinos cósmicos e a temperatura dos fótons da radiação cósmica de fundo**. Sabemos que os elétrons e pósitrons têm dois estados de spin cada um. Você pode considerar que apenas fótons, elétrons e pósitrons contribuem para a entropia do universo de maneira significativa.

Questões Médias

5. **Parâmetros de Distância (30 pontos)**
A distância de luminosidade d_L é definida em termos da relação entre a magnitude absoluta M e a magnitude aparente m de um objeto astronômico $M = m - 5(\log(d_L) - 1)$, e a distância de ângulo diâmetro d_A é definida em termos do tamanho físico x de um objeto e do tamanho angular θ do objeto visto da Terra: $d_A = \dfrac{x}{\theta}$. A distância radial comóvel d_C é semelhante à distância própria, mas leva em consideração a expansão do universo, resultando em uma distância que não muda no tempo; é igual para a distância própria d_P no momento.

   (a) **(10 pontos)** Mostre que a distância de luminosidade é dada por $d_L = d_C(1+z)$ e que a distância de ângulo diâmetro é dada por $d_A = \dfrac{d_C}{1+z}$.

   (b) **(5 pontos)** A intensidade luminosa de uma fonte distante depende do redshift da forma:

   $$I_z \propto (1+z)^m$$

   Determine o valor do expoente m.

   (c) **(15 pontos)** Em um universo Einstein-de Sitter (plano e composto apenas por matéria não relativística), um objeto de magnitude absoluta $M = 2{,}80$ é medido como tendo redshift $z = 1$ e abrange 102 kly de diâmetro. Determine seu diâmetro angular θ e magnitude aparente m como visto da Terra.

6. **Sinais de Rádio (35 pontos)**
Considere um satélite em órbita heliocêntrica com semi-eixo maior $a = 3$ UA, excentricidade $e = 0.3$ e inclinação orbital em relação ao plano da eclíptica $i = 30°$. Utiliza-se o satélite para pesquisas científicas, de modo que são enviados sinais em frequência de rádio $f_0 = 100$ Hz periodicamente à Terra. Sabendo que no instante inicial ($t = 0$ d) o satélite está em seu periélio e está alinhado com a Terra, estando no nodo ascendente de sua órbita, responda:

   (a) **(10 pontos)** Calcule a anomalia verdadeira θ do satélite passado 50 dias desde o instante inicial de alinhamento.

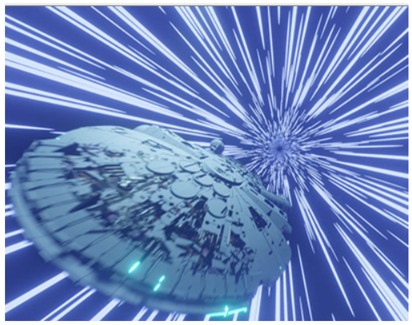
   (b) **(10 pontos)** Calcule as coordenadas eclípticas do satélite (λ_S, b_S) e da Terra $(\lambda_\oplus, b_\oplus)$ passado 50 dias desde o instante inicial de alinhamento e suas respectivas variações temporais: $\left(\dfrac{d\lambda_S}{dt}, \dfrac{db_S}{dt}\right)$ e $\left(\dfrac{d\lambda_\oplus}{dt}, \dfrac{db_\oplus}{dt}\right)$.

   (c) **(5 pontos)** Encontre uma expressão literal para os vetores posição do satélite $\vec{r_S}$ e da Terra $\vec{r_\oplus}$ passado 50 dias desde o instante inicial de alinhamento em função dos parâmetros mencionados no enunciado e no item anterior. Obtenha também a expressão para o vetor da distância $\vec{r}$ entre o satélite e a Terra.

(d) **(10 pontos)** Determine, por fim, a frequência f dos sinais do satélite recebidos pela Terra passado 50 dias desde o alinhamento.

7. Star Wars (35 pontos)

A nave Millennium Falcon, enquanto fugia dos soldados do Império Sith, adentrou uma nuvem esférica de raio R preenchida uniformemente por poeira de densidade ρ. Sabe-se que as partículas de poeira, durante o percurso da nave, sofrem colisões elásticas e, portanto, não são acretadas. Para essa questão, pode-se aproximar a nave para um disco de espessura ϵ, raio r e massa M. Sabe-se que a nave está se movendo com **velocidades relativísticas**, visando fugir o mais rápido possível de seus inimigos, e que sua velocidade inicial é v_0.



(a) **(15 pontos)** Mostre que a magnitude da força de arrasto atuante na nave, no referencial do laboratório, é dada por:

$$F = \frac{8\gamma^2 \rho r \epsilon v^2}{3}$$

em que γ é o fator de Lorentz da nave.

(b) **(20 pontos)** Calcule o tempo total t_0 que a nave permanece na nuvem de poeira, no referencial do laboratório.

Dado: Se necessário, use que:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x + C$$

8. Abóbolua (35 pontos)

A malvada bruxa Paula Henrica lançou um feitiço na noite de Halloween que transformou a Terra em um disco plano de densidade superficial de massa σ_0 e raio R. Brabinela, que inicialmente estava dormindo, acorda exatamente no centro do disco. Assustada, ela corre desesperadamente para frente e acaba sendo presa, devido a sua ação precipitada, em pequenas oscilações radiais em torno de uma posição de equilíbrio $r_0 << R$. Sabendo que a Terra mantém seu movimento de rotação em torno de um eixo perpendicular a sua superfície e que passa pelo seu centro, porém com duração sincronizada ao do período de oscilação de Brabinela, responda:

(a) **(15 pontos)** Mostre que o módulo do campo gravitacional atuante em Brabinela, quando a uma distância $r = \eta R$ do centro do disco, pode ser calculada pela expressão:

$$g = 2G\sigma_0 \int_0^\pi \ln\left(\frac{\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}+\eta\cos\theta}{\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}-\eta\cos\theta}\right)\cos\theta d\theta$$

(b) **(5 pontos)** Mostre que para pequenas oscilações, ou seja $\eta \to 0$, o módulo do campo atuante em Brabinela se reduz para:

$$g = \frac{\pi G\sigma_0 r}{R}$$

e encontre a equação de movimento e o período de oscilações radiais de Brabinela no referencial girante.

(c) **(10 pontos)** Devido a rotação terrestre, em um referencial externo, Brabinela estará se movimentando tanto radialmente quanto longitudinalmente. Sabendo disso, mostre que a trajetória de Brabinela, em relação a um referencial externo, é uma elipse de curva:

$$r(\theta) = \frac{A}{1 + B\cos\theta}$$

e encontre os valores das constantes A e B.

(d) **(5 pontos)** Por fim, no referencial de Brabinela, a Lua movimenta-se rapidamente no céu, de modo que seu movimento resulta na imagem aparente de uma abóbora (elipsoide). Encontre o ângulo sólido total Ω ocupado pela apavorante Abóbolua no céu. Considere que a distância da Lua a Terra permaneça inalterada e igual a $d_{TL} >> R$, que a Lua se localiza no eixo de rotação da Terra, e que seu raio é $R_L >> r_0$.

Questões Longas

9. Separação de Massa (60 pontos)

A **separação de massa em aglomerados estelares** é um fenômeno que ocorre em aglomerados estelares quando, após muito tempo, as estrelas mais massivas se separam significativamente das mais leves. Isso significa que, em média, as estrelas mais massivas são encontradas mais próximas ao centro do aglomerado, enquanto as mais leves são encontradas em maiores distâncias e algumas até escapam do aglomerado.

Para simplificar o problema, assumimos inicialmente que as estrelas do aglomerado são semelhantes em termos de massa e velocidade, e definimos a massa total do aglomerado M, a massa de uma estrela m, o raio do aglomerado R, a velocidade de uma estrela no aglomerado v, e o número de estrelas no aglomerado N.

(a) **(10 pontos)** Usando o teorema do virial, obtenha a velocidade quadrática média de uma estrela no aglomerado em função dos parâmetros do aglomerado. Suponha que a densidade estelar no aglomerado seja uniforme.

(b) **(10 pontos)** Derive o raio efetivo de colisão, r_{eff}, que é a distância em que duas estrelas, em média, colidem. Suponha que a energia potencial de uma estrela a uma distância r_{eff} de outra seja igual à energia cinética de cada estrela. Para os cálculos, assuma duas estrelas idênticas de massa média. Deixe sua resposta em termos de R e N.

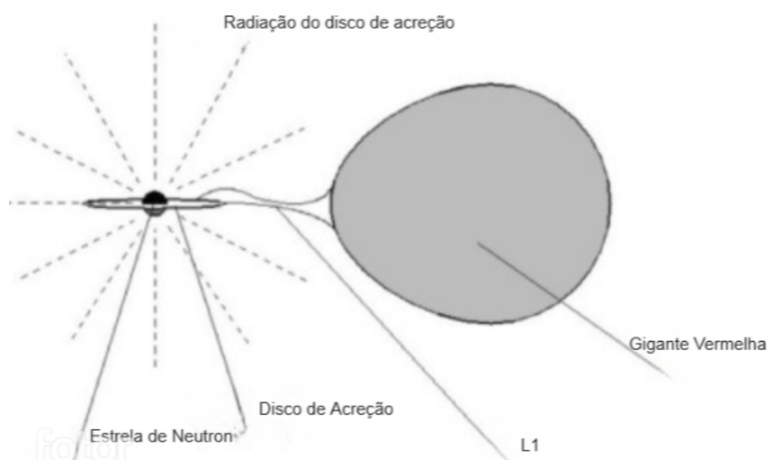
(c) **(10 pontos)** Calcule o tempo de relaxação de uma estrela, t_{relax}, que é o tempo máximo que uma estrela pode se mover livremente no aglomerado sem colidir com outra estrela. Expresse este tempo apenas em termos de N, R, e v.

(d) **(20 pontos)** Até agora consideramos que todas as estrelas possuem a mesma massa. De agora em diante, a i-ésima estrela possuirá massa m_i e velocidade v_i. Considere uma colisão entre uma estrela massiva de massa m_A e uma estrela leve de massa m_B, com $m_A \gg m_B$. Calcule a razão entre os tempos de relaxação da estrela leve e da estrela massiva após a colisão.

(e) **(10 pontos)** Como você explicaria a separação de massa se muito tempo tivesse passado desde a formação do aglomerado ($t \gg t_{relax}$)?

10. Acreção (60 pontos)

Considere sistemas binários em que uma das estrelas é uma gigante vermelha e a outra é uma estrela de nêutrons. A estrela de nêutrons atrai matéria da gigante vermelha, formando um disco de acreção. Parte dessa matéria pode passar pelo ponto de Lagrange L_1 e formar um jato de acreção ao redor da estrela de nêutrons, como mostrado na figura abaixo.



A gigante vermelha é definida como tendo massa igual ao do Sol e a estrela de nêutrons com massa igual a 1.4 $M_\odot$ e raio de 10 km. O disco de acreção resultante tem um raio de r_{max} medido do centro de massa da estrela de nêutrons. Finalmente, r_{min} é o raio da superfície da estrela de nêutrons. A taxa de acreção $\dot{m}$ é constante e dada por $\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

(a) **(5 pontos)** Se uma massa m se move com um raio r em uma órbita circular em um disco de acreção de massa, mostre que a energia potencial gravitacional da massa é dada por $E = -\frac{GMm}{2r}$.

(b) **(10 pontos)** Prove que quando o raio orbital da massa muda de uma quantidade $\Delta r << r$, esse raio brilhará com luminosidade $L_{\text{ring}} = \frac{GM\dot{m}}{2r^2}\Delta r$.

(c) **(8 pontos)** Suponha que a energia de acreção seja dissipada como radiação térmica com temperatura T. Prove que a luminosidade total acima e abaixo do anel fino de espessura Δr no raio r é obtida como $L_{ring} = 4\pi r \sigma T^4 \Delta r$.

(d) **(6 pontos)** Determine a temperatura da superfície na parte mais interna do disco de acreção, quando a taxa de acreção é de 1.2×10^{13} kg/s.

(e) **(5 pontos)** Calcule o comprimento da onda eletromagnética irradiada na parte mais interna do disco de acreção.

(f) **(5 pontos)** Derive a relação entre a luminosidade L do jato de acreção em termos da taxa de acreção $\dot{m}$, da velocidade da luz c e da eficiência de acreção η.

(g) **(7 pontos)** A potência luminosa total de todo o disco de acreção de massa pode ser estimada a partir da equação:

$$L = \frac{GM\dot{m}}{2}\left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}}\right)$$

Sabendo disso, encontre a eficiência de acreção η_{acc} quando a massa é transferida para o raio de uma estrela de nêutrons, neste caso, considerando $r_{max} >> r_{min}$.

(h) **(12 pontos)** Determine a eficiência de combustão das reações nucleares (eficiência de queima nuclear) η_{nuc}. Compare-a com a eficiência de acreção η_{acc} encontrada anteriormente.

(i) **(2 pontos)** Qual processo é mais eficiente na liberação de energia? Reações de fusão nuclear no Sol ou liberação de energia através do mecanismo de acreção?