



PROVA TEÓRICA P3  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024

---

## Instruções Gerais

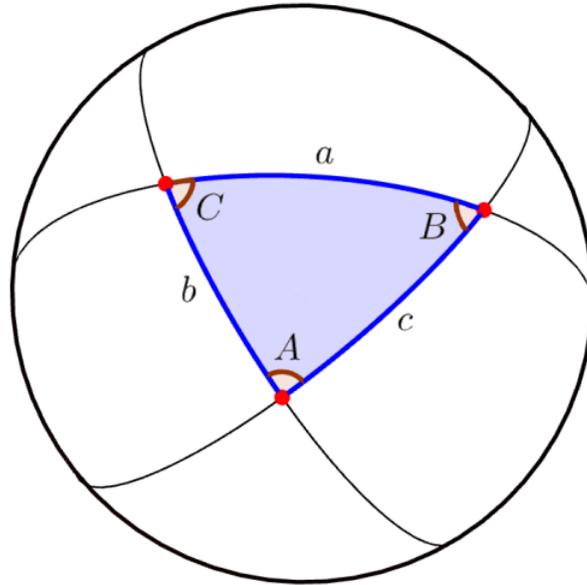
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse (a partir do foco):

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Forma Polar da elipse (a partir do centro):

$$r = a(1 - e \cdot \cos E)$$

- Equação de Kepler :

$$M = E - e \cdot \text{sen}E$$

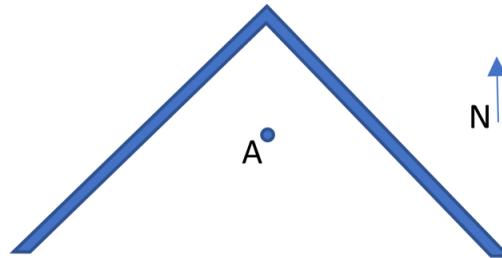
- Se necessário, use que:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

## Questões Curtas

### 1. Entre Paredes (10 pontos)

Um observador está localizado na latitude  $\phi = 40^\circ \text{N}$ , no ponto A. Duas paredes perpendiculares entre si (com altura de 5 metros) estão à sua frente. A figura abaixo mostra a vista do observador a partir do zênite. A distância do observador até cada uma das paredes é de 10 metros. Entre as estrelas que estão sempre visíveis ao observador, qual é a declinação mínima? (a flecha da figura aponta em direção ao norte, ao longo do eixo de simetria das paredes).



**Solução:** Seja  $P$  o ponto mais alto de intersecção das duas paredes e  $Q$  o ponto superior mais próximo do observador. Por geometria, as distâncias zenitais desses pontos são

$$z_P = \tan^{-1} \left( \frac{10\sqrt{2}}{5} \right) \approx 70,53^\circ$$

$$z_Q = \tan^{-1} \left( \frac{10}{5} \right) \approx 63,43^\circ$$

Ainda, a diferença de azimute entre  $Q$  e  $P$  é  $\Delta A = 45^\circ$ . A borda superior da parede, projetada na esfera celeste, forma um arco de círculo máximo. Pela lei dos 4 elementos, o ângulo  $\beta = \angle QPZ$  é tal que

$$\cot \beta \sin \Delta A + \cos \Delta A \cos z_P = \cot z_Q \sin z_P$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \Delta A}{\cot z_Q \sin z_P - \cos \Delta A \cos z_P} \right) \approx 51,57^\circ$$

A distância  $\overline{\delta_P}$  do ponto  $P$  ao polo celeste norte é

$$\overline{\delta_P} = z_P + \phi - 90^\circ \approx 20,53^\circ$$

O complemento da declinação da estrela pedida no enunciado corresponde à distância entre o polo celeste norte e o arco de círculo máximo formado pela borda superior da parede. Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \overline{\delta_P}} = \frac{\sin \beta}{\sin (90^\circ - \delta_{min})}$$

$$\delta_{min} = \cos^{-1} (\sin \beta \sin \overline{\delta_P}) \approx 70,57^\circ$$

### 2. Telescópio Kleperiano (10 pontos)

A objetiva e a ocular de um telescópio são lentes simétricas duplamente convexas feitas de vidro com um índice de refração  $n = 1.5$ . O telescópio é ajustado ao infinito quando a separação entre a objetiva e

a ocular é  $L_0 = 16$  cm. Determine a distância  $L$  que separa a objetiva e a ocular do telescópio ajustado ao infinito quando há água no espaço entre a objetiva e a ocular ( $n_W = 1,3$ ).

**Solução:** Seja  $f_{ob}$  o comprimento focal da objetiva e  $f_{oc}$  o comprimento focal da ocular, sabemos que a distância inicial é dada por:

$$L_0 = f_{ob} + f_{oc}$$

Após a adição de água no tubo do telescópio, teremos que, pela Equação do Dioptra Esférico, o foco efetivo  $f_{ef}$  da objetiva poderá ser calculado por:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{n}{p_1} = \frac{n-1}{R_{ob}}$$

$$\frac{n}{-p_1} + \frac{n_W}{f_{ef}} = \frac{n_W - n}{-R_{ob}}$$

Logo:

$$\frac{n_W}{f_{ef}} = \frac{n-1}{R_{ob}} + \frac{n_W - n}{-R_{ob}}$$

ou seja:

$$f_{ef} = \frac{n_W R_{ob}}{2n - n_W - 1}$$

Sabemos, contudo, pela Equação dos Fabricantes de Lentes, que:

$$R_{ob} = 2(n-1)f_{ob}$$

então:

$$f_{ef} = \frac{2n_W(n-1)f_{ob}}{2n - n_W - 1}$$

Analogamente, o foco efetivo da ocular  $f'_{ef}$  é dado por:

$$f'_{ef} = \frac{2n_W(n-1)f_{oc}}{2n - n_W - 1}$$

Assim, temos que:

$$L = f_{ef} + f'_{ef}$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos que:

$$\boxed{L = 30 \text{ cm}}$$

### 3. Trânsito Diferente (10 pontos)

Considere um planeta que realiza uma órbita elíptica de semi-eixo maior  $a = 4$  UA e excentricidade  $e = 0.4$  ao redor de uma Super Gigante Vermelha de massa  $M_s = 25 M_\odot$ . Observadores na Terra observam diminuições periódicas no fluxo da estrela devido à transitos planetários que duram, em média,  $\Delta t = 167$  dias. Sabe-se que os momentos de alinhamento central dos trânsitos ocorrem sempre no apoastro e que ocasionam em uma variação de magnitude  $\Delta m = 0.000001$ . Com base nisso:

- (8 pontos) Encontre o raio  $R_s$  da estrela em termos do raio do Sol.
- (2 pontos) Encontre o raio  $r_p$  do planeta em termos do raio de Júpiter.

**Solução:**

- (a) Este item pode ser resolvido por simples geometria. Primeiramente, imagine um sistema de coordenadas cartesianas com um eixo  $x$  no semieixo maior e um eixo  $y$  paralelo ao semieixo menor, com origem no foco que contém a estrela. Uma vez que o observador está vendo o trânsito na direção do apoastro, a coordenada  $y$  do planeta no início do trânsito corresponde ao raio  $R_s$  da estrela. Podemos achar essa coordenada usando a famosa Equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Em que  $M = \omega t = \frac{2\pi t}{P}$  se trata da anomalia média e  $E$  é o que chamamos de anomalia verdadeira.  $t$  é o tempo que se passou desde a última passagem do planeta pelo periastro. Devido à segunda Lei de Kepler e a simetria da elipse, sabemos que:

$$P = 2t + \Delta t \Rightarrow t = \frac{P - \Delta t}{2}$$

A partir da Terceira Lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} a^3$$

$$P = 584 \text{ dias}$$

Logo:

$$t = 125 \text{ dias} \Rightarrow M = 1,3449 \text{ rad}$$

Iterando, encontramos que  $E = 1,7392 \text{ rad}$ . Da geometria, sabe-se que  $y = b \sin E = a \sin E \sqrt{1 - e^2}$ . Com essa informação, finalmente:

$$R_s = 776 R_{\text{sol}}$$

- (b) É uma aproximação pertinente dizer que o fluxo observado da estrela é proporcional a sua área que é observada. Dito isso:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{R_s^2 - r_p^2}{R_s^2} = 1 - \frac{r_p^2}{R_s^2}$$

Uma vez que temos a variação total de magnitude, veja que, pela Equação de Pogson:

$$\Delta m = -2,5 \log \left( \frac{F}{F_0} \right)$$

O que nos leva a, finalmente:

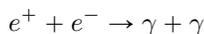
$$r_p = 7,42 R_{\text{jup}}$$

**4. Neutrinos Cósmicos (15 pontos)**

Neste problema, vamos calcular a relação entre a temperatura da radiação cósmica de fundo e a temperatura dos neutrinos cósmicos após a aniquilação de elétrons e pósitrons, usando a conservação de entropia.

Sabemos que quando a temperatura do universo era aproximadamente  $10^{10}$  K ( $\sim 1$  MeV), os neutrinos cósmicos se desacoplaram. Após este evento, na temperatura de  $5 \times 10^9$  K ( $\sim 0.5$  MeV), os pares elétron-pósitron se aniquilaram e após isso, não interagiram mais com outras partículas.

A aniquilação ocorre conforme a equação:



resultando na produção de dois fótons. Esta produção de fótons retarda a taxa de resfriamento da radiação cósmica de fundo.

A lei de conservação da entropia no universo é dada por:

$$\frac{d(sa^3)}{dt} = 0$$

onde  $a$  é o fator de escala e  $s$  é a densidade de entropia, que é dada pela soma das densidades de entropia de cada partícula compondo o universo. Assuma a seguinte expressão para a densidade de entropia de um bóson:

$$s_b = \frac{2\pi^2}{45} g_b T_b^3$$

onde  $T_b$  é a temperatura da partícula,  $g_b$  é o grau de liberdade ou número de espécies da partícula. Para um férmion, a expressão é a mesma exceto por um fator multiplicativo adicional de  $7/8$ .

Após a aniquilação dos pares elétron-pósitron, **calcule a razão entre a temperatura dos neutrinos cósmicos e a temperatura dos fótons da radiação cósmica de fundo**. Sabemos que os elétrons e pósitrons têm dois estados de spin cada um. Você pode considerar que apenas fótons, elétrons e pósitrons contribuem para a entropia do universo de maneira significativa.

**Solução:** Inicialmente, há uma alta temperatura e um equilíbrio térmico entre fótons e neutrinos. Quando a temperatura diminui, os elétrons e pósitrons se aniquilam formando fótons, o que afeta a temperatura dos fótons mas não a dos neutrinos, pois elas já estão desacopladas. A densidade de entropia do universo deve permanecer a mesma antes e depois da aniquilação dos elétrons e pósitrons. Antes da aniquilação, ela possui contribuições de fótons, elétrons e pósitrons. Após a aniquilação, ela inclui apenas contribuições de fótons. Para os fótons, temos  $g_\gamma = 2$ , pois possuem dois estados de polarização. Para o elétron e o pósitron,  $g_e^- = g_{e^+} = 2$ , pois possuem dois estados de spin. Como fótons são bósons e elétrons/pósitrons são férmions, a densidade de entropia antes da aniquilação é

$$s_0 = \left( 2 + \frac{7}{8} \cdot 4 \right) \cdot \frac{2\pi^2}{45} T^3 = \frac{11}{2} \cdot \frac{2\pi^2}{45} T_{\gamma,0}^3$$

Após a aniquilação, apenas os fótons contribuem:

$$s_f = 2 \cdot \frac{2\pi^2}{45} T_{\gamma,f}^3$$

Como o fator de escala não muda significativamente durante a aniquilação, podemos igualar as duas:

$$\frac{11}{2} T_{\gamma,0}^3 = 2 T_{\gamma,f}^3$$

$$\frac{T_{\gamma,f}}{T_{\gamma,0}} = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3}$$

Como os neutrinos se desacoplam antes da aniquilação, sua temperatura escala com a expansão do universo:

$$T \propto \frac{1}{a}$$

Como a conservação de entropia afeta somente a temperatura dos fótons, a temperatura dos neutrinos depois da aniquilação permanece relacionada com a temperatura antes da aniquilação através de:

$$T_{\nu,f} = T_{\gamma,0}$$

Assim, a razão entre  $T_{\nu,f}$  e  $T_{\gamma,f}$  é

$$\frac{T_{\nu,f}}{T_{\gamma,f}} = \frac{T_{\gamma,f}}{T_{\gamma,0}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{\frac{T_{\nu,f}}{T_{\gamma,f}} \approx 0,714}$$

## Questões Médias

### 5. Parâmetros de Distância (30 pontos)

A distância de luminosidade  $d_L$  é definida em termos da relação entre a magnitude absoluta  $M$  e a magnitude aparente  $m$  de um objeto astronômico  $M = m - 5(\log(d_L) - 1)$ , e a distância de ângulo diâmetro  $d_A$  é definida em termos do tamanho físico  $x$  de um objeto e do tamanho angular  $\theta$  do objeto visto da Terra:  $d_A = \frac{x}{\theta}$ . A distância radial comóvel  $d_C$  é semelhante à distância própria, mas leva em consideração a expansão do universo, resultando em uma distância que não muda no tempo; é igual para a distância própria  $d_P$  no momento.

- (a) **(10 pontos)** Mostre que a distância de luminosidade é dada por  $d_L = d_C(1+z)$  e que a distância de ângulo diâmetro é dada por  $d_A = \frac{d_C}{1+z}$ .
- (b) **(5 pontos)** A intensidade luminosa de uma fonte distante depende do redshift da forma:

$$I_z \propto (1+z)^m$$

Determine o valor do expoente  $m$ .

- (c) **(15 pontos)** Em um universo Einstein-de Sitter (plano e composto apenas por matéria não relativística), um objeto de magnitude absoluta  $M = 2,80$  é medido como tendo redshift  $z = 1$  e abrange 102 kly de diâmetro. Determine seu diâmetro angular  $\theta$  e magnitude aparente  $m$  como visto da Terra.

### Solução:

- (a) O fluxo de um objeto muda por um fator de  $\frac{1}{(1+z)^2}$  a medida que o universo expande.

O primeiro fator de  $\frac{1}{1+z}$  acontece porque o comprimento de onda dos fótons aumenta por um fator de  $1+z$ , resultando no decrescimento da energia de cada fóton por esse fator.

O segundo fator de  $\frac{1}{1+z}$  vem do fato de que o intervalo de detecção desses fótons é  $(1+z)$  vezes maior do que o intervalo entre duas sucessivas emissões de fótons. Daí:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi d_C^2 (1+z)^2} \Rightarrow d_L = d_C(1+z)$$

A distância do diâmetro angular é  $d_A = \frac{d}{\delta\theta}$  onde  $D$  é o diâmetro do objeto e  $\delta\theta = \frac{D}{d_c a(t)}$ .  
Perceba que o  $D$  é medido no momento da emissão do fóton  $t_1$ :

$$d_A = d_c a(t_1) = \frac{d_c}{1+z}$$

(b) É meio intuitivo que:

$$SB \propto \frac{f}{\delta\theta^2} \propto \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{(1+z)^2}$$

$$m = -4$$

(c) Perceba que:

$$d_c = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) = 2 \left( \frac{299792458 \text{ ms}^{-1}}{\frac{67,80 \text{ kms}^{-1}}{\text{Mpc}}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 7,993 \cdot 10^{25} \text{ m}$$

$$d_A = \frac{d_c}{1+z} = 3,997 \cdot 10^{25} \text{ m}$$

$$\theta = \frac{102.000 \text{ anos} - \text{luz}}{3,997 \cdot 10^{25} \text{ m}} = \frac{9,461 \cdot 10^{20}}{3,997 \cdot 10^{25}} = 2,41 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

e

$$m = 46,37$$

## 6. Sinais de Rádio (35 pontos)

Considere um satélite em órbita heliocêntrica com semi-eixo maior  $a = 3 \text{ UA}$ , excentricidade  $e = 0.3$  e inclinação orbital em relação ao plano da eclíptica  $i = 30^\circ$ . Utiliza-se o satélite para pesquisas científicas, de modo que são enviados sinais em frequência de rádio  $f_0 = 100 \text{ Hz}$  periodicamente à Terra. Sabendo que no instante inicial ( $t = 0 \text{ d}$ ) o satélite está em seu periélio e está alinhado com a Terra, estando no nodo ascendente de sua órbita, responda:

- (10 pontos) Calcule a anomalia verdadeira  $\theta$  do satélite passado 50 dias desde o instante inicial de alinhamento.
- (10 pontos) Calcule as coordenadas eclípticas do satélite  $(\lambda_S, b_S)$  e da Terra  $(\lambda_\oplus, b_\oplus)$  passado 50 dias desde o instante inicial de alinhamento e suas respectivas variações temporais:  $\left(\frac{d\lambda_S}{dt}, \frac{db_S}{dt}\right)$  e  $\left(\frac{d\lambda_\oplus}{dt}, \frac{db_\oplus}{dt}\right)$ .
- (5 pontos) Encontre uma expressão literal para os vetores posição do satélite  $\vec{r}_S$  e da Terra  $\vec{r}_\oplus$  passado 50 dias desde o instante inicial de alinhamento em função dos parâmetros mencionados no enunciado e no item anterior. Obtenha também a expressão para o vetor da distância  $\vec{r}$  entre o satélite e a Terra.
- (10 pontos) Determine, por fim, a frequência  $f$  dos sinais do satélite recebidos pela Terra passado 50 dias desde o alinhamento.

**Solução:**

- (a) Para resolução desse item, devemos primeiramente calcular a anomalia excêntrica do satélite passados 50 dias desde o instante inicial. Para isso, acompanhe:

$$M = E - e \sin E$$

substituindo o valor de  $M$ :

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t = E - e \sin E$$

substituindo os valores numéricos e iterando, encontramos o valor de  $E$ . Portanto, conseguimos calcular a anomalia verdadeira  $\theta$  pela seguinte relação:

$$a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

ou seja:

$$\theta = \arccos\left(\frac{1 - e^2}{e(1 - e \cos E)} - \frac{1}{e}\right)$$

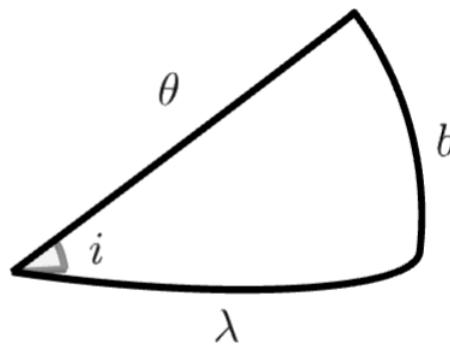
- (b) As coordenadas eclípticas da Terra podem ser calculadas por:

$$\lambda_{\oplus} = \omega_{\oplus}t$$

e

$$b_{\oplus} = 0$$

Já as do satélite, devem ser calculadas por trigonometria esférica. Acompanhe a figura:



Temos:

$$\lambda_S = \arctan(\tan \theta \cos i)$$

e

$$b_S = \arcsin(\sin \theta \sin i)$$

e suas variações temporais podem ser calculadas por:

$$\frac{d\lambda_{\oplus}}{dt} = \omega_{\oplus}$$

$$\frac{db_{\oplus}}{dt} = 0$$

e

$$\frac{d\lambda_S}{dt} = \frac{\sec^2 \theta \cos i}{1 + (\tan \theta \cos i)^2} \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{r^2}$$

$$\frac{db_S}{dt} = \frac{\cos \theta \sin i}{\sqrt{1 - (\sin \theta \sin i)^2}} \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{r^2}$$

(c) Nesse caso, teremos que:

$$\vec{r}_{\oplus} = r_{\oplus} \cos(\omega_{\oplus} t) \hat{x} + r_{\oplus} \sin(\omega_{\oplus} t) \hat{y}$$

e

$$\vec{r}_S = r_S \cos \lambda \cos b \hat{x} + r_S \sin \lambda \cos b \hat{y} + r_S \sin b \hat{z}$$

então

$$\vec{r} = r_S \cos \lambda \cos b - r_{\oplus} \cos(\omega_{\oplus} t) \hat{x} + r_S \sin \lambda \cos b - r_{\oplus} \sin(\omega_{\oplus} t) \hat{y} + r_S \sin b \hat{z}$$

(d) Calculando o módulo de  $\vec{r}$ , obtemos que:

$$r = \sqrt{r_{\oplus}^2 + r_S^2 - 2r_{\oplus}r_S \cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}$$

Então, para obter a velocidade radial do satélite, basta derivar a expressão acima, tal que:

$$v_r = \dot{r} = \frac{r_S \dot{r}_S + r_{\oplus} r_S \sin b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t) \dot{\lambda} + r_{\oplus} r_S \cos b \sin(\lambda - \omega_{\oplus} t) (\dot{\lambda} - \omega_{\oplus})}{\sqrt{r_{\oplus}^2 + r_S^2 - 2r_{\oplus}r_S \cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}}$$

em que  $r_S$  pode ser calculado por:

$$r_S = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} e \sin \theta$$

então, por fim:

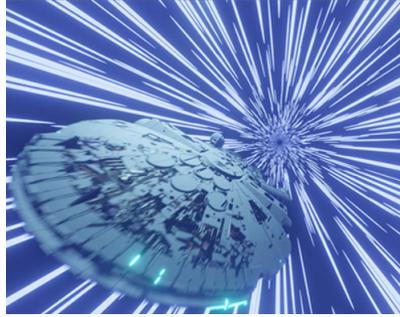
$$\frac{f_0}{f} - 1 = \frac{v_r}{c}$$

logo:

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v_r}{c}}$$

### 7. Star Wars (35 pontos)

A nave Millennium Falcon, enquanto fugia dos soldados do Império Sith, adentrou uma nuvem esférica de raio  $R$  preenchida uniformemente por poeira de densidade  $\rho$ . Sabe-se que as partículas de poeira, durante o percurso da nave, sofrem colisões elásticas e, portanto, não são acretadas. Para essa questão, pode-se aproximar a nave para um disco de espessura  $\epsilon$ , raio  $r$  e massa  $M$ . Sabe-se que a nave está se movendo com **velocidades relativísticas**, visando fugir o mais rápido possível de seus inimigos, e que sua velocidade inicial é  $v_0$ .



- (a) **(15 pontos)** Mostre que a magnitude da força de arrasto atuante na nave, no referencial do laboratório, é dada por:

$$F = \frac{8\gamma^2 \rho r \epsilon v^2}{3}$$

em que  $\gamma$  é o fator de Lorentz da nave.

- (b) **(20 pontos)** Calcule o tempo total  $t_0$  que a nave permanece na nuvem de poeira, no referencial do laboratório.

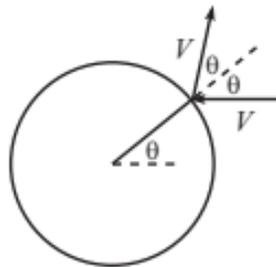
**Dado:** Se necessário, use que:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + C$$

**Solução:**

- (a) Para calcular a força de arrasto resultante, devemos considerar as colisões das partículas de poeira na nave. Para o que segue, considere o seguinte esquema, supostas elásticas, no referencial da nave:



A variação de momento na horizontal pode ser calculada pela expressão:

$$dp' = \gamma \rho' v (1 + \cos 2\theta) dV'$$

em que  $dV'$  é o volume percorrido pelas partículas de poeira até colidirem com o cilindro. Perceba que, no referencial do laboratório,  $\gamma \rho = \rho'$ . Assim, usando que  $dV = v r d\theta \cos \theta \epsilon dt'$ , obtemos:

$$F'_x = \frac{\Delta p'}{\Delta t'} = \gamma^2 \rho v^2 \epsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \cos \theta d\theta$$

Perceba que, pela transformação de forças na relatividade:

$$F_x = F'_x$$

Assim:

$$F_x = \gamma^2 \rho v^2 \epsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \cos \theta d\theta$$

ou seja:

$$F = \frac{8\gamma^2 \rho \epsilon v^2}{3}$$

- (b) Para resolver esse item, precisaremos utilizar a Segunda Lei de Newton relativística para a nave. Ou seja:

$$\gamma^3 M \frac{dv}{dt} = -\frac{8\gamma^2 \rho \epsilon v^2}{3}$$

assim:

$$\gamma \frac{dv}{dt} = -\frac{8\rho \epsilon v^2}{3M}$$

substituindo o valor de  $\gamma$ , usando que  $c = 1$ , e manipulando:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{1-v^2}} = -\frac{8\rho \epsilon r}{3M} \int_0^t dt$$

Pelos dados do enunciado, obtemos então que:

$$\frac{\sqrt{1-v^2}}{v} - \frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_0} = \frac{8\rho \epsilon r}{3M} t$$

manipulando e usando que  $v = \frac{dx}{dt}$ , obtemos que:

$$\int_0^{2R} dx = \int_0^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{1 + \left( \frac{3M\sqrt{1-v_0^2} + 8\rho \epsilon r v_0 t}{3Mv_0} \right)^2}}$$

Utilizando as integrais dadas:

$$2R = \frac{3M}{8\rho \epsilon r} \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{3M\sqrt{1-v_0^2} + 8\rho \epsilon r v_0 t_0}{3Mv_0} \right) - \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_0} \right) \right)$$

logo:

$$t_0 = \frac{3M}{8\rho \epsilon r c} \sinh \left( \frac{16R\rho \epsilon r}{3M} + \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{\frac{v_0}{c}} \right) \right) - \frac{3M\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{8\rho \epsilon r v_0}$$

Repare que colocamos  $c$  apenas para ajustar as unidades.

### 8. Abóbola (35 pontos)

A malvada bruxa Paula Henrica lançou um feitiço na noite de Halloween que transformou a Terra em um disco plano de densidade superficial de massa  $\sigma_0$  e raio  $R$ . Brabinela, que inicialmente estava dormindo, acorda exatamente no centro do disco. Assustada, ela corre desesperadamente para frente e acaba sendo

presa, devido a sua ação precipitada, em pequenas oscilações radiais de amplitude  $r_0 \ll R$ . Sabendo que a Terra mantém seu movimento de rotação em torno de um eixo perpendicular a sua superfície e que passa pelo seu centro, porém com duração sincronizada ao do período de oscilação de Brabinela, responda:



- (a) **(15 pontos)** Mostre que o módulo do campo gravitacional radial atuante em Brabinela, quando a uma distância  $r = \eta R$  do centro do disco, pode ser calculada pela expressão:

$$g = 2G\sigma_0 \int_0^\pi \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta} + \eta \cos \theta}{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta} - \eta \cos \theta} \right) \cos \theta d\theta$$

- (b) **(5 pontos)** Mostre que para pequenas oscilações, ou seja  $\eta \rightarrow 0$ , o módulo do campo radial atuante em Brabinela se reduz para:

$$g = \frac{\pi G \sigma_0 r}{R}$$

e encontre a equação de movimento e o período de oscilações radiais de Brabinela no referencial girante.

- (c) **(10 pontos)** Devido a rotação terrestre, em um referencial externo, Brabinela estará se movimentando tanto radialmente quanto longitudinalmente. Sabendo disso, mostre que a trajetória de Brabinela, em relação a um referencial externo, é uma elipse de curva:

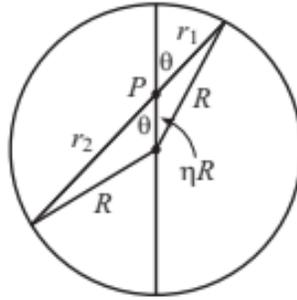
$$r(\theta) = \frac{A}{1 + B \cos \theta}$$

e encontre os valores das constantes  $A$  e  $B$ .

- (d) **(5 pontos)** Por fim, no referencial de Brabinela, a Lua movimenta-se rapidamente no céu, de modo que seu movimento resulta na imagem aparente de uma abóbora (elipsoide). Encontre o ângulo sólido total  $\Omega$  ocupado pela apavorante Abóbolua no céu. Considere que a distância da Lua a Terra permaneça inalterada e igual a  $d_{TL} \gg R$ , que a Lua se localiza no eixo de rotação da Terra, e que seu raio é  $R_L \gg r_0$ .

**Solução:**

- (a) Para resolver essa questão, acompanhe a seguinte figura:



Uma pequena área dentro de uma cunha na figura acima tem uma massa  $\sigma r dr d\theta$ . Então, no ponto dado  $P$ , a magnitude do campo devido a esta pequena área é  $\sigma(r dr d\theta)/4\pi\epsilon_0 r^2 = \sigma dr d\theta/4\pi\epsilon_0 r$ . Mas apenas o componente vertical (no plano da página) sobrevive, o que traz um fator de  $\cos \theta$ , resultando em  $\sigma \cos \theta dr d\theta/4\pi\epsilon_0 r$ . Se integrarmos isso de  $r = 0$  até um dos  $r_1$  ou  $r_2$  na figura acima obtemos um resultado infinito. No entanto, a divergência de uma cunha cancela a divergência da outra, porque o campo devido ao segmento curto da cunha cancela o campo devido à parte da longa cunha até uma distância  $r_1$ . A parte não cancelada da longa cunha vem dos valores de  $r$  variando de  $r_1$  até o final em  $r_2$ . A componente vertical resultante do campo das duas cunhas opostas na figura acima é, portanto,

$$g = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G\sigma \cos \theta dr d\theta}{r} = G\sigma \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \cos \theta d\theta.$$

Agora devemos integrar este resultado ao longo de  $\theta$ . Podemos integrar de  $0$  a  $\pi/2$  e depois dobrar o resultado; isso cobrirá todo o disco. A tarefa agora é encontrar  $r_1$  e  $r_2$  em termos de  $\theta$ . Podemos encontrar  $r_2$  usando a lei dos cossenos no triângulo envolvendo  $r_2$  na figura anterior. Isso dá  $R^2 = (\eta R)^2 + r_2^2 - 2(\eta R)r_2 \cos \theta$ . Resolvendo esta equação quadrática para  $r_2$  e escolhendo a raiz positiva, temos

$$r_2 = R \left( \sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta + \eta \cos \theta} \right).$$

O processo envolvendo  $r_1$  (com o triângulo contendo o ângulo  $\pi - \theta$ ) é o mesmo, exceto pela substituição de  $\cos \theta$  com  $-\cos \theta$ . Então, integramos o resultado na equação anterior de  $0$  a  $\pi/2$  e obtemos

$$g = 2G\sigma \int_0^{\pi/2} \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta + \eta \cos \theta}}{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta - \eta \cos \theta}} \right) \cos \theta d\theta.$$

- (b) Vamos agora olhar para pequenos valores de  $\eta$ . Podemos ignorar termos de ordem  $\eta^2$ , então o termo logarítmico na equação acima torna-se

$$\ln \left( \frac{1 + \eta \cos \theta}{1 - \eta \cos \theta} \right) = \ln \left( \frac{(1 + \eta \cos \theta)^2}{1 - \eta^2 \cos^2 \theta} \right) \approx \ln (1 + 2\eta \cos \theta) \approx 2\eta \cos \theta,$$

onde usamos  $\ln(1 + z) \approx z$ . Substituindo isso na equação anterior dá

$$g \approx 4G\sigma\eta \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4G\sigma\eta \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi G\sigma r}{R}.$$

Logo, no referencial girante, teremos que:

$$\ddot{r} = -\frac{\pi G \sigma}{R} r + \omega^2 r$$

Então:

$$\omega^2 = \frac{\pi G \sigma}{R} - \omega^2$$

Tal que:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G \sigma}{2R}}$$

assim:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{\pi G \sigma}}$$

A equação da trajetória nesse caso é dada por:

$$r(t) = r_0 \cos(\omega t)$$

- (c) Nesse caso, considere que inicialmente Brabinela se situava no eixo  $x$ , teremos que as suas coordenadas  $x$  e  $y$  serão representadas por:

$$x(t) = r(t) \cos(\omega t)$$

e

$$y(t) = r(t) \sin(\omega t)$$

Substituindo o valor de  $r(t)$  e utilizando artifícios trigonométricos, obtemos que:

$$x(t) = \frac{r_0(1 + \cos(2\omega t))}{2}$$

enquanto que:

$$y(t) = \frac{r_0 \sin(2\omega t)}{2}$$

Manipulando as duas expressões algebricamente, encontramos que:

$$\left(x - \frac{r_0}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$

que é a equação de uma circunferência (elipse de excentricidade nula). Assim:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{2}$$

ou seja,  $A = \frac{r_0}{2}$  e  $B = 0$ .

- (d) Nessa situação, a área da Lua no céu vai ser equivalente à de uma círculo de raio:

$$r' = \frac{r_0}{2} + R_L$$

então:

$$A = \pi \left(\frac{r_0}{2} + R_L\right)^2$$

assim, concluímos que o ângulo sólido da Abóbolua é dado por:

$$\Omega = \frac{\pi \left(\frac{r_0}{2} + R_L\right)^2}{d_{TL}^2}$$

## Questões Longas

### 9. Separação de Massa (60 pontos)

A **separação de massa em aglomerados estelares** é um fenômeno que ocorre em aglomerados estelares quando, após muito tempo, as estrelas mais massivas se separam significativamente das mais leves. Isso significa que, em média, as estrelas mais massivas são encontradas mais próximas ao centro do aglomerado, enquanto as mais leves são encontradas em maiores distâncias e algumas até escapam do aglomerado.

Para simplificar o problema, assumimos inicialmente que as estrelas do aglomerado são semelhantes em termos de massa e velocidade, e definimos a massa total do aglomerado  $M$ , a massa de uma estrela  $m$ , o raio do aglomerado  $R$ , a velocidade de uma estrela no aglomerado  $v$ , e o número de estrelas no aglomerado  $N$ .

- (10 pontos) Usando o teorema do virial, obtenha a velocidade quadrática média de uma estrela no aglomerado em função dos parâmetros do aglomerado. Suponha que a densidade estelar no aglomerado seja uniforme.
- (10 pontos) Derive o raio efetivo de colisão,  $r_{eff}$ , que é a distância em que duas estrelas, em média, colidem. Suponha que a energia potencial de uma estrela a uma distância  $r_{eff}$  de outra seja igual à energia cinética de cada estrela. Para os cálculos, assuma duas estrelas idênticas de massa média. Deixe sua resposta em termos de  $R$  e  $N$ .
- (10 pontos) Calcule o tempo de relaxação de uma estrela,  $t_{relax}$ , que é o tempo máximo que uma estrela pode se mover livremente no aglomerado sem colidir com outra estrela. Expresse este tempo apenas em termos de  $N$ ,  $R$ , e  $v$ .
- (20 pontos) Até agora consideramos que todas as estrelas possuem a mesma massa. De agora em diante, a  $i$ -ésima estrela possuirá massa  $m_i$  e velocidade  $v_i$ . Considere uma colisão entre uma estrela massiva de massa  $m_A$  e uma estrela leve de massa  $m_B$ , com  $m_A \gg m_B$ . Calcule a razão entre os tempos de relaxação da estrela leve e da estrela massiva após a colisão.
- (10 pontos) Como você explicaria a separação de massa se muito tempo tivesse passado desde a formação do aglomerado ( $t \gg t_{relax}$ )?

#### Solução:

- (a) Pelo teorema do virial, temos que

$$2K + U = 0$$

Onde  $K$  é a energia cinética total do aglomerado e  $U$  a sua energia potencial gravitacional. Como sua densidade é uniforme, sabemos que a expressão para  $U$  é

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Ainda,  $K$  é a soma de todas as energias cinéticas:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}$$

Substituindo essas duas expressões na equação do teorema do virial, obtemos a resposta final:

$$v = \sqrt{\frac{3GM}{5R}}$$

- (b) Pelo enunciado, quando duas estrelas estão a uma distância  $r_{eff}$  uma da outra, a energia potencial gravitacional é igual a energia cinética de uma das estrelas:

$$\frac{Gm^2}{r_{eff}} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{2Gm}{v^2}$$

No caso médio,  $m = M/N$  e  $v$  é a velocidade encontrada no item anterior. Substituindo:

$$r_{eff} = \frac{10R}{3N}$$

- (c) A estrela possui um raio efeito  $r_{eff}$  para colisões. Quando ela se move por um tempo  $\Delta t$ , ela varre um cilindro de volume

$$\pi r_{eff}^2 v \Delta t$$

Nesse tempo, ela colide com um certo número de estrelas, dado pelo volume varrido multiplicado pela densidade numérica de estrelas:

$$\frac{N}{4\pi R^3/3} \pi r_{eff}^2 v \Delta t = \frac{3N v r_{eff}^2}{4R^3} \Delta t$$

Quando  $\Delta t = t_{relax}$ , a estrela colide com apenas uma estrela:

$$\frac{3N v r_{eff}^2}{4R^3} t_{relax} = 1$$

$$t_{relax} = \frac{4R^3}{3N v r_{eff}^2}$$

Substituindo a expressão de  $r_{eff}$ :

$$t_{relax} = \frac{3NR}{25v}$$

- (d) Assumimos a colisão como sendo frontal e elástica. Nas equações de conservação de momento linear e energia a seguir, o subscrito 0 indica uma quantidade antes da colisão e f após:

$$m_A v_{A0} + m_B v_{B0} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2$$

Essas equações têm uma solução conhecida do estudo de colisões:

$$v_{Af} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A0} + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_{B0}$$

$$v_{Bf} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A0} - \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{B0}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a estrela mais massiva estava se movendo para a direita e a estrela mais leve para a esquerda antes da colisão, ambas com velocidade de módulo  $v$ . Ainda, utilizando a condição  $m_A \gg m_B$ :

$$v_{Af} \approx v - \frac{2m_B}{m_A} v \approx v$$

$$v_{Bf} \approx 2v + v = 3v$$

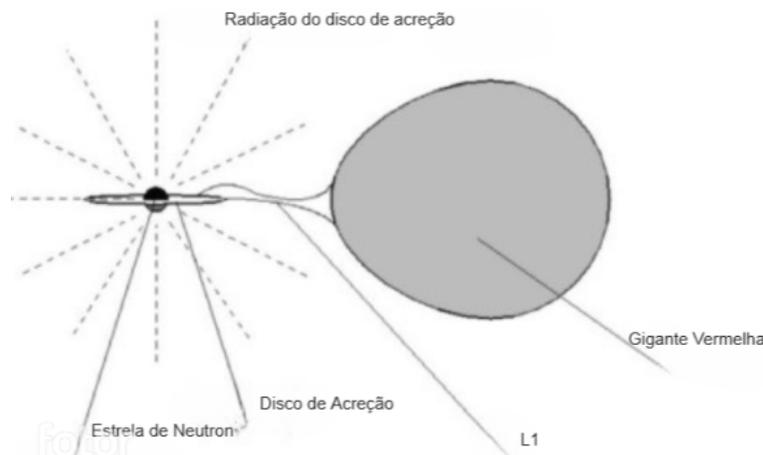
Do item anterior, sabemos que o tempo de relaxação é inversamente proporcional à velocidade. Assim, a razão pedida é dada por

$$\frac{t_{relax,B}}{t_{relax,A}} = \frac{v_{Af}}{v_{Bf}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

- (e) Do item anterior, sabemos que, a cada colisão, uma estrela leve aproximadamente triplica sua velocidade e diminui o tempo até a próxima colisão por um fator de um terço. Assim, ela passa a ter colisões mais frequentes do que uma estrela massiva, e adquire uma velocidade consideravelmente alta, fatores que fazem com que ela tenha uma maior tendência a se afastar do centro do aglomerado ou até escapar gravitacionalmente dele se sua velocidade for alta o bastante.

### 10. Acreção (60 pontos)

Considere sistemas binários em que uma das estrelas é uma gigante vermelha e a outra é uma estrela de nêutrons. A estrela de nêutrons atrai matéria da gigante vermelha, formando um disco de acreção. Parte dessa matéria pode passar pelo ponto de Lagrange  $L_1$  e formar um jato de acreção ao redor da estrela de nêutrons, como mostrado na figura abaixo.



A gigante vermelha é definida como tendo massa igual ao do Sol e a estrela de nêutrons com massa igual a  $1.4 M_{\odot}$  e raio de 10 km. O disco de acreção resultante tem um raio de  $r_{max}$  medido do centro de massa da estrela de nêutrons. Finalmente,  $r_{min}$  é o raio da superfície da estrela de nêutrons. A taxa de acreção  $\dot{m}$  é constante e dada por  $\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ .

- (5 pontos)** Se uma massa  $m$  se move com um raio  $r$  em uma órbita circular em um disco de acreção de massa, mostre que a energia potencial gravitacional da massa é dada por  $E = -\frac{GMm}{2r}$ .
- (10 pontos)** Prove que quando o raio orbital da massa muda de uma quantidade  $\Delta r \ll r$ , esse raio brilhará com luminosidade  $L_{ring} = \frac{GM\dot{m}}{2r^2} \Delta r$ .
- (8 pontos)** Suponha que a energia de acreção seja dissipada como radiação térmica com temperatura  $T$ . Prove que a luminosidade total acima e abaixo do anel fino de espessura  $\Delta r$  no raio  $r$  é obtida como  $L_{ring} = 4\pi r \sigma T^4 \Delta r$ .
- (6 pontos)** Determine a temperatura da superfície na parte mais interna do disco de acreção, quando a taxa de acreção é de  $1.2 \times 10^{13}$  kg/s.
- (5 pontos)** Calcule o comprimento da onda eletromagnética irradiada na parte mais interna do disco de acreção.

- (f) (5 pontos) Derive a relação entre a luminosidade  $L$  do jato de acreção em termos da taxa de acreção  $\dot{m}$ , da velocidade da luz  $c$  e da eficiência de acreção  $\eta$ .
- (g) (7 pontos) A potência luminosa total de todo o disco de acreção de massa pode ser estimada a partir da equação:

$$L = \frac{GM\dot{m}}{2} \left( \frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}} \right)$$

Sabendo disso, encontre a eficiência de acreção  $\eta_{acc}$  quando a massa é transferida para o raio de uma estrela de nêutrons, neste caso, considerando  $r_{max} \gg r_{min}$ .

- (h) (12 pontos) Determine a eficiência de combustão das reações nucleares (eficiência de queima nuclear)  $\eta_{nuc}$ . Compare-a com a eficiência de acreção  $\eta_{acc}$  encontrada anteriormente.
- (i) (2 pontos) Qual processo é mais eficiente na liberação de energia? Reações de fusão nuclear no Sol ou liberação de energia através do mecanismo de acreção?

### Solução:

- (a) Nesse caso, basta perceber que a velocidade orbital de um corpo em órbita circular é dada por:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

ou seja:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Portanto, substituindo na fórmula da energia total,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

encontramos que:

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

- (b) Para uma pequena quantidade de massa  $\Delta m$  que é transferida de um raio  $r$  para  $r + \Delta r$ , temos que:

$$\Delta E = \frac{GM\Delta m}{2r} - \frac{GM\Delta m}{2(r + \Delta r)}$$

Utilizando aproximações binomiais, obtemos:

$$\Delta E = \frac{GM\Delta m}{2r^2} \Delta r$$

Assim, utilizando o fato de que a luminosidade é dada por

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

concluimos que:

$$L = \frac{GM\dot{m}}{2r^2} \Delta r$$

- (c) Nesse caso, precisamos primeiramente calcular a área do anel. Perceba que, como  $\Delta r \ll r$ , podemos aproximá-la para a de um retângulo de comprimento  $2\pi r$  e espessura  $\Delta r$ , tal que:

$$A = 2\pi r \Delta r$$

Perceba que, na Lei de Stefan-Boltzmann, deveremos considerar tanto a área do anel de cima, quanto a do anel de baixo, de forma que:

$$A_{eff} = 2A$$

assim:

$$L = A_{eff} \sigma T^4$$

ou seja:

$$L = 4\pi r \sigma T^4 \Delta r$$

- (d) Nessa situação, devemos conservar a energia dissipada pela acreção com a emitida por radiação térmica. Logo:

$$4\pi r \sigma T^4 \Delta r = \frac{GM\dot{m}}{2r^2} \Delta r$$

ou seja:

$$T = \left( \frac{GM\dot{m}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$T = 6,3 \times 10^6 \text{ K}$$

- (e) Podemos, nesse item, aplicar a Lei de Wien, de modo que:

$$\lambda = \frac{b}{T}$$

substituindo os valores numéricos, obtemos:

$$\lambda = 0,46 \text{ nm}$$

- (f) Nesse caso, podemos utilizar a equação que relaciona massa e energia para obter a seguinte relação:

$$L = \eta \dot{m} c^2$$

- (g) Nessa situação, como  $r_{max} \gg r_{min}$ , obtemos que:

$$L = \frac{GM\dot{m}}{2r_{min}}$$

Com isso, obtemos que:

$$\eta_{acc} \dot{m} c^2 = \frac{GM\dot{m}}{2r_{min}}$$

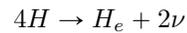
e então:

$$\eta_{acc} = \frac{GM}{2r_{min} c^2}$$

substituindo os valores numéricos, concluimos que:

$$\eta_{acc} \approx 10\%$$

(h) Podemos representar a equação resultante de queima nuclear do Sol pela seguinte maneira:



Calculando a energia total liberada, obtemos:

$$\Delta E = m_{H_e} c^2 - 4m_p c^2$$

Desse modo, a eficiência total pode ser calculada pela energia liberada dividida pela inicial:

$$\eta_{nuc} = \frac{m_{H_e} c^2 - 4m_p c^2}{4m_p c^2}$$

ou seja:

$$\eta_{nuc} = \frac{m_{H_e}}{4m_p} - 1$$

substituindo os valores numéricos, obtemos que:

$$\eta_{nuc} \approx 0,7\%$$

(i) O processo de acreção é bem mais eficiente que as reações nucleares.