

Estudo do Efeito Estufa (10 pontos)

Em 2021, Syukuro Manabe e Klaus Hasselmann dividiram o Prêmio Nobel pelos trabalhos de modelagem do clima terrestre e por preverem precisamente o aquecimento global causado pelas atividades industriais humanas. Nesse problema, nós vamos examinar um modelo simples do aquecimento global devido ao efeito estufa. Os gases do efeito estufa alteram as propriedades ópticas da atmosfera terrestre na transmissão e absorção da radiação infravermelha, resultando no aumento da temperatura média da terra.

Todos os objetos, em temperaturas diferentes, emitem radiação térmica. A quantidade $u(\lambda, T)d\lambda$ indica a radiância espectral (potência emissiva por unidade de área) de um objeto a uma temperatura T entre os comprimentos de onda λ e $\lambda + d\lambda$. De acordo com a teoria de Planck da radiação do corpo negro, nós temos

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (1)$$

Onde $hc = 1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ e $k_B = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$. O comprimento de onda que corresponde ao máximo $u(\lambda, T)$ é encontrado a partir da relação $\lambda_{max}T = b$ (Lei do Deslocamento de Wien). Usando a equação (1), é possível mostrar que $b = \frac{hc}{x_m k_B}$, onde a quantidade adimensional x_m é uma raiz não trivial de uma equação da forma $f(x) = 0$; você calculará $f(x)$ nas próximas tarefas. O poder emissivo total é dado pela Lei de Stephan-Boltzmann e vale σT^4 , onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Além disso, de acordo com a Lei da Radiação de Kirchoff, um corpo em equilíbrio térmico absorvendo uma certa fração da luz incidente em um comprimento de onda específico, vai emitir a mesma fração da radiação de corpo negro no mesmo comprimento de onda.

Nesse problema vamos assumir que o Sol é um corpo negro com temperatura equivalente à sua temperatura média na superfície, que é de $T_S = 5,77 \times 10^3 \text{ K}$. O raio do Sol é $R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$ e distância média à terra de $d = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$. Nós denotamos por \tilde{u}_S a potência por unidade solar emitida por unidade de área da terra normal à direção da radiação. A integral dessa quantidade em todos os comprimentos de onda, i.e. $S_0 = \int \tilde{u}_S d\lambda$, é chamada constante solar

Nós assumimos também que a terra está em equilíbrio térmico e possui a mesma temperatura em todos os pontos da superfície. Sempre que for expressar uma quantidade desejada escreva a forma literal em termos dos dados fornecidos no problema e encontre seu valor numérico com três algarismos significativos. As unidades estão todas indicadas na folha de respostas.

A terra como um corpo negro (3 pontos)

Nessa parte, considere a superfície da terra um corpo negro e despreze as contribuições da atmosfera terrestre.

A.1	Encontre a constante solar, S_0 .	0,6pt
A.2	Encontre a temperatura da terra, T_E .	0,6pt
A.3	Encontre a função $f(x)$.	0,4pt
A.4	Calcule o valor numérico de x_m e desse valor encontre o valor de b .	0,4pt
A.5	Encontre λ_{max} para o Sol e para a Terra.	0,2pt

Na figura 1 as funções $\gamma \tilde{u}_S$ e $u(\lambda, T_E)$ estão plotadas versus λ , onde γ é uma constante adimensional que reescala \tilde{u}_S para que os valores dos picos coincidam.

A.6	Determine γ .	0,8pt
------------	----------------------	-------

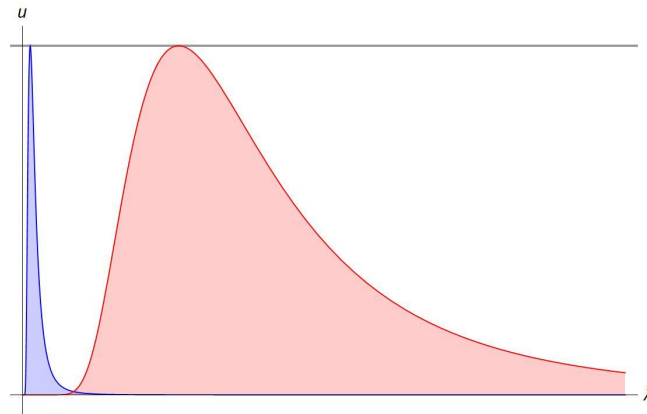


Figura 1: o gráfico de $u(\lambda, T)$ em vermelho e de $\gamma\tilde{u}_S$ em azul

Efeito Estufa (7 pontos)

Nessa parte, vamos introduzir um modelo simples no qual a atmosfera é modelada como uma fina camada a uma pequena distância acima da superfície da terra, de forma que a diferença entre a área da camada atmosférica e a área da superfície pode ser desprezada (veja a figura 2). No que se segue assumamos que a maior parte da radiação da terra e do sol estão próximos ao λ_{max} de cada um. Também assumamos que a "camada atmosférica" reflita uma fração $r_A = 0,255$ da radiação **visível/ultravioleta** de cima ou de baixo e transmite completamente o resto. Assumamos que a atmosfera não reflete qualquer radiação **infravermelha**, no entanto, ela absorve uma fração ϵ da radiação **infravermelha** e transmite o resto. Por outro lado, a superfície da terra reflete uma fração r_E da radiação **visível/ultravioleta** e absorve todo o resto da radiação **infravermelha**.

Esse comportamento, conhecido como Efeito Estufa, muda a temperatura média da terra e da atmosfera.

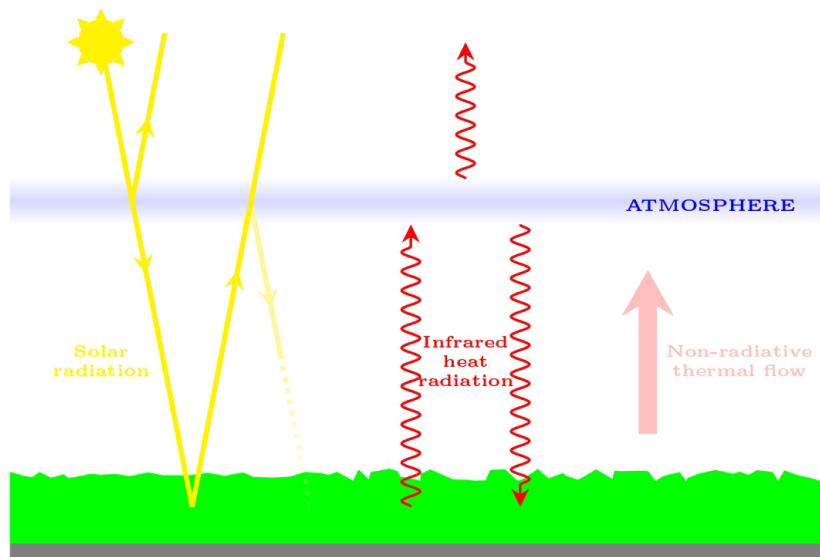


Figura 2: fluxo térmico entre a terra

- B.1** Assumamos que $\epsilon = 1$ e $r_E = 0$, calcule a temperatura da terra T_E e a da atmosfera T_A . 1,0pt

Agora assumamos que $r_E \neq 0$. Nesse caso, o sistema "Terra + atmosfera" reflete uma fração diferente da radiação solar incidente, chamada de albedo e denotado por α .

B.2 Determine o albedo α em termos de r_E e r_A . Então calcule seu valor numérico para $r_E = 0,102$ (e $r_A = 0,255$) 1,6pt

B.3 a) Expresse a temperatura da terra em termos de σ , α , S_0 e ϵ . 1,0pt
b) Usando os dados fornecidos e o albedo calculado, encontre o valor de ϵ para o qual a temperatura média da terra é $T_E = 288\text{K}$, em acordo com os dados reais.

B.4 Encontre $\frac{dT_E}{d\epsilon}$ e determine quanto a temperatura da terra aumento se ϵ aumenta 1%. 0,8pt

Assuma que $T_A = 245\text{K}$ e $T_E = 288\text{K}$. Esses valores são de dados reais e podem diferir dos resultados dos itens anteriores. Agora suponha um fluxo térmico não radiativo (isto é, convectivo) $J_{NR} = k(T_E - T_A)$ mantido entre a Terra e a atmosfera, onde k é uma constante. A quantidade J_{NR} é potência transmitida por unidade de área.

B.5 Encontre ϵ e k em termos de T_E , T_A , σ , α e S_0 . 1,6pt

B.6 a) Diferenciando as duas equações do item B.5 com relação a ϵ , encontre duas equações algébricas satisfetias por $\frac{dT_A}{d\epsilon}$ e $\frac{dT_E}{d\epsilon}$. 1,0pt
b) Usando essas equações encontre o valor que a temperatura da terra mudaria caso o valor de ϵ aumentasse em 1%.

Aprisionando Ions e Resfriando Átomos (10 pontos)

Nos últimos tempos, aprisionar e resfriar átomos tem sido um tópico fascinante para físicos, com vários prêmios Nobel tendo sido distribuídos para essa área. Na primeira parte dessa questão, nós vamos explorar uma técnica de aprisionamento de íons, conhecida como "armadilha de Paul". Wolfgang Paul e Hans Dehmelt dividiram o Prêmio Nobel de Física de 1989 pelos seus trabalhos. Na próxima parte vamos investigar a técnica de resfriamento Doppler de átomos, um dos trabalhos citados no comunicado de imprensa para o Prêmio Nobel de Física de 1997, entregue a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e Willian Daniel Phillips "pelo desenvolvimento de métodos para resfriar e aprisionar átomos com luz laser"

Armadilha de Paul (5,6 pontos)

Nós sabemos que com campos eletrostáticos não é possível criar um equilíbrio estável para partículas carregadas. Então, criar equilíbrio estáveis para íons requer técnicas mais sofisticadas. A armadilha de Paul é uma dessas técnicas.

Considere um anel de carga com raio R e densidade linear de carga λ . Uma carga positiva Q de massa m é colocada no centro do anel.

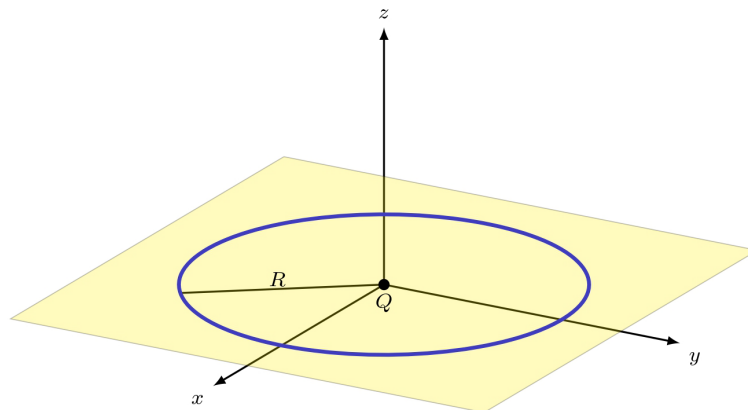


Figura 3: Um disco de densidade de carga positiva λ e raio R . A origem do sistema de coordenadas está no centro do anel.

- A.1** a) Em coordenadas cartesianas (x, y, z) , encontre o campo elétrico do anel carregado nas proximidades do centro em primeira ordem em $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$ e $\frac{z}{R}$. 1,5pt
- b) Encontre a frequência angular de pequenas oscilações da partícula carregada na direção em que um equilíbrio estável existe.

A fim de capturar uma carga Q completamente, nós queremos aplicar campos alternados para produzir um equilíbrio dinâmico. Assuma que a densidade de carga é $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$, onde λ_0 , u e Ω são ajustáveis. Ignore os efeitos de radiação e a equação do movimento para pequenas oscilações em torno do centro do anel na direção perpendicular ao seu plano se torna:

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t) z \quad (2)$$

- A.2** Escreva a e k em termos de parâmetros conhecidos. 0,4pt

Nós queremos obter uma solução aproximada para o equação (2) fazendo as hipóteses simplificadora que $a \ll 1$, $\Omega \gg k$ and $a\Omega^2 \gg k^2$. Dessa forma, é possível dividir a solução em duas partes $z(t) = p(t) + q(t)$, onde $p(t)$ é uma componente que varia lentamente e $q(t)$ é uma componente com amplitude pequena que

varia rapidamente e possui valor médio igual a zero. Em outras palavras, $p(t)$ pode ser assumido constante para poucas oscilações de $q(t)$ (Veja a figura 4).

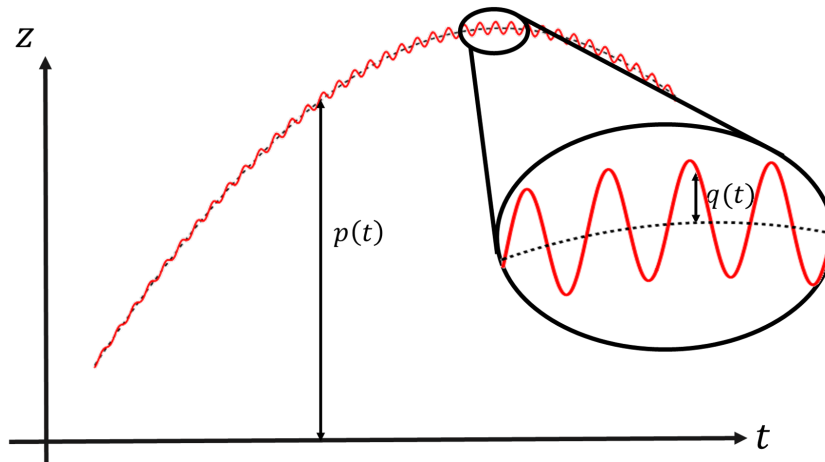


Figura 4: Uma solução típica para a equação (2) – $p(t)$ é um movimento geral e $q(t)$ representa pequenas oscilações em torno desse movimento. A elipse na direita é um aumento de uma parte da trajetória.

A.3 a) Usando as aproximações acima, encontre uma equação diferencial para $q(t)$ em função de a , Ω e p . 1,8pt

b) Resolva a equação considerando as condições iniciais apropriadas para as propriedades dessa função.

A.4 a) Usando a média da componente de rápida variação encontre a equação diferencial efetiva para $p(t)$. 1,5pt

b) Investigue a estabilidade do ponto de equilíbrio e encontre a condição para equilíbrio estável.

Assuma que $\lambda_0 = 8 \times 10^{-9} \text{C/m}$ e $R = 10 \text{cm}$. Nós queremos um aparelho que capture um íon com carga $+e$ e 100 vezes mais pesado que o hidrogênio.

A.5 Calcule o k . Assuma que $a = 0,04$ e estime a menor frequência para estabilizar o movimento do íon. Use os dados fornecidos no final da questão. 0,4pt

Resfriamento Doppler (4,4 pontos)

Pode ser necessário resfriar um íon ou um átomo capturado. Assuma que o átomo capturado tem massa m e dois níveis de energia com diferença de $E_0 = \hbar\omega_A$. Elétrons no nível mais baixo podem absorver um fóton e saltar para o nível mais alto, mas após um período τ eles retornam para o nível mais baixo e emitem um fóton com frequência predominantemente dentro do intervalo $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$

A.1 Use o princípio da incerteza de Heisenberg para encontrar Γ . 0,5pt

Por um motivo similar, se nós incidirmos um laser em um átomo capturado e a frequência angular ω_L estiver no intervalo $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$, o átomo pode absorver o fóton. Assuma que a frequência ω_L é ligeiramente menor que ω_A . Para um determinado aparelho a taxa de absorção de fótons por um átomo no seu próprio referencial é dada na figura 5.

Os fótons absorvidos são reemitidos em uma direção aleatória. Para tornar as coisas mais simples nós consideramos o problema unidimensional, isto é, assumimos que os átomos podem se mover apenas na

direção x e o laser incide de ambos os lados (esquerda e direita). No referencial do átomo, a luz tem uma frequência maior ou menor devido o movimento dos átomos. Já que a velocidade v dos átomos é muito pequena, nós só consideramos termos de até primeira ordem em v/c . Além disso, $m \gg \hbar\omega_A/c^2$, de forma que a velocidade quase não muda depois de absorver um fóton.

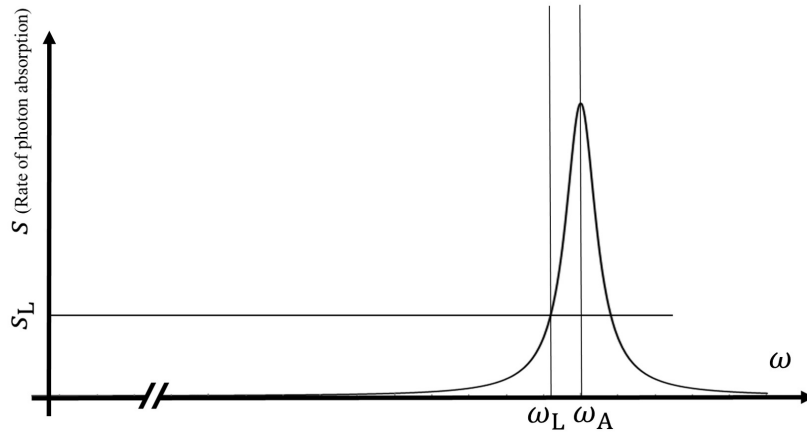


Figura 5: A taxa de absorção de fótons como função da frequência para essa armadilha – a frequência correspondente a diferença de energia entre os níveis atômicos é ω_A e frequência do laser ligeiramente menor é ω_L .

A mudança na frequência devido ao efeito Doppler é muito pequena comparada com $\omega_A = \omega_L$, de forma que a função para s na figura 5 pode ser aproximada pela função linear:

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L) \quad (3)$$

Onde s é o número de fótons absorvidos por unidade de tempo, s_L é o valor para $\omega = \omega_L$ e α é a inclinação da reta tangente à curva em ω_L . A frequência do fóton re-emitido é quase igual a frequência do fóton incidente, mas ele é emitido com a mesma probabilidade entre as direções x e $-x$. Nós vamos de fato considerar que as duas frequências são idênticas. Note que vamos considerar todo o processo no referencial do átomo.

- B.2** a) Assuma que átomo capturado está se movendo com $v = v_x$ no referencial do laboratório. No referencial do átomo, calcule a taxa de colisão de fótons, incidentes das duas direções com os átomos (denotadas por s_+ e s_-) e a taxa de absorção de momento em cada direção (denotadas por π_+ e π_-). 1,7pt
- b) Determine a força efetiva que o átomo sente como uma função de v , $k_L = \omega_L/c$, \hbar e α , no referencial do laboratório. Assuma que $s_L \ll \alpha\omega_L$.

Nós queremos encontrar a menor temperatura que pode ser atingida usando essa técnica. Suponha que a velocidade de um átomo foi reduzida para exatamente zero e nesse momento ele absorve um fóton (que vem de qualquer direção) e re-emite em uma direção qualquer, com basicamente a mesma frequência. Assuma que o processo ocorre a cada τ unidades de tempo.

- B.3** Considere o momento de um átomo depois de um processo com as duas possibilidades de final (o fóton re-emitido para esquerda ou direita), calcule a potência média absorvida pelo átomo. 1,0pt

- B.4** Considere a força calculada no item B.2 e calcule a potência que ela fornece e então calcule o valor médio de v^2 no equilíbrio. Usando seu conhecimento de teoria cinética dos gases estime a temperatura dos átomos. 0,8pt

B.5 Estime essa temperatura para um átomo 100 vezes mais pesado que o hidrogênio. 0,4pt
Assuma que $\omega_L = 2 \times 10^{16} \text{rad/s}$, $\tau = 5 \times 10^{-6} \text{s}$ e $\alpha = 4$.

Massa do átomo de hidrogênio: $m_H = 1,674 \times 10^{-27} \text{kg}$

Carga do elétron: $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{C}$

Permissividade elétrica do vácuo: $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{F/m}$

Constante de Boltzmann: $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{J/K}$

Constante de Planck normalizada: $\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$

Pulsar Viúva Negra (10 pontos)

Um número significativo de estrelas observadas são binários. Uma ou as duas podem ser estrelas de nêutrons girando com uma alta velocidade angular e emitindo ondas eletromagnéticas; essas estrelas são chamadas de pulsares. Às vezes as estrelas que as acompanham são tão massivas que gradualmente ejetam sua massa para dentro da estrela de nêutrons e fazem sua massa aumentar (figura 6-a). Dessa forma, a estrela de nêutrons gradualmente "engole" uma parte da massa da estrela companheira e por essa razão a estrela de nêutrons é comparada com uma aranha viúva negra (ou aranha de costas vermelhas) que, após a cópula, come partes do seu companheiro. O aquecimento do gás que entra na viúva negra gera radiação que pode ser observada. As estrelas de nêutrons mais pesadas geralmente são viúvas negras, que são úteis para os laboratórios testarem a física elementar. A figura 6-b mostra a figura da estrela companheira da estrela de nêutrons *PSR J2215+5135*, tirada por um telescópio de 3,4 metros do Observatório Nacional do Irã. Não é possível ver a estrela de nêutrons nessa imagem, apenas a estrela companheira.

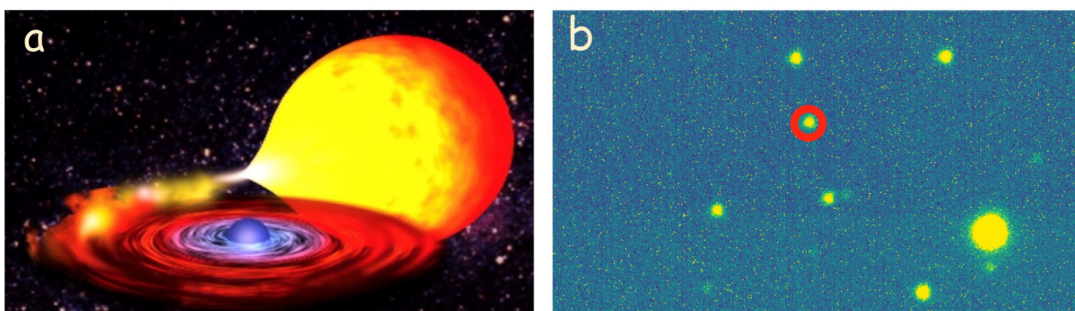


Figura 6: (a) Os gases caindo dentro da estrela de nêutrons e (b) A estrela companheira *PSR J2215+5135*

Sistema binário (5 pontos)

Considere um modelo simples no qual a viúva-negra e sua estrela companheira são representadas por duas massas pontuais M_1 e M_2 que se movem em uma órbita circular em torno do seu centro de massa. Para investigar a dinâmica do sistema considere um sistema de coordenada que gira no qual os dois corpos estão parados. Tome o centro de massa para ser a origem do sistema de coordenadas. Assuma que as duas massas pontuais estão no eixo x e espaçadas por uma distância a um do outro, estando M_1 do lado negativo. Em um ponto arbitrário (x, y) no plano do movimento o potencial efetivo $\varphi(x, y)$ para uma massa teste é a soma do potencial gravitacional e do potencial centrífugo.

A.1	Escreva $\varphi(x, y)$ em termos de M_1 , M_2 , G e a .	1,0pt
------------	--	-------

A.2	Assuma que $M_1 > M_2$ e plote a função $\varphi(x, y)$ qualitativamente.	0,7pt
------------	---	-------

Suponha (apenas para o item A.3) $M_2 = M_1/3$ e assumo que M_2 está cercada de gás rarefeito (com densidade muito baixa). A massa de gás é insignificante e nós ignoramos seus efeitos gravitacionais. Se o tamanho do envelope for maior que um determinado limite o gás irá ser engolido por M_1 . Suponha que esse fenômeno ocorra quando $x = x_0$.

A.3	Encontre o valor numérico para $\frac{x_0}{a}$ com precisão de dois algarismos significativos. Você pode usar a calculadora.	0,5pt
------------	--	-------

Tome o período de rotação das estrelas em torno do seu centro para ser P . Assuma que o fluxo de massa de M_2 para M_1 por uma taxa muito pequena $dM_1/dt = \beta$. Essa taxa é tão pequena que o período é praticamente constante em uma rotação. De qualquer maneira, depois de um longo período de tempo, a distância entre as estrelas muda, enquanto o movimento permanece circular.

A.4 Determine a taxa de variação de a e P em termos de β , M_1 , M_2 , G e a . 0,6pt

O gás que sai de M_2 forma um disco que gira em torno de M_1 e aquece devido ao atrito (figura 6-a). Conforme o gás perde energia, ele cai em espiral sobre M_1 e finalmente alcança ela. No estado estacionário, o fluxo de massa tem uma taxa constante β , de M_2 para o disco e do disco para M_1 . Ao mesmo tempo, o disco aquecido emite radiação térmica como um corpo negro. O disco se forma bem perto da estrela de nêutrons, de forma que os efeitos gravitacionais de M_2 podem ser ignorados, da mesma forma que a capacidade térmica do gás.

A.5 Determine a temperatura do disco a uma distância r do centro da estrela M_1 em termos de β , M_1 , G e σ (constante de Stefan-Boltzmann). 1,0pt

No sistema binário *PSR J2215+5135*, a massa da estrela de nêutrons é $M_{NS} = 2,27M_\odot$ e a massa da estrela companheira é $M_S = 0,33M_\odot$, onde $M_\odot = 1,98 \times 10^{30}\text{kg}$ é a massa do sol. O período rotacional é $P = 4,14$ horas, a constante de Stefan-Boltzmann é $5,67 \times 10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4$ e a constante gravitacional é $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{m}^3/\text{s}^2\text{kg}$. Assuma que o fluxo de massa é $\beta = \dot{M}_{NS} = 9 \times 10^{-10}M_\odot/\text{ano}$

A.6 Calcule a temperatura no disco em um raio $r = \frac{a}{10}$ em kelvin. 0,5pt

Assuma que depois de uma explosão subita a estrela M_1 ejeta parte de sua massa para fora do binário a uma velocidade muito alta e sua massa se torna M'_1 . A velocidade de M'_1 relativa a M_2 depois da explosão é v' .

A.7 Determine o valor máximo de v' em termos de M'_1 , M_2 , G e a para que o novo binário permanecer ligado. Assuma que a explosão é isotrópica, qual é o mínimo valor de M'_1 para o sistema permanecer ligado? 0,7pt

Análise da estabilidade da estrela (5 pontos)

Nessa parte nós vamos estudar a estabilidade de uma única estrela. Considere uma estrela contendo um tipo específico de matéria com a equação de estado $p = K\rho^\gamma$, onde K e γ são constantes. Seja $p(r)$ e $\rho(r)$ a pressão e a densidade a uma distância r do centro da estrela, respectivamente. A pressão e a densidade no centro são p_c e ρ_c , respectivamente. Em todos os itens dessa parte tome os vetores apontando para fora como positivos.

B.1 Determine a aceleração gravitacional próximo do centro da estrela em termos de r e das constantes G e ρ_c . 0,2pt

B.2 Derive uma equação diferencial para determinar $\rho(r)$ no equilíbrio e escreva-a na forma: 0,6pt

$$\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0 \quad (4)$$

Encontre as funções h_1 e h_2 .

B.3 Construa uma quantidade r_0 na forma $G^l p_c^m \rho_c^n$ com dimensão de comprimento. 0,4pt

B.4 Reescreva a equação de B.2. na seguinte forma: 0,3pt

$$\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x)u(x) = 0 \quad (5)$$

Onde $x = \frac{r}{r_0}$ e $u = \frac{\rho}{\rho_c}$. Encontre as funções $A_1(u, x)$ e $A_2(x)$.

B.5 Para $\gamma = 2$ encontramos $u(x) = \frac{f(x)}{x}$, determine $f(x)$. 0,6pt

Assuma que para uma estrela particular $\frac{du}{dx}$, como uma função de x é dado pela curva abaixo, na figura 2:

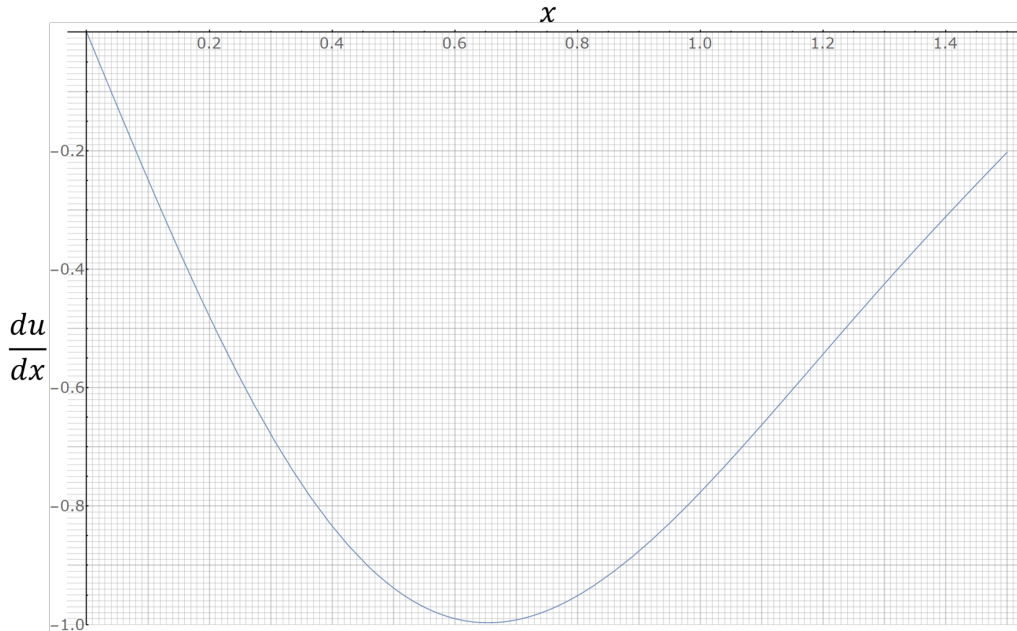


Figura 7: Gráfico de $\frac{du}{dx}$

B.6 Usando o comportamento da curva na figura 2 nas proximidades de $x = 0$, encontre γ com 3 algarismos significativos. Use uma régua se for necessário. 0,8pt

Para analisar a estabilidade de um sistema, nós assumimos que a estrela desvia levemente do seu equilíbrio: uma casca esférica que tem raio r no equilíbrio agora tem raio \tilde{r} , similarmente à g , p e ρ mudaram para \tilde{g} , \tilde{p} e $\tilde{\rho}$ respectivamente. Por conveniência, considere apenas pequenos r 's próximos ao centro da estrela, para o qual podemos assumir $\tilde{r} = r(1 + \epsilon(t))$, onde $\epsilon(t) \ll 1$.

B.7 Encontre $\tilde{\rho}$ e \tilde{g} em termos de ρ e g na primeira ordem em ϵ . 0,9pt

B.8 Usando a equação do movimento de Newton para uma camada esférica com raio r encontre $\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2}$ em termos de \tilde{g} , $\tilde{\rho}$, K , γ e $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$. (por $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ entenda a derivada parcial de $\tilde{\rho}$ com respeito a \tilde{r} em um tempo t constante). 0,6pt

B.9 Obtenha $\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$ em termos de ϵ e constantes dadas no problema. Encontre o mínimo valor de γ para o equilíbrio estável e encontre a frequência angular de oscilações da estrela. 0,6pt