

VII Olimpíada Brasileira de Economia

Prova da Segunda Fase

Versão Atena

21 de abril de 2024



Instruções

- Esta prova tem duração de **4 (quatro) horas**.
- As questões objetivas totalizam 25% do valor da prova. As questões dissertativas totalizam 75% do valor da prova. Todas as questões objetivas têm peso igual entre si (2,5% do valor da prova), e o mesmo vale para as questões dissertativas (cada uma comendo 12,5% do valor da prova).
- Não há nota de corte nas questões objetivas para que as dissertativas sejam corrigidas. Todas as provas serão corrigidas na íntegra.
- As respostas das questões dissertativas devem ser claras e rigorosamente justificadas.
- Boa sorte!

Créditos

- Cauê Forniellas da Costa (OBECOM)
- Gabriela Fonseca (FGV-EESP)
- João Paulo Pessoa (FGV-EESP)
- Leonardo Zanetti Souza (OBECOM)
- Nicolás Goulart de Moura (OBECOM)
- Roberto Cesar Cucharero Peregrina (OBECOM)
- Vitor Alexandre T. C. A. Camargo (OBECOM)

Fórmulas

Algumas fórmulas que podem ser úteis para a prova:

Desvio padrão, variância, e covariância:

$$DV(X) = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Valor esperado da soma:

$$\mathbb{E}[aX + bY + c] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c$$

Variância e covariância da soma:

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(aX + bY + c, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$$

Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita:

$$S = a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1 - r}$$

Equação da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Vértices da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

QUESTÕES OBJETIVAS

OBJETIVA 1 – JOGO DO AVIÃOZINHO

Nos últimos anos, os cassinos online ¹ se tornaram cada vez mais populares, atraindo jogadores de todo o mundo. Entre os diversos jogos oferecidos, um dos mais famosos é o *Crashed* - ou “Quebrado”, em inglês. Nele, o jogador realiza uma aposta em um avião que irá decolar. Após a decolagem, o avião ganha altitude e o jogador recebe um retorno em cima da sua aposta com base na altura que o avião chegar. Entretanto, após atingir um certo limite que varia com cada jogo, o avião quebra e, com ele, sua aposta. Para obter os lucros, o jogador deve sair antes do avião quebrar.



Considere que Lucas acaba de criar sua conta na Craze, um famoso cassino online na Obeconomia, e busca apostar 100 reais no *Crashed*. Nessa versão, o jogador deve escolher segundo-a-segundo se deve sair ou não: se continuar, o valor da sua aposta é acrescido de uma fração r da aposta acumulada; se sair, ele recebe o valor acumulado. A cada segundo, o avião tem uma chance de p de continuar voando e, conseqüentemente, $1 - p$ de quebrar. A utilidade que ele obtém de receber w reais após sua aposta é dada por $u(w) = \ln(\frac{w}{100})$ se $w \geq 100$, e 0, caso contrário.

Considere que r e p são estritamente positivos. Analise as seguintes afirmações, e assinale a alternativa correspondente às afirmações verdadeiras.

- I. A decisão de parada de Lucas depende do retorno r sobre a aposta.
- II. A decisão de parada de Lucas depende da probabilidade p de continuidade do jogo.

¹*Disclaimer:* O conteúdo presente na prova da OBECON é destinado apenas para fins educacionais e informativos. As informações compartilhadas não têm o intuito de promover ou incentivar o jogo online ou apostas em cassinos online. Alertamos que a participação em atividades de jogo pode acarretar riscos significativos, incluindo perdas financeiras e problemas associados ao vício em jogos de azar.

III. Se $r = 30\%$, $p = 70\%$, Lucas irá parar após 3 segundos.

IV. Se $r = 60\%$, $p = 70\%$, Lucas irá parar após 6 segundos.

a) I e II

b) II e III

c) III e IV

d) I, II e III

e) I, II, III e IV

OBJETIVA 2 – RECLAMAÇÃO

Leia atentamente as duas notícias abaixo e, em seguida, assinale a alternativa correta.

Texto 1 - *Financial Times*; tradução livre



OMS: China inicia disputas sobre subsídios tributários dos EUA para veículos elétricos e energia renovável

A China iniciou consultas sobre disputas com os Estados Unidos sobre créditos fiscais sob o *Inflation Reduction Act* (Ato de Redução da Inflação) para promover a produção de veículos elétricos e energias renováveis, informou a Organização Mundial do Comércio na quinta-feira.

A China alega que os créditos dos EUA em questão dependem da utilização de produtos nacionais em detrimento de produtos importados, ou de discriminação contra produtos de origem chinesa, de acordo com a OMC.

Texto 2 - *Reuters*; tradução livre

FINANCIAL TIMES

Por dentro do *boom* de \$220 bilhões no projeto americano de tecnologia limpa

Um ano atrás, o presidente Joe Biden lançou uma nova era de política industrial americana, assinando o *Inflation Reduction Act* e o *Chips and Science Act*. As duas leis ofereceram mais de \$400 bilhões em créditos, empréstimos e subsídios, todos desenhados para acender a fâsca de desenvolvimento de uma tecnologia doméstica limpa e uma cadeia de suprimentos para semicondutores.

- a) Por conta de um forte aumento no nível de preços, o governo Biden adotou medidas de controle da inflação. Não obstante, essas medidas não foram bem recebidas pelas demais potências globais, como a China, visto que instituem uma taxa de câmbio fixa para a importação de produtos.
- b) **Pela necessidade de construir fontes de energia renovável e em resposta a políticas protecionistas por parte da China e da Rússia, potências econômicas ocidentais vêm implementando programas de desenvolvimento a suas indústrias domésticas através de subsídios e créditos, indicando um novo período de fragmentação geoeconômica.**
- c) Em 2022, os EUA aprovaram medidas para fomentar a competitividade da indústria doméstica no cenário global e enfraquecer o comércio chinês. Essas ações estavam de acordo com os princípios estabelecidos

pela Organização Mundial do Comércio, respeitados rigorosamente pelos países-membros.

- d) Os atos aprovados pelo governo Biden mostram-se opostos às medidas do governo Trump: enquanto o segundo optou pelo protecionismo e tarifação discriminada dos produtos chineses, o primeiro mostra-se disposto a incentivar o livre comércio global, com pouca participação do Estado americano na economia.
- e) Os investimentos dos EUA não são direcionados a indústrias em que o país compete com a China. Por isso, a reclamação na OMC do governo chinês, que possui baixa participação no desenvolvimento da economia doméstica, pode ser interpretada como movimento político com o intuito de impedir que os EUA limpem sua matriz energética.

OBJETIVA 3 – CONSUMIDOR TEÓRICO

Analise as seguintes afirmações sobre Teoria do Consumidor:

- I. As funções de utilidade $u(x, y) = 3 \cdot x + 5 \cdot y$ e $v(x, y) = 6 \cdot x + 10 \cdot y$ representam a mesma preferência.
- II. A tomada de decisão do consumidor em relação à quantidade demandada do bem x depende das suas preferências, do preço do bem x , do preço de outros bens e da sua renda disponível.
- III. Com preferências bem-comportadas, a escolha ótima do consumidor ocorre quando ele gasta todo o seu orçamento disponível e a taxa marginal de substituição é igual à razão dos preços.
- IV. Bens inferiores são aqueles que um aumento na renda leva a uma queda na quantidade demandada, enquanto bens normais são aqueles que um aumento na renda leva a um aumento na quantidade demandada.
- V. Com preferências bem-comportadas, é impossível todos os bens em uma economia serem inferiores.

Assinale a alternativa com as afirmativas verdadeiras:

- a) I, III, IV
- b) II, IV, V
- c) I, II, III
- d) I, II, IV e V
- e) **I, II, III, IV e V.**

OBJETIVA 4 – DANDO DURO!

Uma firma de pequeno porte levantou o balanço de suas finanças no final do ano e obteve uma quantia de R\$27.000,00 que pretende reinvestir em seu negócio. Depois de avaliar as possíveis opções, a firma chegou em dois tipos de investimento:

- Investir em novo maquinário de capital C , com custo $C = \frac{t}{3000}$, onde t é o valor investido, em milhares de reais.
- Investir no ambiente e qualidade de trabalho dos funcionários L para aumentar sua produtividade, com custo $\frac{t}{9000}$, onde t é o valor investido, em milhares de reais.

No entanto, se for investido muito no segundo, os funcionários podem se acomodar e ter sua produtividade diminuída. A produtividade dos funcionários em função do total investido é dada por $g(L) = \frac{1}{L^2 - 3L + 4}$. O retorno total U do investimento é então dado por $U = C \cdot g(L)$.

Nessas condições, qual a razão entre o total investido em capital C e trabalho L que a firma deveria investir para maximizar seus ganhos?

- a) **2:1**
- b) 4:5
- c) 5:4
- d) 1:2
- e) Não é possível determinar com certeza

OBJETIVA 5 – REI LEÃO

Sebastião está cogitando comprar um título do Tesouro Obeconômico pós-fixado à inflação, com maturidade de 1 ano por 1000 reais. Esse título não possui cupons e paga um retorno de 10% acima da inflação do período. Considere que a alíquota de imposto de renda é de 35% e que a inflação no período foi de 50%. Assinale a alternativa cujo intervalo contém a taxa de retorno real do investimento de Sebastião.

- a) Acima de 40% - $(40\%, \infty)$
- b) Entre 20% e 40% - $(20\%, 40\%]$
- c) Entre 0% e 20% - $(0\%, 20\%]$
- d) Entre -20% e 0% - $(-20\%, 0\%]$**
- e) Abaixo de -20% - $(-\infty, -20\%]$

OBJETIVA 6 – OBENK

Na Obeconomia, o mercado bancário é extremamente concentrado, sendo o Obenk o único banco operante. Seu principal produto financeiro é empréstimos pessoais e o banco sabe que seu mercado em potencial é composto por dois perfis de crédito: *bom pagador* e *mau pagador*. Bons pagadores são pessoas que naturalmente tem um perfil menos arriscado e, portanto, trazem menos custos para o Obenk, tendo um custo de oportunidade de 5%, já maus pagadores são indivíduos mais arriscados e trazem um custo de 50% para o Obenk.

Os bons pagadores sabem que seu perfil é menos arriscado, e não tomarão nenhum empréstimo a uma taxa de juros maior que 10%, enquanto os maus pagadores estão dispostos a pagar no máximo uma taxa de juros de 40%.

É conhecimento comum que existem 75% de bons pagadores na Obeconomia e, conseqüentemente, de 25% de maus pagadores e assuma que, a não ser que seja especificado o contrário, o perfil de um cliente é uma informação privada. Tendo em vista esse contexto, assinale a alternativa correta.

- a) Se o Obenk puder discriminar preços e o perfil de crédito for uma informação pública, ele cobrará uma taxa de 5% de bons pagadores e 40% de maus pagadores.
- b) Mesmo se o Obenk não puder discriminar preços, ele ainda ofertará uma quantidade estritamente positiva de crédito.
- c) O Obenk estaria disposto a incorrer em um custo adicional de 0.75% para cada potencial cliente para revelar o seu perfil de crédito**
- d) Esse é um clássico problema de risco moral, em que o devedor é incentivado a assumir riscos excessivos em suas ações, sabendo que, se as coisas derem errado, o credor sofrerá as perdas.
- e) Nenhuma das alternativas anteriores.

OBJETIVA 7 – BOB FIELDS NETO

Na Obeconomia, um país fechado para o comércio internacional, o equilíbrio no mercado de bens e serviços é dado pela interação entre o consumo, o investimento e os gastos do Governo. O consumo é dado por $C = 30 + \frac{1}{3}Y$, o investimento é dado por $I = 40 - 2 \cdot r$ e os gastos do Governo são $G = 20$, onde Y é a renda nacional, em bilhões de reais, e r é a taxa de juros real da economia, em pontos percentuais.

Além disso, o mercado monetário dessa economia é regido pela demanda por moeda, dada por $M^d = \frac{1000}{r^2}$, e pela oferta de moeda, dada por $M^o = 10$.

Bob Fields Neto, presidente do Banco Central da Obeconomia, está interessado em expandir a oferta de moeda nessa economia, indo de $M_1^o = 10$ para $M_2^o = 40$. *Ceteris paribus*, calcule o impacto dessa política na renda nacional Y e assinale a alternativa correta.

- a) Y irá aumentar em 20 bilhões de reais
- b) Y irá aumentar em 10 bilhões de reais**
- c) Y irá aumentar em 0 bilhões de reais
- d) Y irá cair em 10 bilhões de reais
- e) Y irá cair em 20 bilhões de reais

OBJETIVA 8 – ANIVERSÁRIO DO PRESIDENTE

Três ministros da Obeconomia se reúnem para planejar uma festa de aniversário para o presidente Obeconômico, porém nenhum deles tem a data anotada. Os ministros sabem que o aniversário é em uma das 10 seguintes datas:

Janeiro: 27, 28, 30

Abril: 27, 29

Novembro: 25, 28

Dezembro: 25, 26, 30

O Ministro 1 lembra apenas o mês do aniversário, o Ministro 2 lembra apenas o dia, e os 3 ministros sabem disso. O Ministro 1 começa a reunião dizendo “Eu não sei a data do aniversário, e o Ministro 2 também não.” Ouvindo isso, o Ministro 2 diz “Eu não sabia a data do aniversário, mas agora eu sei.” O Ministro 1 sorri e diz “Agora eu também sei.” Analisando as 10 possíveis datas e as falas dos Ministros 1 e 2, o Ministro 3 marca no calendário o dia do aniversário sem fazer nenhuma pergunta. Que dia é o aniversário do presidente Obeconômico?

- a) 27 de Janeiro
- b) 30 de Janeiro
- c) 27 de Abril
- d) 25 de Novembro**
- e) 30 de Dezembro

OBJETIVA 9 – PROSPECT THEORY

Morreu em 27 de março de 2024 o psicólogo e economista Daniel Kahneman, considerado um dos pais da Economia Comportamental, e recipiente do Prêmio Nobel de Ciências Econômicas em 2002. Uma de suas maiores contribuições foi a Teoria da Perspectiva (ou Teoria do Prospecto), que ilustra como as pessoas avaliam ganhos e perdas de maneira diferente, afetando o comportamento de tomada de decisão de formas que os modelos econômicos convencionais não preveem.

Alice precisa decidir entre duas universidades que tem a mesma mensalidade. A Universidade A ofereceu uma bolsa de estudos de R\$5.000,00, enquanto a Universidade B ofereceu uma bolsa de R\$3.000,00.

Imagine que você está representando a Universidade A e quer convencer Alice a escolher a sua universidade. Você não sabe o que Alice valoriza mais em cada universidade, então precisa focar apenas no aspecto financeiro. Segundo a Teoria da Perspectiva, de que forma você deveria descrever para Alice a decisão a ser tomada?

- a) Apresentar ambas as bolsas de forma neutra, a da Universidade A com R\$5.000 e a da Universidade B como R\$3.000, sem nenhum enquadramento emocional
- b) Apresentar a bolsa da Universidade A como um “bônus” de R\$2.000 em relação à bolsa da Universidade B
- c) **Apresentar a bolsa da Universidade B como uma “perda” de R\$2.000 em relação à bolsa da Universidade A**
- d) Apresentar apenas a bolsa da Universidade A e enfatizar que esta é R\$2.000 a mais do que a segunda melhor opção, sem mencionar explicitamente a Universidade B ou sua bolsa
- e) Apresentar a mensalidade efetiva das duas como R\$3.000 a menos do que o normal. Assim, apenas a Universidade A oferece uma bolsa, de R\$2.000

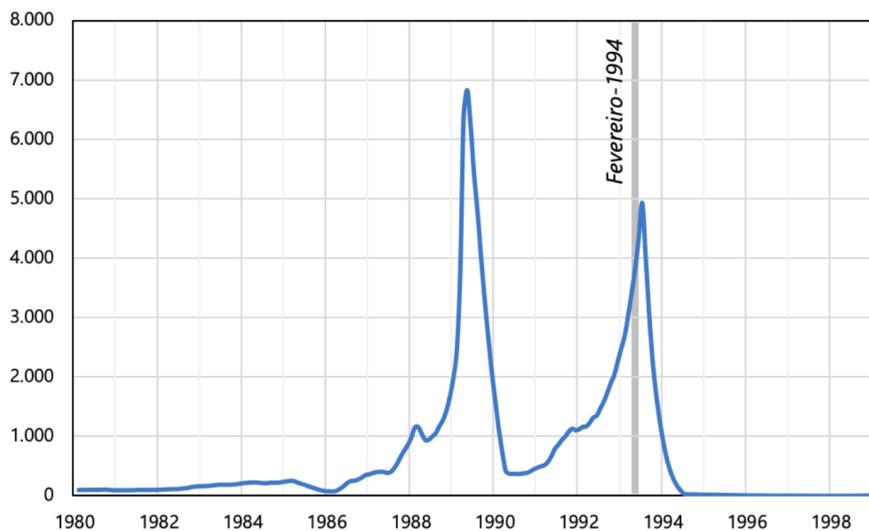
OBJETIVA 10 – TENTE OUTRA VEZ!

A seguir, encontram-se excertos de discursos realizados por parlamentares no Congresso Nacional, no fim de fevereiro de 1994. A partir da análise dos textos, assinale a alternativa que descreve corretamente a medida econômica a que eles se referem.

Seria mais cômodo para o presidente e seu ministério simplesmente se entregarem à administração do cotidiano, deixando a recuperação da moeda para o próximo governo. Mas decidiram enfrentar o problema e, neste final de mandato, correr os riscos inerentes a um plano de estabilização. [...] Afinal, a inflação é responsável pelo estado de miséria e dilaceração social a que estão submetidas imensas parcelas do povo brasileiro.

O fato de o ministro e a equipe econômica do governo virem a este Senado debater revela o dado mais importante desse plano, que é o seu conteúdo democrático. O governo, via ministro Fernando Henrique Cardoso, pretende que o plano de estabilização econômica tenha a adesão e a participação da sociedade brasileira. (Fonte: Agência Senado)

Inflação em 12 meses (%) - IPCA (IBGE)



- É feita referência ao Plano Real, realizado durante a presidência de Fernando Henrique Cardoso. O plano, que pôs fim à hiperinflação, propôs a substituição do cruzado, moeda vinculada ao dólar, que sofria fortes desvalorizações por conta da Crise do Petróleo, pelo Real.
- Visando solucionar o crescimento radical da dívida pública, que afetava os preços do país, a equipe econômica liderada por Fernando Henrique Cardoso desenvolveu o Plano Verão, que criou uma nova

moeda, o cruzeiro, e implementou o câmbio flutuante, que se tornou um dos pilares do tripé macroeconômico.

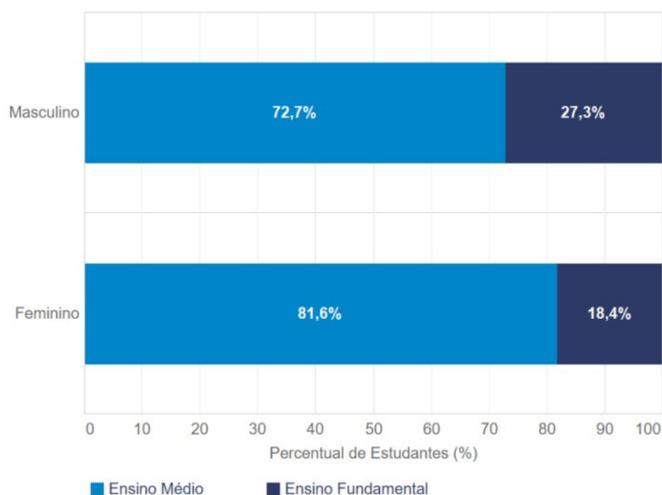
- c) A equipe econômica liderada por Fernando Henrique Cardoso ajudou na implementação do Plano Collor, que foi capaz de mitigar a inflação permanentemente através do radical confisco dos depósitos bancários, embora tenha acarretado em aumento da pobreza e diminuição do PIB.
- d) A medida em questão é o Plano Cruzado, que consistiu na criação de uma nova moeda para substituir o hiperinflacionado cruzeiro, além do congelamento de preços e da taxa de câmbio oficial.
- e) **Os textos se referem ao Plano Real, que conseguiu estabilizar os preços e controlar a inflação a partir da criação da Unidade Real de Valor (URV), da adoção do Real como nova moeda do Brasil e de um ajuste fiscal através do corte de gastos públicos.**

QUESTÕES DISSERTATIVAS

DISSERTATIVA 1 – GÊNERO E MERCADO DE TRABALHO (FGV EESP)

Em 2023, Claudia Goldin venceu o Prêmio Nobel de Economia por sua contribuição com a literatura de Economia do Trabalho. A pesquisadora focou, principalmente, na desigualdade de gênero¹ associada ao mercado de trabalho e tem diversos trabalhos relevantes, tanto do ponto de vista teórico, quanto empírico. A verdade é que não é fácil estudar o tema - já que fica difícil de separar qual parcela do diferencial de salário vem de uma possível discriminação. Os dados indicam que, em média, homens ganham mais do que mulheres, mas o estudo desse diferencial passa por entender o nível de escolaridade de homens e mulheres, a performance de cada sexo na escola e também as escolhas de carreira. Na sequência são apresentados alguns gráficos e dados² a respeito desta temática.

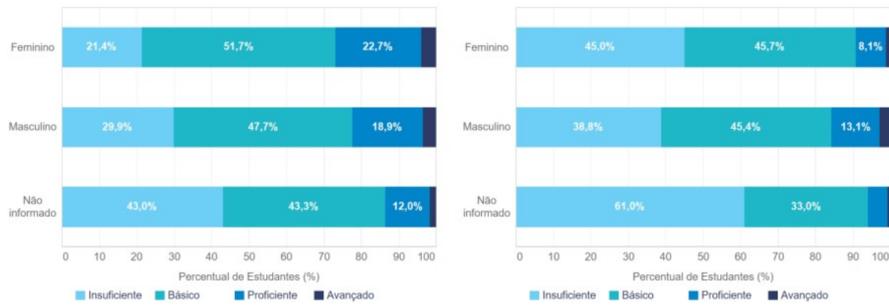
Figura 1: Escolaridade de Jovens de 15 a 17 anos



¹Esta literatura tem avançado rapidamente, mas ainda é feita a simplificação de analisar apenas dois gêneros - feminino e masculino. Isso se dá, acima de tudo, por uma questão de disponibilidade de dados em bases públicas.

²Os dados a seguir todos tem fontes próprias, mas a triagem destes dados foi feito pela pesquisadora Bruna Borges em apresentação na SBE em dezembro de 2022 (Borges (2022)).

Figura 2: Desempenho no Ensino Médio



(a) Língua Portuguesa

(b) Matemática

Figura 3: Conclusão do Ensino Superior

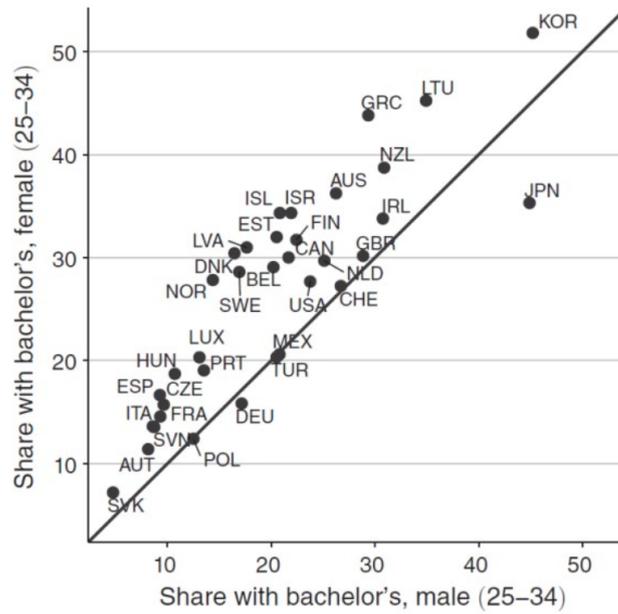
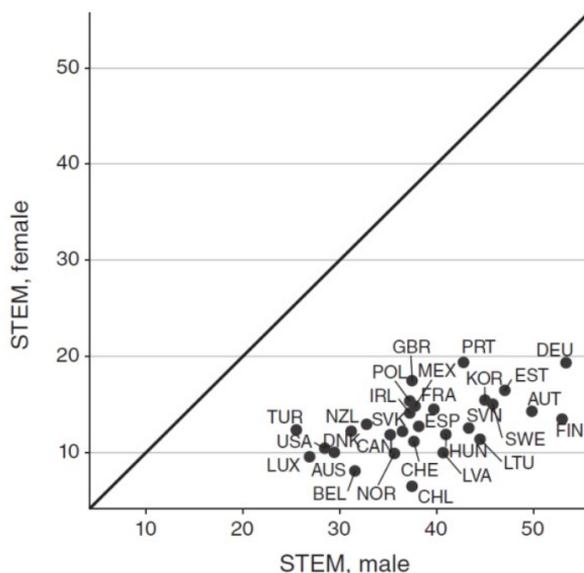
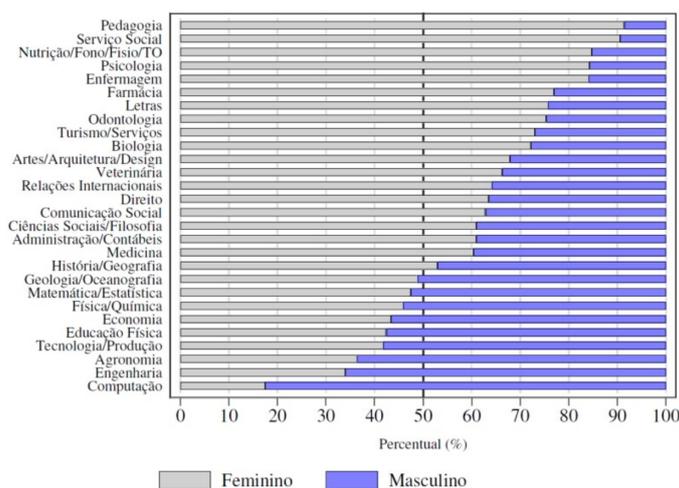


Figura 4: Formação STEM no Ensino Superior



Fonte: As figuras 3 e 4 vieram de Bertrand (2020) e usam dados de 2017 acerca de homens e mulheres entre 25 e 34 anos de idade que possuem ao menos nível de graduação ou equivalente e residem em países da OCDE. “Share with Bachelor’s female” significa “Proporção de mulheres com diploma de graduação”, enquanto “Share with Bachelor’s male” significa “Proporção de homens com diploma de graduação”. Formação “STEM” identifica cursos de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Figura 5: Composição de Gênero nas Carreiras



Alguns achados da literatura:

- Dado 1: Cursos de ensino superior STEM (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática) estão associados a uma remuneração superior no

mercado de trabalho (Kirkeboen et al., 2016).

- Dado 2: Mulheres costumam ter uma performance melhor em ambientes menos competitivos (Ors et al., 2013).
- Dado 3: Parece existir um viés inconsciente de gênero que faz com que agentes da sociedade acreditem que homens tem vantagem relativa em relação às mulheres em alguns contextos:
 1. Professores(as) associam desempenhos melhores em matemática com meninos (Li, 1999), no entanto, existem evidências de que existe um componente cultural a ser levado em consideração. Em países mais igualitários em gênero, meninas e meninos tendem a ter desempenho similar em matemática (Nollenberger et al., 2016).
 2. Avaliadores em testes cegos tendem a ser mais imparciais quanto ao gênero. Goldin e Rouse (2000) estudam uma mudança na forma de contratação de músicos para as orquestras sinfônicas dos Estados Unidos da América - a audição de contratação passou a ser feita de forma cega, sem que os avaliadores vissem os candidatos - com isso, a proporção de mulheres selecionadas aumentou.

Utilize os dados acima para argumentar a favor dos pontos antagônicos apresentados a seguir.

- (a) (50%) “Homens e mulheres são diferentes e tomam decisões de carreira distintas, com isso, homens acabam ganhando mais como um resultado direto de escolhas e vantagens relativas, não de discriminação.”

Solução: A questão permitia uma miríade de raciocínios a serem seguidos. Alguns pontos que seriam desejáveis na resposta: os dados indicam que mulheres, em média, tem um pior desempenho nas ciências exatas e áreas correlatas, e os cursos de ensino superior e as carreiras mais bem pagas e valorizadas pela sociedade são aquelas com mais natureza matemática. Dessa maneira, seria justificado que mulheres ganhem menos e que professores e empregadores associem melhor desempenho aos homens.

- (b) (50%) “Homens e mulheres não são tão diferentes assim e as diferenças existentes são totalmente resultado de aspectos culturais ou preconceitos, logo, não deveria existir nenhum diferencial de gênero no salário e toda a diferença atualmente observada é discriminação.”

Solução: Novamente, a questão permitia uma miríade de raciocínios a serem seguidos. Alguns pontos que seriam desejáveis na resposta: a diferença de performance entre homens e mulheres nas áreas de matemática, por exemplo, pode ser resultado de uma grande influência cultural e de modelos e pessoas exemplares. O apoio que mulheres recebem na hora de escolher sua profissão, por exemplo, caminha na direção contrária dos cursos mais bem remunerados. Se pais, professores e empregadores não tivessem um viés de gênero, esperaríamos que mulheres ganhassem tão bem quanto homens. Dessa maneira, precisamos de medidas que venham incentivar as pautas de diversidade e inclusão, e trazer mais mulheres em

áreas que são usualmente vistas como masculinas, como a matemática e a economia.

DISSERTATIVA 2 – COMPANHIA DAS ÍNDIAS ORIENTAIS (OBECON)

No começo do século XVII, o estabelecimento da Companhia Holandesa das Índias Orientais (CHIA) e a posterior criação da Bolsa de Valores de Amsterdã, onde ações da CHIA eram negociadas, marcaram o início do mercado de ações moderno. Pouco tempo depois, diversos países europeus desenvolveram seus mercados acionários, construindo uma nova forma de adquirir capital. Atualmente, os investidores possuem acesso a uma miríade de diferentes ativos, e bolsas de valores estão presentes em praticamente todas as partes do mundo. Outras instituições financeiras, no entanto, possuem uma história mais antiga. Bancos Comerciais como conhecemos hoje, por exemplo, foram estabelecidos em Veneza, na Itália, em 1157, para financiar os monarcas em suas guerras, e até mesmo a Bíblia faz referências à usura, que é a prática de emprestar dinheiro em troca de juros. Mas afinal, por que surgiram as bolsas de valores?

(a) (20%) Sobre ações e dívida, aponte uma diferença:

- i. (10%) Entre investir em ações e dívida do ponto de vista de um Investidor.

Solução:

- **Investimento em Ações:** Quando um investidor compra ações de uma empresa, ele se torna um acionista e adquire uma parte do capital da empresa. Isso dá ao investidor potencial para ganhar dinheiro através do aumento do valor das ações (apreciação de capital) e/ou de dividendos (quando a empresa distribui lucros aos acionistas). No entanto, o investimento em ações envolve maior risco, pois o valor das ações pode flutuar.
 - **Investimento em Dívida:** Ao investir em dívida, como títulos ou debêntures, o investidor está essencialmente emprestando dinheiro para o governo ou para empresas, em troca de pagamentos de juros regulares e do reembolso do valor do título na data de vencimento. Esse tipo de investimento tende a ser menos arriscado do que investir em ações, pois os pagamentos de juros são geralmente fixos e têm prioridade sobre o pagamento de dividendos. No entanto, o retorno do investimento é geralmente menor do que o potencial retorno do investimento em ações.
- ii. (10%) Entre levantar recursos com ações e dívida do ponto de vista da Empreendedora.

Solução:

- **Captar Recursos com Ações:** Quando uma empresa decide levantar recursos por meio da emissão de ações, ela está essencialmente vendendo uma parte de sua propriedade para investidores. Isso significa que os novos acionistas terão uma participação na empresa, podendo ter direito a voto nas decisões da empresa e a uma parte dos lucros na forma de dividendos.
- **Captar Recursos com Dívida:** Quando uma empresa levanta

recursos por meio de dívida, como empréstimos bancários ou emissão de títulos, ela está assumindo uma obrigação financeira. A vantagem é que a empresa mantém o controle total, pois não precisa vender uma parte do negócio. No entanto, a desvantagem é que a empresa precisará pagar juros sobre a dívida e reembolsar o principal no prazo determinado, o que pode afetar o fluxo de caixa e o lucro da empresa.

Suponha que uma Empreendedora possui uma riqueza inicial de $w_0 = 500$ e uma função de utilidade de $u(w) = \sqrt{w}$. Ela pode investir em um projeto de alto risco, em que há 50% de chance de ganhar 1000 e 50% de ganhar 0, mas para isso ela deve desembolsar 400. Ela possui diversas formas de conseguir os recursos, seja com o capital próprio, seja com capital de terceiros, mas pediu sua ajuda para entender a melhor decisão.

(b) (20%) Com relação à decisão de investimento:

- i. (10%) Calcule, aproximadamente, a utilidade da Empreendedora ao não realizar o projeto.

Solução: Caso a Empreendedora não realize o projeto, ela terá a sua riqueza original, portanto:

$$U = \sqrt{w_0} = \sqrt{500} \approx 22.36$$

- ii. (10%) Calcule, aproximadamente, a utilidade da Empreendedora ao realizar o projeto, financiando com o capital próprio.

Solução: Caso a Empreendedora financie o projeto com dinheiro próprio, ela terá a sua riqueza original acrescida dos lucros obtidos em cada cenário. Logo:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sqrt{w_0 + L - C} + \frac{1}{2} \sqrt{w_0 - C} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{500 + 1000 - 400} + \frac{1}{2} \sqrt{500 - 400} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1100} + \frac{1}{2} \sqrt{100} \\ &\approx 21.58 \end{aligned}$$

Note que, como a utilidade de não investir é maior que a de investir, temos que a Empreendedora não deverá investir.

- (c) (30%) Considere que um banco pode emprestar dinheiro para a Empreendedora, e seu custo de oportunidade é um investimento com retornos de 30% em um mercado de crédito perfeitamente competitivo. Entretanto, se o projeto não der certo, o Banco espera que a Empreendedora dê um calote em sua dívida e não pague nem os juros, nem o capital investido.

- i. (5%) Calcule a taxa de juros que o Banco cobrará da Empreendedora considerando o risco de *default*, isto é, calote.

Solução: Por ser um mercado de crédito perfeitamente competitivo, o banco cobrará um preço, isto é, uma taxa de juros, tal que o retorno esperado do investimento seja igual ao custo de oportunidade, isto é, o retorno da outra opção de investimento. Lembrando que em caso de calote, o retorno será 0. Sendo r a taxa de retorno que o banco irá cobrar e D o volume emprestado, temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1+r)D + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot D &= (1+30\%)D \implies \\ \frac{1}{2}(1+r) &= 1+30\% \implies \\ r &= 160\%\end{aligned}$$

Ou seja, a taxa de juros cobrada pelo banco será de 160%

- ii. (10%) Calcule a utilidade da Empreendedora ao financiar o projeto utilizando apenas o capital do banco.

Solução:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}\sqrt{w_0 + L - (1+r)C} + \frac{1}{2}\sqrt{w_0} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{500 + 1000 - 2.6 \cdot 400} + \frac{1}{2}\sqrt{500} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{460} + \frac{1}{2}\sqrt{500} \\ &\approx 21.90\end{aligned}$$

- iii. (15%) Compare com o resultado na (b) e indique se ela irá realizar o projeto ou não. Explique a intuição por trás do resultado e por que os empreendedores não só tomam empréstimos do banco para investir.

Solução: Como podemos ver, apesar do projeto ter uma utilidade esperada maior ao adquirir crédito com o banco, ao invés de financiar do próprio bolso, a empreendedora ainda possui uma utilidade esperada maior não realizando tal investimento. Na vida real, as taxas de bancos por vezes podem ser muito caras para corrigir o risco de *default*, e a estratégia da empreendedora de dar calote na dívida pode gerar sérias consequências. Em projetos de alto risco, bancos exigem um custo da dívida é extremamente alto para compensar os potenciais prejuízos e isso acaba por inviabilizar alguns projetos que são rentáveis.

- (d) (30%) Considere agora que a Empreendedora pode ir para a Bolsa de Valores para procurar recursos para o seu projeto. Lá, ela encontra outras 99 pessoas interessadas em investir, cada uma contribuindo com 1% do capital necessário em troca do direito de receber 1% dos lucros. Assim, a Empreendedora também contribuiria com 1% do capital e teria 1% dos lucros.

- i. (15%) Calcule a utilidade da Empreendedora ao financiar o projeto contribuindo apenas 1% do capital necessário mas recebendo também

1% dos lucros.

Solução:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}\sqrt{w_0 + 1\% \cdot (L - C)} + \frac{1}{2}\sqrt{w_0 - 1\%C} \\&= \frac{1}{2}\sqrt{500 + 1\% \cdot (1000 - 400)} + \frac{1}{2}\sqrt{500 - 1\% \cdot 400} \\&= \frac{1}{2}\sqrt{506} + \frac{1}{2}\sqrt{496} \\&\approx 22.38\end{aligned}$$

- ii. (15%) Compare com o resultado obtido no item (b) e indique se ela irá realizar o projeto ou não. Explique a intuição por trás do resultado e o porquê das civilizações inventarem mercados acionários ao invés de funcionarem apenas com os empreendedores investindo o capital próprio nos projetos.

Solução: Dessa vez, a utilidade obtida ao realizar o projeto dividindo os lucros e os riscos é maior do que não realizar o projeto para a empreendedora. Isso ocorreu nesse caso mas não nos outros pois a empreendedora é aversa ao risco, o que pode ser observado por sua função de utilidade $u(w) = \sqrt{w}$ côncava. Assim, ela acaba valorizando situações em que corre menos risco, mesmo que isso signifique fazer uma menor participação nos lucros da empresa. Comparando com os outros itens, concluímos que, nesse caso em específico, o financiamento via Bolsas de Valores trouxe mais utilidade para a Empreendedora do que (i) não realizar o projeto, (ii) realizar o projeto com capital próprio e (iii) realizar o projeto com financiamento bancário.

Esse é o motivo da civilização ter adotado largamente o modelo de financiamento de grandes empresas através do mercado acionário. Eles são capazes mitigar os riscos e os retornos de empreendedores e, ao combinar diversos investimentos com menor risco, diversificando o portfólio, pode-se ainda conseguir ótimos retornos, o que é mais atrativo que apostar alto em um único projeto e ter grandes lucros caso haja sucesso, mas um prejuízo tão grande quanto, caso não haja sucesso.

DISSERTATIVA 3 – PICOLÉ (FGV EESP)

Dois vendedores de picolé, A e B , chegam a uma praia, que vamos caracterizar como uma linha reta de tamanho 1. Vamos assumir algumas coisas sobre o consumo de picolé. Vamos assumir que a quantidade de consumidores é normalizada para 1 e que os consumidores são contínuos, ou seja, os consumidores estão espalhados uniformemente ao longo da praia, ou seja, ao longo do intervalo $[0, 1]$. Além disso, os consumidores não gostam de andar para consumir o picolé. Isso implica que um consumidor nesse intervalo tem uma desutilidade de t por unidade de distância que precisa percorrer para chegar na barraca de picolé escolhida. Por exemplo, o consumidor localizado no ponto i do intervalo tem uma desutilidade de $t \cdot d$ para consumir o picolé na barraca localizada no ponto A (assumindo que $A - i = d$), além do preço pago pelo picolé.



Vamos assumir que todos os consumidores no intervalo obrigatoriamente compram um picolé e para isso escolhem a barraca que lhes dá a menor desutilidade (incluindo o custo de andar e o preço pago). Responda às seguintes perguntas:

- (a) (30%) Assuma que as barracas de picolé A e B estão localizadas nos pontos 0.1 e 0.7 do intervalo, respectivamente, e que o preço cobrado é igual a 1 nas duas barracas. Calcule o número de consumidores que escolhem a barraca A para consumir seu picolé como função de t e d .

Solução: Como os preços são iguais, a decisão de qual barraca escolher depende apenas da distância. Consumidores localizados mais perto da barraca A consumirão na barraca A , e aqueles localizados mais perto da barraca B consumirão na barraca B . Os consumidores no intervalo $(0, 0.4)$ estão mais perto da barraca A , e aqueles no intervalo $(0.4, 1)$ estão mais perto da barraca B .

Portanto, 0.4 consumirão na barraca A e 0.6 na barraca B .

- (b) (30%) Considere que agora as barracas A e B estão fixas nos pontos 0 e 1. E assumo que agora elas cobram preços diferentes. A barraca A é mais cara e cobra 2, já a barraca B cobra 1. Qual o número de consumidores que escolhem consumir em A ?

Solução: A quantidade de consumidores será determinada pela soma do preço e da desutilidade de ir até a barraca. Seja d a distância de um consumidor arbitrário até a barraca A . O ponto de indiferença entre consumir

em A ou B é dado pela equação

$$2 + t \cdot d = 1 + t(1 - d)$$

$$2 + td = 1 + t - td$$

$$1 + 2td = t$$

$$d = \frac{t - 1}{2t} = \hat{d}$$

Como d é a distância até a barraca A, todos os consumidores cuja distância até a barraca A é menor que \hat{d} consumirão na barraca A. Portanto a quantidade de consumidores da barraca A é

$$\hat{d} = \frac{t - 1}{2t}$$

- (c) (40%) Considere que os vendedores voltaram a cobrar preços iguais nas duas barracas e esse preço é 1. Mas agora cada vendedor escolher onde se localizar no intervalo de forma a maximizar a venda dos seus picolés. Ou seja, A e B escolhem sua localização simultaneamente de forma vender o máximo que podem (e um está competindo com o outro em vendas). Em que ponto(s) cada vendedor escolhe se situar na praia? Explique cuidadosamente a sua resposta.

Solução: Imagine que começamos na situação ilustrada na alternativa (b): o vendedor A está no ponto 0 e o vendedor B está no ponto 1. No momento, cada um tem metade das vendas (ou seja, o vendedor A vende no intervalo $(0, 0.5)$). Agora imagine que o vendedor A se desloca para o ponto $\frac{1}{3}$. Todos à sua esquerda continuam consumindo na barraca A, mas os consumidores que estão no intervalo $(0.5, \frac{2}{3})$ ficam mais perto de A do que de B e escolhem consumir em A. Portanto, o vendedor A vende para todos no intervalo $(0, \frac{2}{3})$. O vendedor B, vendo isso acontecer, também se move em direção ao centro para voltar a estar mais perto dos consumidores que acabou de perder. Essa dinâmica se repete até que ambos estejam no ponto 0.5, ou seja, na metade da praia.

Para testar essa conclusão, imagine que ambos estão na metade da praia e o vendedor A decide se deslocar 0.1 para a esquerda, chegando no ponto 0.4. Agora o vendedor A vende para o intervalo $(0, 0.45)$ —ou seja, menos gente do que quando estava no meio. Isso é verdade para qualquer deslocamento arbitrário: o vendedor A passa a vender menos do que quando estava no meio. Portanto, ele escolhe voltar para o meio, que é o equilíbrio de Nash desse jogo.

DISSERTATIVA 4 – GERAÇÕES SOBREPOSTAS (OBECON)

No ano de 2023, morreram os macroeconomistas Robert Solow e Robert Lucas Jr., ganhadores dos prêmios Nobel de Economia de 1987 e 1995, respectivamente. Eles contribuíram extensamente para a teoria econômica, lançando as bases para a modelagem macroeconômica como conhecemos hoje. Analisaremos um modelo macroeconômico conhecido como *modelo das gerações sobrepostas*.

Numa economia fechada sem intervenção governamental, as pessoas vivem por dois períodos: juventude e velhice. Os jovens trabalham, consomem, e poupam. Os idosos apenas consomem, usando o dinheiro que pouparam quando eram jovens (ou seja, os idosos não trabalham). Todos conhecem o funcionamento dessa economia. Note que embora as pessoas vivam apenas por dois períodos, a economia é perpétua, e novos indivíduos nascem para substituir os que morreram.

Suponha que não há progresso tecnológico, e a população cresce a uma taxa constante n . Cada indivíduo jovem trabalha 1 unidade de trabalho e recebe um salário w por essa unidade de trabalho. Desse salário, cada indivíduo poupa uma quantia s , que rende a uma taxa de juros r .

- (a) (25%) Escreva a restrição orçamentária (equação que relaciona salário, consumo, e poupança) para grupo etário.

Solução: Denote por C_1 o consumo quando jovem e por C_2 o consumo quando idoso. Então, a restrição no primeiro período é dada pelo consumo e pela poupança no período:

$$C_1 + s = w$$

Já quando você é idoso, sua renda é dada pela poupança e o juros recebido:

$$C_2 = (1 + r)s$$

Podemos unir essas duas equações:

$$C_2 = (1 + r)s = (1 + r)(w - C_1) \implies (1 + r)C_1 + C_2 = (1 + r)w$$

- (b) (25%) Imagine agora que essa economia pode ter um governo. Esse governo tem o poder de tomar uma quantia d de cada jovem e transferir o montante total para os idosos. Quanto cada idoso receberia do governo? Qual seria a “taxa de retorno” dessa transferência?

Solução: Como o número de jovens está crescendo a uma taxa de n , temos que existem $1 + n$ jovens para cada idoso. Assim, cada idoso receberá $(1 + n)d$ no futuro. Como cada idoso contribui com d quando era jovem, a taxa de retorno desse processo é: $\frac{(1+n)d}{d} - 1 = n$.

- (c) (25%) Imagine que a população dessa economia precisa escolher se quer introduzir ou não esse governo. Qual a condição para que a população prefira introduzir o governo?

Solução: Como a população tem à disposição uma poupança com taxa de retorno r , temos que a população irá preferir introduzir o governo se esse processo de transferência é mais rendoso do que a poupança, isto é, sempre que $r < n$.

- (d) (25%) O modelo acima é uma versão simplificada de um modelo de gerações sobrepostas, que é muito útil para estudar um importante problema do mundo real. Qual é esse problema? Faça uma interpretação qualitativa do resultado encontrado no item c) no contexto desse problema.

Solução: O problema referido é o de previdência pública. O principal ponto desejado na interpretação é que, segundo esse modelo, um sistema de previdência pública é mais desejável se a taxa de crescimento da população for maior que a taxa de juros. Caso contrário, um sistema de previdência privada seria mais desejável.

DISSERTATIVA 5 – POLÍTICA FISCAL (OBECON)

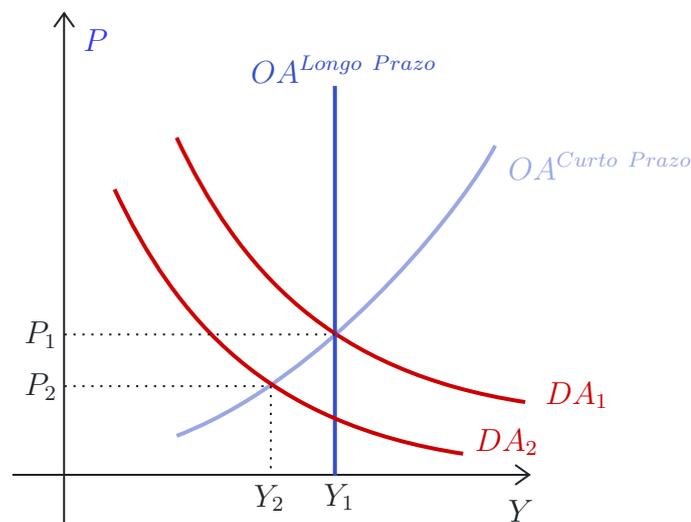
A demanda agregada no país fictício Obeconlândia é dada por:

$$DA = C + I + G + (X - M)$$

Sendo C o consumo das famílias, I o investimento privado, G o gasto do governo, X as exportações e M as importações. O consumo C é dado por $C = c_0 + c_1(Y - T)$. No equilíbrio, a demanda agregada é equivalente ao PIB, denotado por Y , que pode ser calculado por $Y = C + S + T$, em que S é a poupança privada e T a arrecadação do governo via tributos. A demanda agregada é negativamente relacionada ao nível de preços. A oferta agregada de longo prazo é constante em Y^* e determinada pelas características econômicas particulares ao país. Já a oferta agregada de curto prazo possui uma relação positiva com os preços.

- (a) (25%) Tudo ocorria bem na Obeconlândia, até que eventos geopolíticos globais reduziram fortemente a confiança dos consumidores, diminuindo c_1 . Represente graficamente o movimento observado nas curvas de demanda agregada e oferta agregada, destacando seus impactos no preço e no PIB. Quais medidas fiscais o governo poderia realizar para mitigar as consequências desse evento? *Dica: em $t = 0$, as curvas devem apontar Y^* como o PIB em equilíbrio.*

Solução: Foi observado um choque negativo na demanda agregada:



Como mostrado no gráfico, o choque na demanda resulta em uma diminuição do produto (Y) da economia e de uma diminuição no nível de preços, *ceteris paribus*. Ademais, o Governo pode adotar políticas fiscais expansionistas para tentar impulsionar a demanda agregada. Alguns exemplos seriam diminuição de impostos T e aumento de gastos públicos G .

- (b) (25%) Após as adversidades, o governo da Obeconlândia decidiu realizar medidas para fortalecer a indústria nacional e tornar o país autossuficiente. Para isso, ele decidiu investir na produção de automóveis, que até então eram completamente importados de países especializados no produto. Sua

expectativa é de diminuir em 20% as importações do país. No entanto, ele precisaria aumentar o total arrecadado em 10%. Calcule a variação esperada no PIB após essas medidas.

Solução: Note que:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G + X - M \\ &= c_0 + c_1(Y - T) + I + G + (X - M) \implies \\ (1 - c_1)Y &= c_0 - c_1T + I + G + (X - M) \implies \\ Y_1 &= \frac{c_0 - c_1T + I + G + (X - M)}{1 - c_1} \end{aligned}$$

Dessa forma, quando T aumenta em 10% e M diminui em 20% temos que:

$$Y_2 = \frac{c_0 - 1.1 \cdot c_1T + I + G + (X - 0.8M)}{1 - c_1}$$

Portanto, *cteris paribus* a diferença de renda nacional é dada por:

$$\begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= \frac{c_0 - 1.1 \cdot c_1T + I + G + (X - 0.8M)}{1 - c_1} - \frac{c_0 - c_1T + I + G + (X - M)}{1 - c_1} \\ &= \frac{-0.1T + 0.2M}{1 - c_1} \end{aligned}$$

- (c) (25%) A decisão por uma política industrial protecionista é matéria de discussão dentro do governo da Obeconlândia. Disserte sobre argumentos favoráveis e contrários a subsidiar a indústria nacional. Cite ao menos 3 diferentes argumentos, desconsiderando as expectativas numéricas do governo.

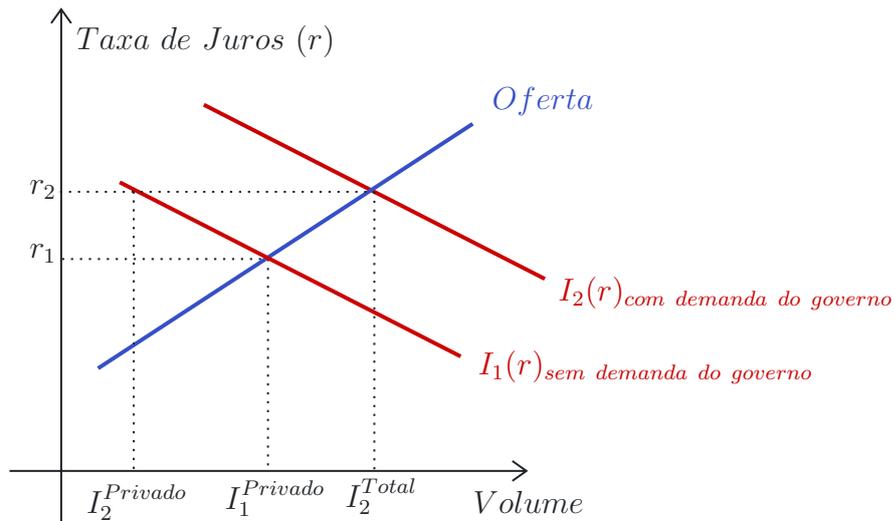
Solução: Diversas respostas são admissíveis. Uma lista (não-extensiva) de argumentos possíveis são:

- **Favoráveis:** (i) proteção de indústrias estratégicas geopoliticamente; (ii) desenvolvimento de uma cadeia de mantimentos com externalidades positivas e que não são internalizadas pela iniciativa privada, impedindo o investimento privado (ou ainda porque a iniciativa privada pode não ter capital disponível para tal), (iii) ajudar indústrias infantis a se estabilizarem; (iv) possível proteção contra práticas monopolistas de outras empresas do setor; entre outros.
- **Contrários:** (i) o país pode não estar investindo em uma indústria onde possui vantagens comparativas, ou seja, existe uma ineficiência na alocação de capital; (ii) desvio de capital de indústrias lucrativas de acordo com os investidores privados; (iii) aumento de problemas fiscais/ da dívida pública; (iv) problemas políticos (corrupção, desvio de dinheiro, etc.); entre outros.

- (d) (25%) O governo considera se endividar para financiar seus gastos em de-

envolvimento, mas tem medo de que isso poderia reduzir o investimento privado. Justifique essa preocupação graficamente, tendo em vista que a demanda por investimento $I(r)$ é uma função da taxa de juros real, r . *Dica: considere também uma curva de oferta de investimento em função da taxa de juros.*

Solução: A curva de oferta de investimentos é crescente no preço dos fundos emprestáveis, ou seja, quanto maior a taxa de juros, maior a oferta. Já a demanda, representada por $I(r)$, é negativamente relacionada à taxa de juros. Segue uma representação gráfica do modelo de *crowding out*:



DISSERTATIVA 6 – TEORIA DO PORTFÓLIO (OBECON)

O estudo das área de finanças pode ser facilmente dividido em duas épocas: antes e depois de Harry Markowitz. O economista, falecido em 22 de junho de 2023, foi um dos primeiros acadêmicos a introduzir conceitos matemáticos abstratos e rigor na tomada de decisões de investimento. Ao fazê-lo, desencadeou uma revolução na forma como os mercados financeiros são compreendidos. Apesar da ideia de diversificação, isto é, não colocar todos os ovos em uma única cesta, já ser amplamente conhecida, Markowitz ensinou ao mundo como diversificar sistematicamente, isto é, quantos ovos deveriam ser colocados em cada uma das cestas.

A questão a seguir busca introduzir a Teoria do Portfólio Eficiente de Markowitz.

(a) (15%) Explique o que são os seguintes conceitos:

i. (5%) Ativos Financeiros

Solução: Ativos financeiros são instrumentos financeiros que têm valor monetário e são utilizados para investimento ou negociação nos mercados financeiros. Eles incluem uma variedade de instrumentos, como ações, títulos, debêntures, fundos mútuos, derivativos, entre outros.

ii. (5%) Portfólio

Solução: Um portfólio se refere a uma coleção ou combinação de ativos financeiros mantidos por um indivíduo, organização ou fundo de investimento. Investidores podem escolher combinar diferentes ativos financeiros ao invés de investir em apenas uma oportunidade de investimentos.

iii. (5%) *Trade-off* risco-retorno

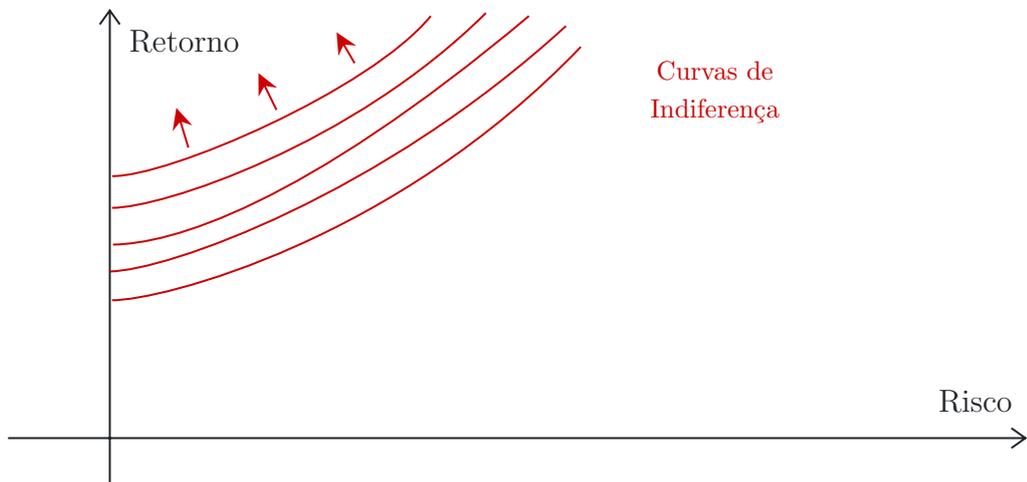
Solução: O *trade-off* risco-retorno é um conceito que descreve a relação entre o risco associado a um investimento e o potencial retorno que ele pode gerar. Geralmente, investimentos com maior risco oferecem a possibilidade de maior retorno, enquanto investimentos com menor risco tendem a proporcionar retornos mais baixos. Por exemplo, ações de empresas jovens e de crescimento rápido podem ter retornos elevados, mas também estão sujeitas a maior volatilidade e risco de perda. Por outro lado, títulos de empresas sólidas ou governos geralmente têm risco mais baixo, mas os retornos são mais estáveis e previsíveis.

Considere para os próximos itens dessa questão o seguinte gráfico. Nota-se que não há elementos visuais pois alguns dos itens a seguir pedirão para você adicioná-los no gráfico. Sugerimos que você desenhe um gráfico para cada um dos itens.



- (b) (15%) Desenhe curvas de indiferença de um investidor avesso ao risco nesse gráfico.

Solução: Como o investidor é avesso ao risco, para cada unidade de risco a mais que ele incorre, maior o retorno necessário para ele ficar indiferente entre uma situação livre de risco. Dessa forma elas são positivamente inclinadas.



Partiremos agora para o modelo de mercado financeiro proposto por Markowitz. Considere a Bolsa Obeconômica, em que temos listados duas empresas:

- Arrow & Debreu S.A. (A) - Uma empresa estabelecida de consultoria estratégica renomada por seus modelos.
- Banerjee Corps. (B) - Uma *fintech* focada em oferecer serviços bancários de baixo custo.

Considere que o retorno esperado do preço da ação da empresa A é dado por $R_A = 6\%$ e a variância é dada por $\sigma_A^2 = 9\%$ e o retorno para a empresa B é de $R_B = 13\%$ e a variância é de $\sigma_B^2 = 16\%$. Por fim, a covariância entre as ações é de $\sigma_{AB} = -12$.

(c) (40%) Markowitz propunha a existência de uma fronteira eficiente de Portfólio, isto é, um retorno associado a cada tolerância de risco de forma que não se pode melhorar um dos fatores sem piorar os outros. Para isso, buscaremos uma fórmula para o retorno eficiente $R(x)$ do portfólio para cada risco tolerado x , medido pela variância do portfólio.

- i. (10%) Escreva o retorno esperado $R_P(s)$ e a variância $\sigma_P^2(s)$ do portfólio P em função de s , que é a fração do portfólio alocada no ativo A .

Solução: Se alocarmos s do portfólio no ativo A e, conseqüentemente, $1 - s$ no portfólio B , teremos um retorno de:

$$\begin{aligned} R_P &= \mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[sB + (1 - s)A] \\ &= s\mathbb{E}[A] + (1 - s)\mathbb{E}[B] \\ &= sR_A + (1 - s)R_B \\ &= 6 \cdot s + 13 \cdot (1 - s) \\ &= 13 - 7s \end{aligned}$$

Já com relação à variância:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \text{Var}(sA + (1 - s)B) \\ &= s^2\text{Var}(A) + 2s(1 - s)(A, B) + (1 - s)^2\text{Var}(B) \\ &= 9 \cdot s^2 + 2 \cdot (-12) \cdot s(1 - s) + 16 \cdot (1 - s)^2 \\ &= 9s^2 + (-24s + 24s^2) + (16 - 32s + 16s^2) \\ &= 49s^2 - 56s + 16 \\ &= (7s - 4)^2 \end{aligned}$$

- ii. (10%) Na fórmula da variância σ_P^2 , resolva para s , isto é, encontre, para cada variância σ_P^2 , quais alocações $s(\sigma_P^2)$ são compatíveis com essa variância.

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= (7s - 4)^2 \implies 7s - 4 = \pm\sigma_P \\ \implies s &= \frac{4}{7} \pm \frac{1}{7}\sigma_P\end{aligned}$$

- iii. (10%) Substitua $s = s(\sigma_P^2)$ na fórmula do retorno esperado $R_P(s)$ para encontrar a fórmula da fronteira eficiente em que cada variância σ_P^2 é associado um retorno $R_P(\sigma_P^2)$.

Solução: Note que como $R_P(s)$ é decrescente em s , para um σ_P^2 fixo, a fronteira eficiente terá como retorno o correspondente ao menor dos resultados para s . Assim:

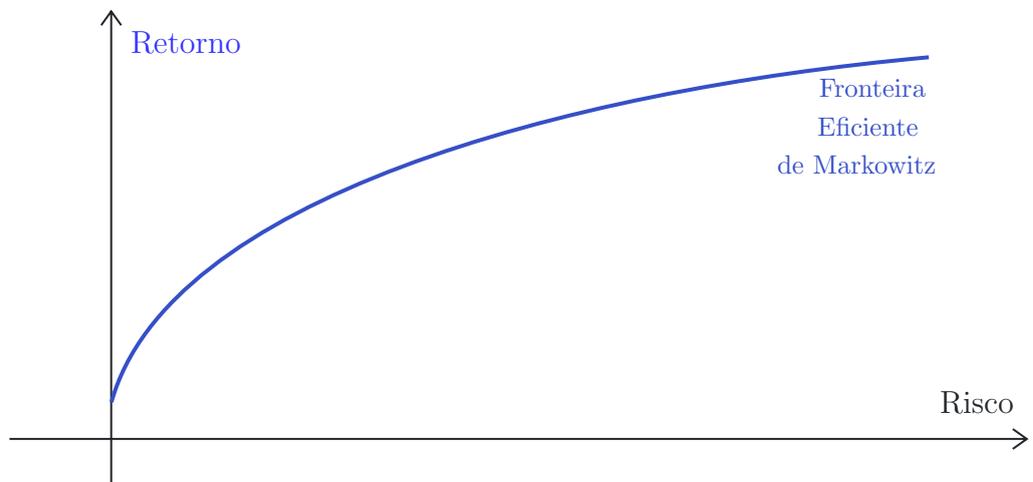
$$\begin{aligned}R_P &= 13 - 7s \\ &= 13 - 7 \cdot \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{7}\sigma_P\right) \\ &= 13 - 4 + \sigma_P \\ &= 9 + \sqrt{\sigma_P^2}\end{aligned}$$

- iv. (10%) Desenhe no gráfico a *Fronteira Eficiente de Markowitz*, $R_P(\sigma_P^2)$. Note que apenas parte das alocações possíveis realmente é eficiente.

Solução: Dessa forma, se tivermos um gráfico cujo eixo y é dado por R_P e o eixo x é dado por σ_P^2 , teremos que a equação da fronteira eficiente será:

$$y = 9 + \sqrt{x}$$

Portanto:



- (d) (15%) Considere agora a existência de um ativo livre de risco com um retorno esperado $R_F = 10\%$. O portfólio de mercado é aquele que maximize uma métrica de performance de retorno dada por:

$$\psi = \frac{R_P - R_F}{\sigma_P^2}$$

Em um gráfico:

- i. (5%) Represente o portfólio composto pelo ativo livre de risco.
- ii. (5%) Represente o portfólio composto pelo portfólio de mercado.
- iii. (5%) Represente a *Reta do Mercado de Capitais*, que são as possibilidades de risco e retorno em um portfólio composto pelo portfólio de mercado e ativos livre de risco.

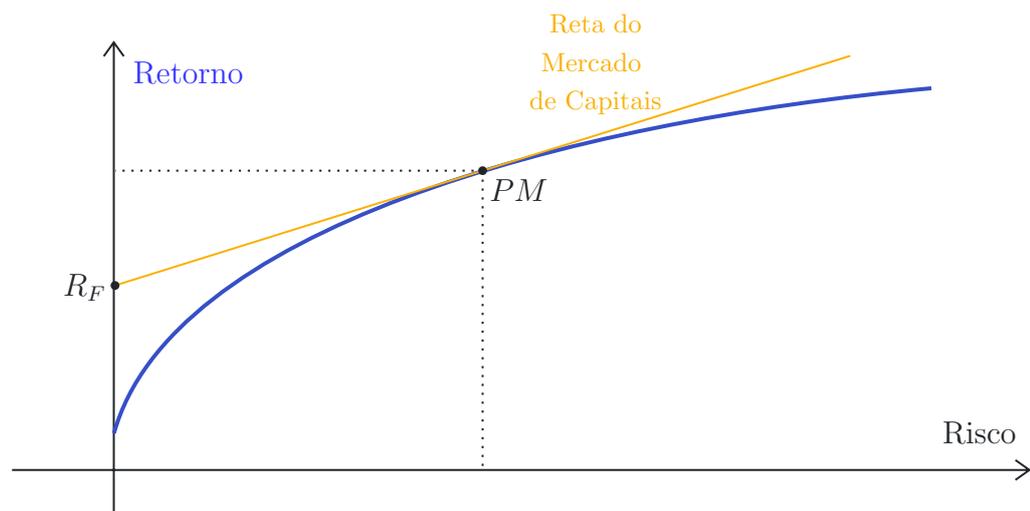
Solução: O portfólio livre de risco terá, por definição, risco 0 e, portanto, estará sobre o eixo y na altura R_F .

Note que a métrica ψ para um portfólio P é a inclinação da reta que passa pelo portfólio livre de risco e pelo próprio portfólio P :

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{R_P - R_F}{\sigma_P^2 - 0} = \frac{R_P - R_F}{\sigma_P^2}$$

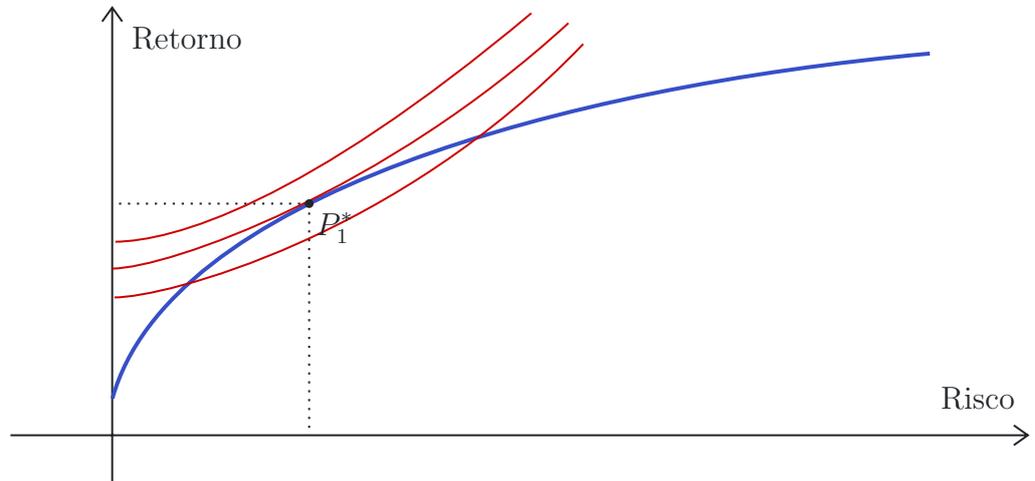
Se o portfólio de mercado PM maximiza essa métrica, a reta de mercado de capitais será a reta que passa pelo portfólio livre de risco e que é tangente à fronteira eficiente de Markowitz. Isso ocorre pois, se a reta estiver abaixo da tangente, há portfólios melhores; e se a reta está acima da tangente, não existe um portfólio de mercado que atinge essa métrica.

Logo, temos o seguinte gráfico:



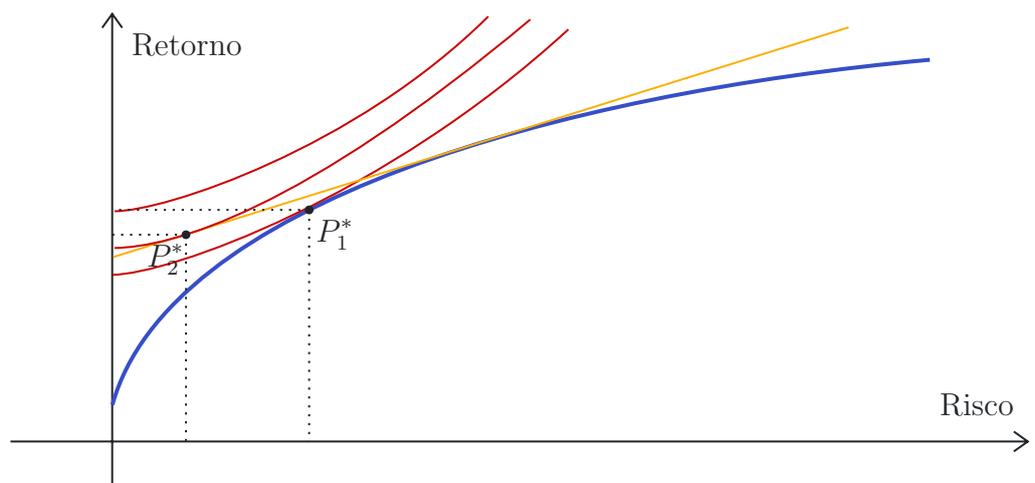
- (e) (15%) Por fim, represente em três gráficos distintos:
- i. (5%) O portfólio de ativos arriscados que maximiza a utilidade do investidor.

Solução: Analogamente à teoria microeconômica, o portfólio arriscado que maximiza a utilidade do investidor é aquele em que a curva de indiferença é tangente à fronteira eficiente de Markowitz, que são as possíveis combinações risco-retorno dada pelos ativos arriscados. Isso é representado pelo ponto P_1^* abaixo.



- ii. (5%) O portfólio de ativos arriscados e livres de riscos que maximiza a utilidade do investidor.

Solução: Analogamente à teoria microeconômica, o portfólio que maximiza a utilidade do investidor é aquele em que a curva de indiferença é tangente à reta do mercado de capitais, que são as possíveis combinações risco-retorno dada pelos ativos arriscados e não arriscados. Isso é representado pelo ponto P_2^* na figura abaixo. Note que a curva de indiferença é superior à de P_1^* , logo o investidor se beneficia da possibilidade de investir em ativos livres de risco.



- iii. (5%) A reta do mercado de capitais, caso o retorno livre de risco suba para $R_F = 12\%$.

Solução: Se a taxa livre de risco aumenta, isso significa que as combinações de ativos arriscados e livres de risco que maximizam ψ muda e, conseqüentemente, o portfólio de mercado muda. No entanto, a reta de mercado de capitais continua sendo aquela que passa pelo (novo) portfólio livre de risco e é tangente à fronteira eficiente de Markowitz, que permanece a mesma.

