Olimpíada Brasileira Online de Astronomia

1ª Fase - 5 de outubro de 2024

Nome: ______________________________

Série: ______________________________

Nível JS
Ensino Fundamental
8ª e 9ª séries

Instruções de Prova

I. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos das **8ª e 9ª séries do ensino fundamental.** Ela contém **vinte** questões. Cada questão tem valor de 10 ponto e a prova um total de 80 pontos.

II. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na próxima página.

III. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.

IV. A duração máxima desta prova é de **três** horas.

Apoio:

AstroBioFísica
Prof. Flávia e Virgílio

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	

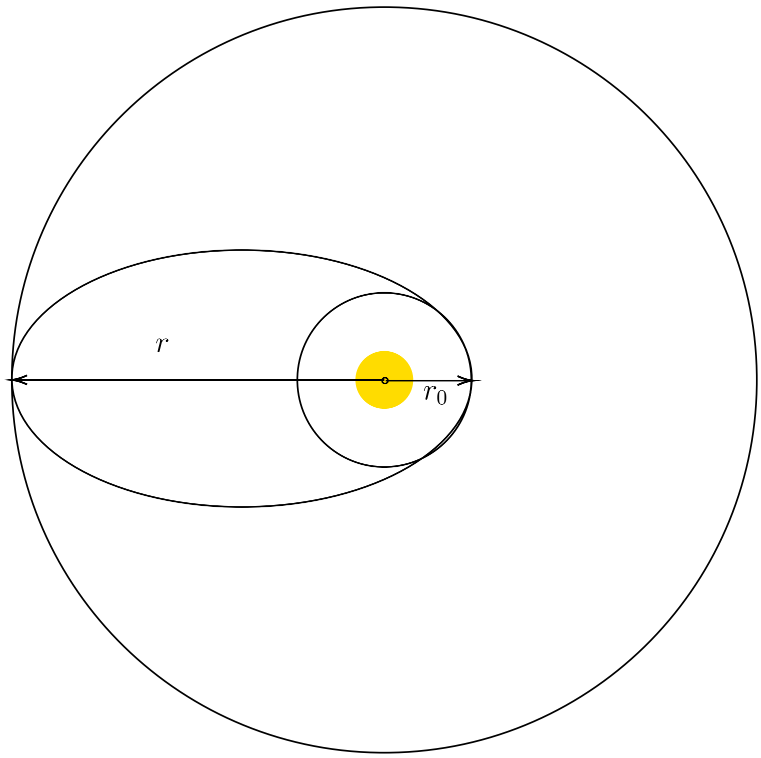
Curiosidades:

João Evangelista Steiner, mais conhecido como João Steiner (São Martinho, 1 de março de 1950 — São Martinho, 10 de setembro de 2020), foi um astrofísico brasileiro que se destacou na pesquisa de galáxias ativas e na formação de aglomerados de galáxias, tendo contribuições significativas nessas áreas. Além disso, desempenhou um papel fundamental na educação científica, orientando estudantes e inspirando futuros cientistas, ocupou cargos importantes em instituições, promovendo o desenvolvimento da pesquisa astronômica no Brasil. Sua dedicação e paixão pela ciência o tornaram uma figura respeitada na comunidade científica.

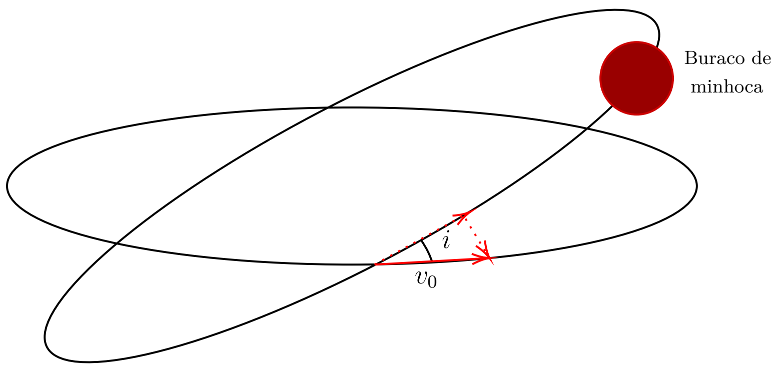
Questão 1. Para comemorar os 10 anos do lançamento de *Interstellar*, de Christopher Nolan, o filme voltou às telas dos cinemas brasileiros, relembrando o público de sua trama marcante sobre ciência e conexão humana. A história segue Joseph Cooper, um piloto e ex-engenheiro que embarca em uma missão arriscada: encontrar um novo planeta habitável para a humanidade, enquanto a Terra sofre com a escassez de recursos naturais.

No filme, a equipe liderada por Cooper tem a missão de atravessar um buraco de minhoca próximo a Saturno, escapando assim do sistema solar em busca de melhores oportunidades para o futuro da humanidade. No entanto, o professor Brand perdeu os cálculos essenciais para direcionar a nave até o buraco de minhoca. Agora, cabe a você ajudá-lo nos próximos itens.

(a) O primeiro desafio é que a nave tripulada se encontra em uma órbita circular de raio $r_0 = 1$ U.A ao redor da Terra, mas precisa alcançar uma órbita de raio $r = 9,6$ U.A, aproximadamente a distância de Saturno. Supondo ambas as órbitas como circulares e que a transferência ocorre por meio de uma órbita elíptica de Hohmann, calcule o tempo necessário, em anos, para que a nave saia da órbita inicial e chegue à órbita de Saturno.



(b) Agora que a nave atingiu a órbita de Saturno, observamos que o buraco de minhoca não está alinhado com o plano da eclíptica, conforme ilustrado na figura abaixo. Assim, é necessário ajustar a inclinação da órbita atual para um ângulo de $i = 60°$. Dado que a massa da nave é $m = 8 \times 10^3$ kg e que ela se encontra em um dos pontos de interseção entre os dois planos, determine a menor variação na energia cinética necessária para que a nave entre na nova órbita e consiga acessar o buraco de minhoca.



Solução:

(a) O tempo necessário para a manobra de transferência está relacionado a metade do período da órbita elíptica. Observando o diagrama, temos que o semieixo maior da órbita é dado por:

$$a = \frac{r + r_0}{2}$$

$$a = \frac{1 + 9,6}{2} = 5,3\,\text{U.A.}$$

Usando a terceira lei de Kepler, o período T da órbita é calculado por:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}}$$

Substituindo os valores fornecidos pela tabela de constantes, encontramos o período da órbita como $T \approx 12,26\,\text{anos}$. Assim, o tempo t necessário para a transferência corresponde a metade desse valor:

$$\boxed{t \approx 6,13\,\text{anos}}$$

(b) Para simplificar, vamos analisar as situações antes e depois de inclinar a órbita. Assim, inicialmente temos as componentes paralelas e perpendiculares como:

$$v_{i_\parallel} = v_0 \cos i, \quad v_{i_\perp} = v_0 \sin i.$$

E no estado final:

$$v_{f_\parallel} = v_0, \quad v_{f_\perp} = 0.$$

Portanto, o Δv necessário é:

$$\Delta v_\parallel = v_{f_\parallel} - v_{i_\parallel} = v_0(1 - \cos i),$$

$$\Delta v_\perp = v_{f_\perp} - v_{i_\perp} = -v_0 \sin i.$$

Encontrando a variação total aplicando pitágoras com as componentes:

$$\Delta v_{\text{tot}} = \sqrt{\Delta v_{\parallel}^2 + \Delta v_{\perp}^2} = \sqrt{v_0^2(1-\cos i)^2 + v_0^2 \sin^2 i}$$

$$= v_0\sqrt{1+\cos^2 i - 2\cos i + \sin^2 i} = \sqrt{2}v_0\sqrt{1-\cos i}.$$

Substituindo o ângulo por $i = 60°$:

$$\Delta v_{\text{tot}} = v_0$$

As energias cinéticas antes e depois da manobra são respectivamente:

$$E_{\text{antes}} = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$E_{\text{depois}} = \frac{4m{v_0}^2}{2}$$

Assim, a variação na energia cinética é:

$$\Delta E = \frac{3m{v_0}^2}{2}$$

Como a questão não forneceu o valor de v_0, calcularemos usando a fórmula da velocidade em uma órbita circular:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} \approx 9,6 \text{ km/s}$$

Substituindo os valores, encontramos que a menor variação de energia cinética é:

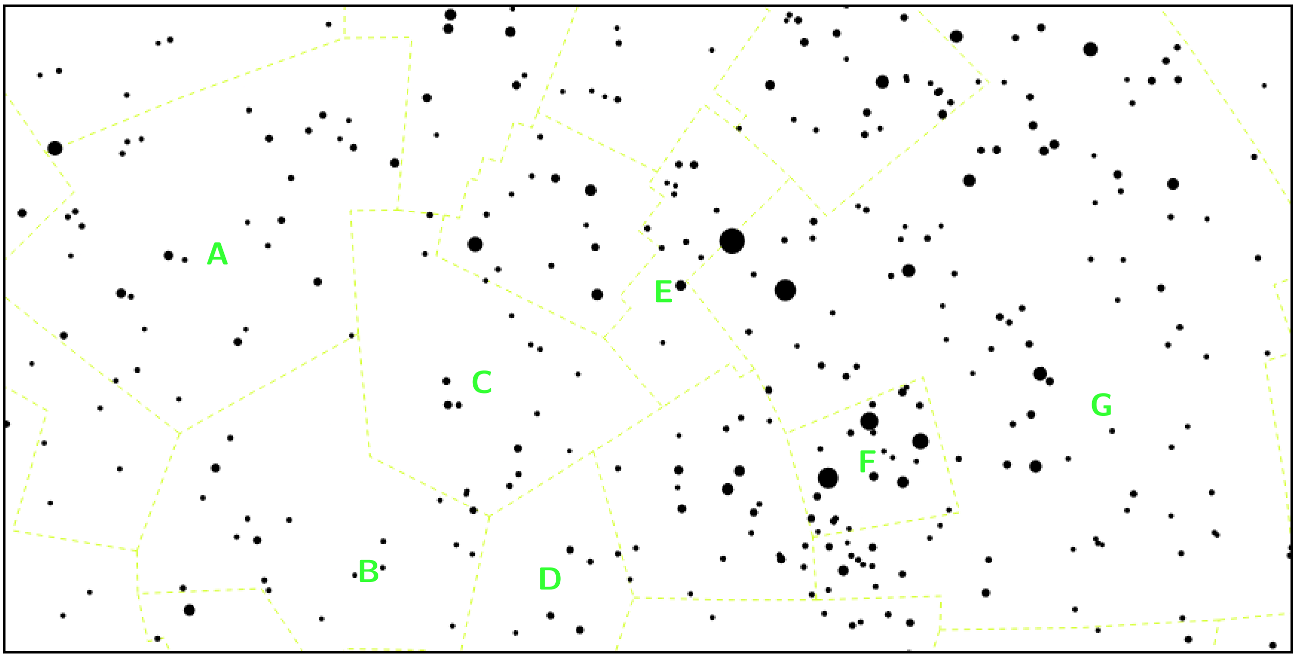
$$\boxed{\Delta E \approx 1,1 \times 10^{12} \text{ J}}$$

Grade de Correção

Item (a) (3 pontos):
+1 pt Cálculo do semi eixo maior da órbita de transferência
+1 pt Cálculo do período da órbita de transferência a partir da lei de Kepler, citando que o período analisado é apenas a metade
+1 pt Valor numérico final correto

Item (b) (7 pontos):
+3 pt Identificação das componentes das velocidades antes e depois da manobra
+1 pt Encontrar a variação necessária em cada componente, e a total por pitágoras
+1 pt Encontrar a variação de energia cinética
+1 pt Cálculo da velocidade inicial v_0 utilizando uma órbita circular
+1 pt Valor numérico final correto

Questão 2. A figura abaixo exibe uma porção do céu noturno, onde as letras A, B, C, D, E, F e G representam diferentes constelações.



(a) Com base nas constelações exibidas e em sua disposição na figura, determine se o céu mostrado corresponde ao hemisfério norte ou ao hemisfério sul. Justifique sua resposta mencionando características específicas das constelações ou posições que te levaram a essa conclusão.

(b) Dentre as estrelas representadas na figura, existe uma que é conhecida por estar mais próxima do Sol. Identifique o nome dessa estrela e indique em qual das constelações (A, B, C, D, E, F ou G) ela se encontra.

(c) Sabendo que um dos polos celestes está incluído na representação do céu noturno da figura, identifique qual dos polos está visível e em qual das constelações (A, B, C, D, E, F ou G) ele se encontra.

(d) Nomeie as constelações correspondentes às letras B, F e G.

Solução:

(a) Na figura, podemos observar constelações típicas do hemisfério sul celeste, incluindo a presença do Cruzeiro do Sul, uma constelação característica desse hemisfério. Além disso, o Cruzeiro do Sul aponta para uma região onde o polo sul celeste é visível, o que reforça que o céu exibido corresponde ao hemisfério sul.

(b) A estrela mais próxima do Sol é Proxima Centauri (Alpha Centauri, Alpha do Centauro, Proxima Centauro, α Cen e outras variações também serão aceitos). Ela se encontra na constelação de Centauro, que, de acordo com a figura, está representada pela letra G.

(c) Como o céu apresentado corresponde ao hemisfério sul, o polo celeste visível é o Polo Sul Celeste. Ele se encontra na constelação identificada pela letra B na figura. Isso pode ser concluído ao estender o eixo principal do Cruzeiro do Sul em aproximadamente $4,5$ vezes o seu comprimento, o que aponta diretamente para o Polo Sul Celeste.

(d) A constelação representada pela letra B é a constelação do Octante (ou Oitante), enquanto a letra F corresponde à constelação do Cruzeiro do Sul, e a letra G representa a constelação do Centauro.

Grade de Correção

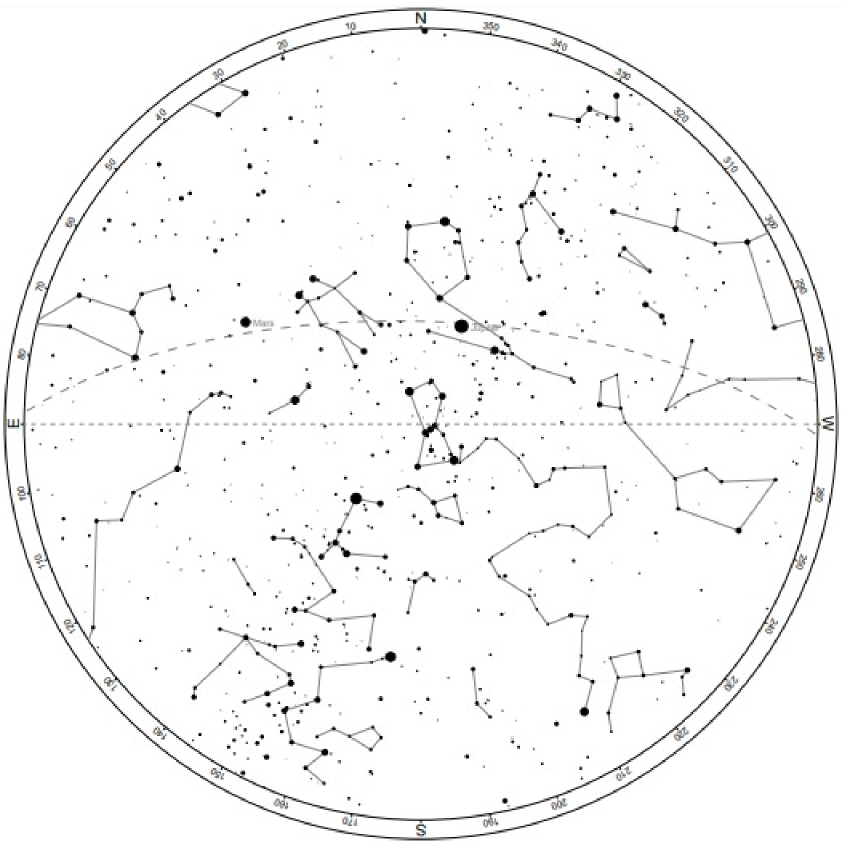
Item (a) (3 pontos):
+1 pt Hemisfério Sul
+2 pt Justificativa correta

Item (b) (2 pontos):
+1 pt Proxima Centauri
+1 pt Constelação G

Item (c) (2 pontos):
+1 pt Polo Celeste Sul
+1 pt Constelação B

Item (d) (3 pontos):
+1 pt Octante
+1 pt Cruzeiro do Sul
+1 pt Centauro

Questão 3. A figura abaixo mostra uma carta celeste, uma espécie de mapa do céu, para uma localidade sobre a Linha do Equador. A linha reta tracejada representa o Equador Celeste, uma projeção do Equador Terrestre na esfera celeste. Já a curva tracejada representa a Eclíptica, uma espécie de caminho percorrido pelo Sol e planetas do Sistema Solar, ao longo de um ano, na esfera celeste. No centro do círculo, posição da esfera celeste conhecida como zênite, é possível ver a constelação de Órion.



(a) Indique a latitude do local da carta celeste.

(b) Com base na carta celeste apresentada, nomeie duas (2) constelações visíveis que se encontram sobre a linha da Eclíptica (Dica: essas constelações também são conhecidas como constelações zodiacais).

(c) Com base na carta celeste apresentada, nomeie outras 3 constelações que estão visíveis.

(d) Sabendo que a constelação de Órion se encontra aproximadamente no zênite, indique qual era a constelação que estava próxima ao zênite para essa localidade há 24 horas, ou seja, no dia a anterior.

(e) Sabendo que a constelação de Órion se encontra aproximadamente no zênite, indique qual será a constelação que estará próxima ao zênite para essa localidade após 24 horas, ou seja, no dia seguinte.

Solução:

(a) De acordo com o enunciado do problema, o local se encontra sobre a Linha do Equador, logo, o local possui latitude $\phi = 0°$.
(b) As constelações que se localizam sobre a linha da eclíptica são chamadas também de constelações zodiacais. As constelações zodiacais visíveis são: Leão, Câncer, Gêmeos, Touro, Áries, e Peixes.
(c) Alguns exemplos de constelações visíveis na carta celeste são: Órion, Cão Maior, Cão Menor, Baleia, Perseu, Cassiopeia, Erídano, Lebre, entre várias outras.
(d) A posição das estrelas para uma mesma localidade entre dois momentos com um intervalo de 24 horas é praticamente a mesma. Por essa razão, a constelação de Órion continuará próxima ao zênite.
(e) Pela mesma razão discutida no item (d), a constelação que estará no zênite após 24 horas será Òrion.

Grade de Correção

Item (a) (0,5 pontos):
+0,5 pt Latitude $\phi = 0°$

Item (b) (3 pontos):
+1,5 pt Constelação indicada está visível e se encontra sobre a eclíptica (+1,5 pt para cada constelação correta).

Item (c) (4,5 pontos):
+1,5 pt Constelação indicada está visível e não foi mencionada no item (b) (+1,5 pt para cada constelação correta).

Item (d) (1 ponto):
+1 pt Resposta final correta (+0,5 caso a resposta final esteja incorreta, mas houve um desenvolvimento coerente para a solução do problema).

Item (e) (1 ponto):
+1 pt Resposta final correta (+0,5 caso a resposta final esteja incorreta, mas houve um desenvolvimento coerente para a solução do problema).

Questão 4. O astrônomo Henrricus, investigador chefe do NOIC (Núcleo de Observação e Investigação Cósmica) recebeu um relatório sobre um grupo de três galáxias, Makotilu (M), Iani (I) e Otavius (O). Após uma análise de seus telescópios ele descobriu algumas informações importantes sobre essas galáxias, como o fato de que M e I possuem, coincidentemente, luminosidades aproximadamente iguais, além disso, descobriu que as estrelas I e O estão aproximadamente à mesma distância do planeta Terra. Continuando sua análise, determinou as suas magnitudes aparentes como sendo $m_M = 6$, $m_I = 2$ e $m_O = 8$. Ajude Henrricus nas suas próximas tarefas investigativas.

(a) Para continuar suas investigações sobre esse sistema Henrricus precisa descobrir a distância até as galáxias I e O. Para isso, ele descobriu, utilizando a técnica de redshift, que elas possuem um desvio aproximado de $z = 2,26 \cdot 10^{-6}$. Dê sua resposta em parsecs ($1\ Mpc = 1 \cdot 10^6\ pc$).

(b) Calcule as magnitudes absolutas das estrelas M e I, utilizando a distância encontrada no item (a).

(c) Calcule a razão entre as luminosidades das estrelas I e O ($\frac{L_I}{L_O}$)

Solução:

(a) Utilizando a Lei de Hubble e o redshift dado para encontrar a distância até I e O

$$z = \frac{v_r}{c} \rightarrow v_r = z \cdot c$$

$$v_r = H_0 \cdot d \rightarrow d = \frac{v_r}{H_0}$$

Logo

$$d = \frac{z \cdot c}{H_0} \rightarrow \frac{2,26 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^5}{67,8} = 1 \cdot 10^{-2}\text{Mpc} \rightarrow \boxed{10.000 \text{ pc}}$$

Assim, encontramos que as distâncias até as galáxias I e O (d_I e d_O) são iguais a 10.000 parsecs.

(b) Utilizando a fórmula do módulo da distância para descobrir a magnitude absoluta

$$m - M = 5\log d - 5 \rightarrow -M = 5\log d - 5 - m \rightarrow M = -5\log d + 5 + m$$

Substituindo o valor de m_I dado no enunciado e o valor de d_I descoberto no item (a):

$$M_I = -5\log(10.000) + 5 + 2 \rightarrow M_I = -13$$

Como as galáxias M e I possuem a mesma luminosidade, suas magnitudes absolutas são iguais. Portanto, $\boxed{M_{I \text{ e } M} = -13}$.

(c) Utizando Pogson para descobrir a razão entre as luminosidades $\frac{L_I}{L_O}$

Primeiramente devemos calcular a magnitude absoluta da galáxia O, utilizando o mesmo método utilizado no item (b)

$$m - M = 5\log d - 5 \rightarrow M = -5\log d + 5 + m$$

$$M_O = -5\log(10.000) + 5 + 8 \rightarrow M_O = -7$$

Agora, basta aplicar Pogson para encontrar a razão entre as luminosidades

$$M_I - M_O = -2,5\log\left(\frac{L_I}{L_O}\right)$$

$$(-13) - (-7) = -2,5\log\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

$$\frac{-6}{-2,5} = \log\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \rightarrow 2,4 = \log\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

$$10^{2,4} = \frac{L_1}{L_2} \approx \boxed{251,2}$$

Grade de Correção

Item (a) (4 pontos):
+1 pt Escrever a fórmula de "z"
+1 pt Escrever a lei de Hubble
+2 pt Obter o resultado númerico correto.

Item (b) (3 pontos):
+1 pt Escrever corretamente a fórmula do módulo da distância
+1 pt Escrever que como as luminosidades de M e I são iguais, as magnitudes também precisam ser.
+1 pt Obter o resultado numérico correto

Item (c) (3 pontos):
+1 pt Escrever a fórmula de Pogson
+2 pt Obter o resultado numérico correto

Questão 5. A Terceira Lei de Kepler teve uma origem simples e quase intuitiva, mas se transformou em algo bem mais sofisticado quando a gravitação foi formalmente entendida e estudada. A evolução dessa lei reflete a jornada da astronomia desde a observação direta dos astros até a física desenvolvida com isso.

Kepler, no início do século XVII, analisou as órbitas planetárias com base nos dados observacionais detalhados de Tycho Brahe. Observando as relações nos períodos e nas distâncias dos planetas em torno do Sol, ele notou um padrão: o *quadrado do período orbital* (o tempo que um planeta leva para dar uma volta completa em torno do Sol) era *proporcional ao cubo da distância* do planeta ao Sol. Em outras palavras:

$$T^2 \propto r^3$$

Essa era a Terceira Lei de Kepler em sua forma original, que ele publicou em 1619. O que ele não sabia, porém, era o porquê desse padrão específico. Kepler via a proporção, mas não entendia a causa física dessa relação.

No final do século XVII, Isaac Newton deu um passo revolucionário: formulou a *Lei da Gravitação Universal.* Ele postulou que qualquer par de massas se atrai com uma força diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Matematicamente, Newton expressou essa força como:

$$F = \frac{G\,M\,m}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional, M é a massa do objeto central (como o Sol), m é a massa do objeto em órbita (como um planeta), e r é a distância entre os centros de massa dos objetos.

Usando sua Lei da Gravitação, Newton conseguiu derivar a Terceira Lei de Kepler de forma teórica. Para um planeta em órbita circular, ele mostrou que a aceleração centrípeta necessária para manter o planeta em órbita ($a_c = \frac{mv^2}{r}$) que depende da velocidade orbital v é fornecida pela atração gravitacional.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

(a) Prove que a Terceira Lei de Kepler, na forma que Newton chegou, está correta para o caso circular tal que $m << M$.

(b) Se a luz (com velocidade de $3.10^8 m/s$)) demora 8 minutos para chegar à Terra, calcule a massa do Sol com base no item a).

Solução:

(a) Demonstração da Terceira Lei de Kepler no caso circular:

Considerando um planeta de massa m em órbita circular ao redor de uma estrela de massa M (com $M \gg m$), a força gravitacional F entre eles é dada por:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Em uma órbita circular, essa força fornece a aceleração centrípeta necessária para manter o planeta na órbita, onde a força centrípeta é:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Igualando a força gravitacional à força centrípeta, temos:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Cancelando m em ambos os lados e simplificando, obtemos:

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

Sabemos que a velocidade orbital v pode ser expressa em função do período orbital T como $v = \frac{2\pi r}{T}$. Substituindo isso na expressão para v^2, temos:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r}$$

Expansando e rearranjando, encontramos:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Isso prova que a Terceira Lei de Kepler, conforme formulada por Newton, está correta para órbitas circulares.

(b) Cálculo da massa do Sol usando a distância Terra-Sol:

Sabemos que a luz demora 8 minutos para chegar à Terra a partir do Sol. Vamos converter esse tempo para segundos e calcular a distância média r entre a Terra e o Sol:

$$t = 8\,\text{min} = 8 \times 60 = 480\,\text{s}$$

A velocidade da luz c é 3×10^8 m/s. Então, a distância r é:

$$r = c \cdot t = (3 \times 10^8) \times 480 = 1.44 \times 10^{11}\,\text{m}$$

Substituindo r e o período orbital da Terra ($T = 365\,\text{dias}$) na Terceira Lei de Kepler, podemos resolver para M, a massa do Sol. Primeiro, convertemos T para segundos:

$$T = 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 3.15 \times 10^7\,\text{s}$$

Usando a fórmula:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Isolando M, temos:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Substituindo $r = 1.44 \times 10^{11}$ m, $T = 3.15 \times 10^7$ s, e a constante gravitacional $G = 6.674 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, obtemos:

$$M = \frac{4\pi^2 (1.44 \times 10^{11})^3}{(6.674 \times 10^{-11})(3.15 \times 10^7)^2}$$

Calculando, encontramos a massa do Sol:

$$M \approx 1.98 \times 10^{30}\,\text{kg}$$

Portanto, a massa do Sol é aproximadamente 1.98×10^{30} kg.

Grade de Correção

Item (a) (6 pontos):
+2 pt Igualar Força Gravitacional com Centrípeta
+2 pt Escrever a velocidade v em função do período corretamente
+2 pt Obtenção do resultado final

Item (b) (4 pontos):
+1 pt Cálculo correto da distância entre Terra e Sol (usando a velocidade da luz e o tempo dado)
+1 pt Conversão correta do período orbital da Terra para segundos
+1 pt Substituição correta dos valores na fórmula $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$
+1 pt Cálculo correto da massa do Sol, apresentando o valor numérico final

Questão 6. Em astronomia é comum o uso de triângulos esféricos para calcular as posições de estrelas e objetos do sistema solar. Há três equações fundamentais da chamada trigonometria esférica. Observe o triângulo esférico abaixo:

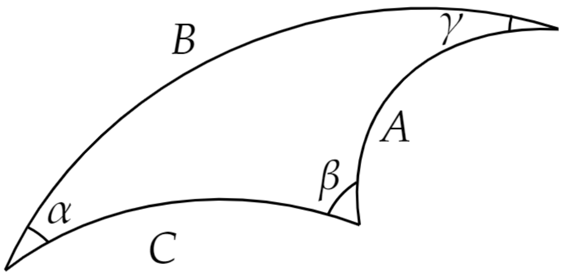


Figura 1: Triangulo esférico

As duas relações fundamentais são a **Lei dos Senos** e **Lei dos Cossenos**, e seguem as seguintes expressões:

$$\textbf{Lei dos Senos:}\ \frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

$$\textbf{Lei dos Cossenos:}\ \cos A = \cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$$

A partir dessas duas, é possível determinar a hora de nascimento do Sol, em função da sua declinação e a latitude do local. O ângulo horário é definido por:

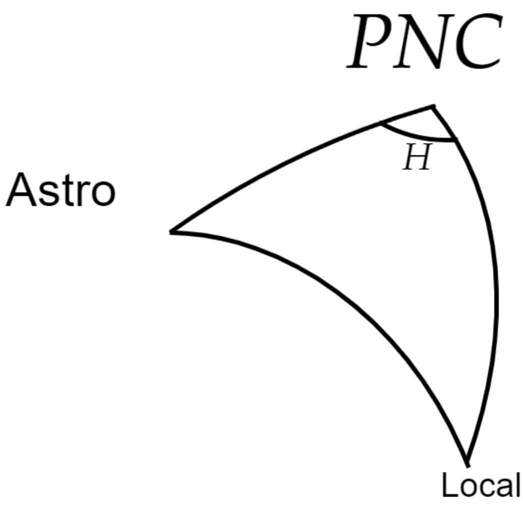


Figura 2: Representação do Ângulo Horário

No dia de Solstício de verão no Hemisfério Norte, na cidade de Cantom ($\phi = 42^\circ\ 18'\ 45''N,\ \lambda = 83^\circ\ 28'\ 30''O$), GaHa, deseja saber qual vai ser o Tempo Sideral Local quando o Sol nascer. Ajude ela a descobrir o horario de nascimento do Sol.

Solução:

Primeiramente, precisamos encontrar os ângulos faltando no triângulo esfperico. O ângulo entre o astro e o Polo Norte Celeste é $90-\delta$. O ângulo entre o local e o astro é a distância zenital, $90-h$, e o ângulo entre o Local e o PNC é $90-\phi$. Assim, Utilizando uma lei dos Cossenos, temos:

$$\cos(90-h) = \cos(90-\delta)\cos(90-\phi) + \sin(90-\delta)\sin(90-\phi)\cos H$$

Na Hora de nascimento do Sol, teremos $h = 0$. E utilizando que $\cos(90 - \theta) = \sin\theta$, A fórmuala simplifica para:

$$\cos 90 = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos H$$

Usando $\cos 90 = 0$ e isolando $\cos H$ temos:

$$\cos H = -\tan\delta\tan\phi$$

No solstício de verão no Hemisfério Norte, $\delta = 23°\ 47'$, encontramos:

$$H = 113°\ 39'\ 9'' = 7^h 34^m 37^s$$

O tempo sideral Local é dado por: $TSL = 12 - H$, Substituindo numéricamente:

$$\boxed{TLS = 4^h 25^m 23^s}$$

Grade de Correção

+4 pt ângulos corretos no triângulo esférico
+1 pt Lei dos Cossenos
+2 pt Expressão correta para H
+2 pt Expressão correta para TSL
+1 pt Valor numérico correto
-1 pt Para Sinal trocado, ou função trigonométrica errada

Questão 7. O astrônomo Zabo está observando uma estrela distante chamada **Estrela GG** e deseja estimar sua temperatura superficial e sua magnitude aparente em uma banda específica de observação (por exemplo, na banda V, que corresponde a uma faixa do espectro visível). A seguir os dados coletados por Zabo:

- A magnitude aparente da Estrela GG em uma outra banda, B, foi medida e é:

$$m_B = 1,5$$

- A razão entre os fluxos observados nas bandas B e V para a Estrela GG foi medida como:

$$\frac{F_B}{F_V} = 1,21$$

- Para simplificação, assuma que a estrela pode ser modelada como um corpo negro ideal e despreze extinção do meio interestelar.

Ajude o nosso Zabo a achar o que se pede a seguir:

(a) Determine a magnitude aparente da Estrela GG na banda V.

(b) Estime a temperatura superficial da Estrela GG. Dica: você provavelmente chegará em uma equação em que é impossível isolar T, então você pode "chutar" valores de T até a equação estar aproximadamente satisfeita. Use múltiplos de 1000 K.

Zabo é uma pessoa boa e te forneceu as seguintes fórmulas:
Fórmula de Pogson para a diferença de magnitude:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right),$$

onde F_1 e F_2 são fluxos, e m_1 e m_2 são as magnitudes aparentes correspondentes.

Lei de Planck para radiação de corpo negro:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

onde:
$B(\lambda, T)$ é a radiância espectral(fluxo por ângulo sólido por unidade de área projetada),
$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J · s (constante de Planck),
$c = 3.0 \times 10^8$ m/s (velocidade da luz),
$k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K (constante de Boltzmann),
λ é o comprimento de onda,
T é a temperatura do corpo negro.

Comprimentos de onda das bandas B e V:

- $\lambda_B \approx 440\,\text{nm}$,
- $\lambda_V \approx 550\,\text{nm}$.

Solução:

(a) Utilizando a fórmula de Pogson para a diferença de magnitudes:

$$m_B - m_V = -2,5 \log \left(\frac{F_B}{F_V} \right),$$

onde: $m_B = 15,0$ e $\frac{F_B}{F_V} = 1.21$.

Substituindo os valores:

$$15,0 - m_V = -2,5 \log(1,21)$$

$$m_V \approx 15,2$$

(b) Para estimar T, usamos a Lei de Planck e que a razão entre os fluxos $\frac{F_B}{F_V}$ é igual a da radiância espectral $B(\lambda, T)$ em cada comprimento de onda central λ_B e λ_V, uma vez que o ângulo sólido é o mesmo (mesma estrela):

$$\frac{F_B}{F_V} = \frac{B(\lambda_B, T)}{B(\lambda_V, T)},$$

onde: $\lambda_B \approx 440\,\text{nm} = 4.4 \times 10^{-7}\,\text{m}$, $\lambda_V \approx 550\,\text{nm} = 5.5 \times 10^{-7}\,\text{m}$ $\frac{F_B}{F_V} = 1.21$

A Lei de Planck é:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

portanto,

$$\frac{F_B}{F_V} = \frac{B(\lambda_B, T)}{B(\lambda_V, T)} = \frac{\lambda_V^5}{\lambda_B^5} \cdot \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_V kT}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_B kT}} - 1}$$

Utilizando iteração na calculadora, obtemos aproximadamente:

$$T \approx 7000\,\mathrm{K}.$$

Grade de Correção

item (a) (3 pontos):
+2 pt Identificar a fórmula de pogson corretamente e substituir os valores adequados
+1 pt Resposta final correta

item (b) (7 pontos)
+2 pt Identificar corretamente a radiância espectral de cada comprimento de onda
+3 pt Achar a razão dos fluxos
+1 pt Usar um método coerente para achar T numericamente
+1 pt Valor final correto

Questão 8. Hiratinha na Brasstown Bald

Em um final de semana, durante sua rotina extremamente corrida no Georgia Tech, Hiratinha decidiu fazer um passeio ecológico e observar as estrelas. Para isso, resolveu escalar a montanha "Brasstown Bald", a mais alta do estado da Geórgia.

No entanto, ao chegar ao topo, ele recebeu uma mensagem de seu amigo MaiFel, que estava no estado e planejava fazer uma visita. Hiratinha, como exímio pesquisador, viu nessa oportunidade uma chance para realizar um experimento: estimar a altura da montanha com a ajuda de seu amigo.

(a) Hiratinha explicou o experimento a MaiFel, que aceitou ajudá-lo. O amigo se posicionou a uma distância de $200\,\mathrm{m}$ da montanha e, usando um astrolábio emprestado por Keflak, mediu a altura angular da montanha em relação ao horizonte, obtendo $82,4°$. Sabendo que a altura de MaiFel é $1,6\,\mathrm{m}$ e considerando que o horizonte possui altitude nula, qual é a altura estimada da montanha?

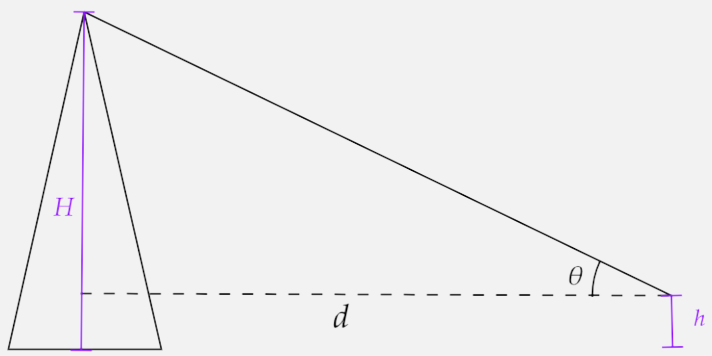
Com a informação obtida por MaiFel, ambos decidiram passar a noite no topo da montanha para observar as estrelas. Durante a noite, eles avistaram um objeto muito estranho no limite de sua visão e resolveram estudá-lo. Após um pouco de pesquisa, descobriram que o objeto era, na verdade, a Estação Espacial Internacional (ISS). Isso os inspirou a realizar novos experimentos.

(b) Primeiro, eles decidiram estimar a distância entre a ISS e o local onde estavam. Sabendo que o período orbital da ISS é de 90 min, determine a distância entre a ISS e os dois amigos, considerando a órbita da Estação Espacial circular, e que ela estava no horizonte dos amigos.

(c) Por fim, Hiratinha e MaiFel resolveram calcular a distância de um objeto brilhante no céu até a Terra com a ajuda dos astronautas a bordo da ISS. Para isso, eles entraram em contato com a ISS e solicitaram que medisse a distância angular entre um asteroide muito brilhante no céu e uma estrela de referência, obtendo uma separação angular de $60°$. Em seguida, os amigos realizaram a mesma medição a partir da Terra, obtendo $62,5°$. Com essas informações, estime a distância do asteroide até a Terra, assumindo que a distância do asteroide é muito maior que a distância entre os amigos e a estação espacial.

Solução:

(a) Para iniciar a questão, é preciso representar a situação por um desenho, e considerar a altura de MaiFel para encontrar a altura da montanha. A representação resultante é:



A partir, da geometria da situação pode-se chegar a uma expressão para a altura da montanha:

$$\tan\theta = \frac{H-h}{d}$$

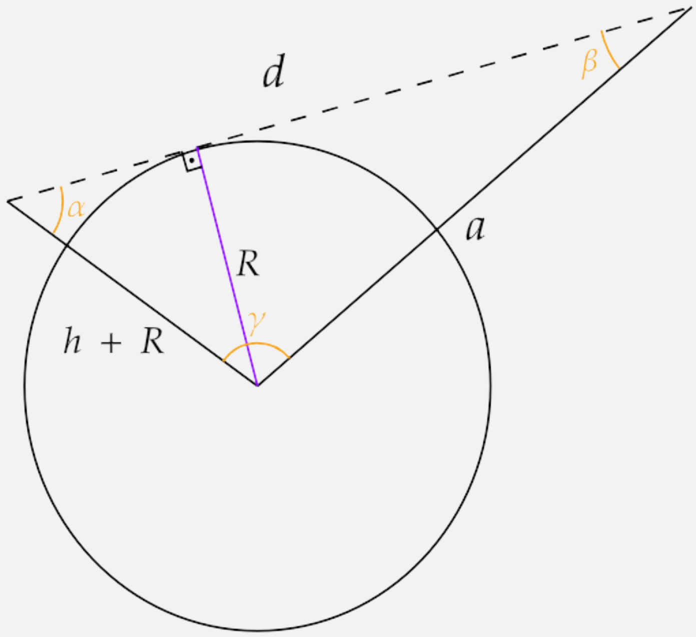
$$\boxed{H = d\tan\theta + h = 200 \times \tan 82,4° + 1,6 \approx 1500\ m}$$

(b) Primeiro, precisamos enontrar a distância da Estação Espacial Internacional ao centro da Terra pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}$$

$$a = \left(\frac{GM_\oplus T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 6,65 \cdot 10^6\ m$$

Então, como a ISS está no horizonte dos amigos em cima da montanha, o desenho que representa essa situação é:



Pela geometria da situação, pode-se encontrar os valores dos ângulos α e β:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{h+R}\right) \approx 88,8^\circ$$

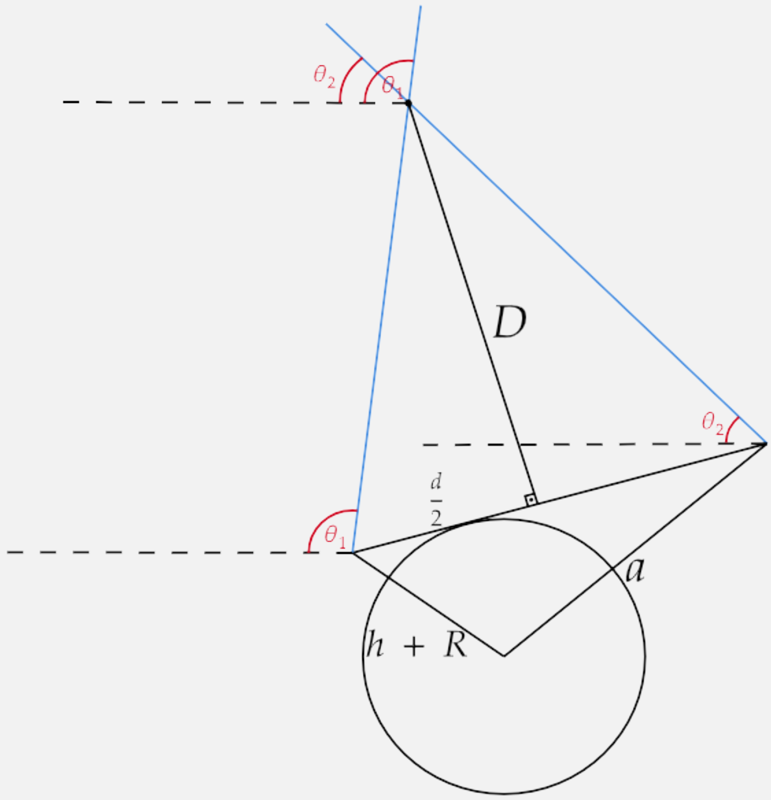
$$\beta = \arcsin\left(\frac{R}{a}\right) \approx 73,3^\circ$$

E para encontrar a distância entre os amigos e a ISS pode-se utilizar que:

$$d = a\cos\beta + (h+R)\cos\alpha$$

$$\boxed{d \approx 1,97 \cdot 10^6\ m}$$

(c) Agora, como a distância até o asteroide é muito mairo que a distância entre a ISS e os amigos, e utiliza-se uma estrela distância como referência a representação da situação é a seguinte:



Então, pela geometria representada, pode-se perceber que o triângulo formado pelo asteoride, amigo e metade da distância até a ISS é um triângulo retângulo. Portanto:

$$\tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{d}{2D}$$

$$\boxed{D = \frac{d}{2\tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)} \approx 4,5 \cdot 10^7\ m}$$

Grade de Correção

Item (a) (3 pontos):
+ **1 pt** Desenho correto considerando a altura de MaiFel
+ **1 pt** Expressão correta
+ **1 pt** Valor numérico

Item (b) (4 pontos):
+ **1 pt** Raio orbital ISS
+ **1 pt** Desenho correto da situação
+ **1 pt** Expressão para a distância entre os meninos e a ISS
+ **1 pt** Valor numérico

Item (c) (3 pontos):
+ **1 pt** Desenho correto da situação
+ **1 pt** Expressão correta para a distância até o asteroide
+ **1 pt** Valor numérico