

Q1 - CORDAS EM ROTA DE COLISÃO (10 pontos)

Uma corda flexível, homogênea e inextensível, de massa m , desloca-se com uma velocidade v , ao mesmo tempo que gira com velocidade angular ω , ao redor do seu centro de massa. Uma segunda corda, igual à primeira, é posicionada em repouso, conforme esquematizado na figura 1. Na figura destacamos os extremos com duas esferas cinzas. Ambas cordas ficam inicialmente esticadas até seu comprimento máximo l .

O movimento se dá de tal forma que os extremos de uma corda coincidem simultaneamente com o da outra corda. Após a colisão, os extremos ficam colados e as duas cordas continuam o movimento. Despreze qualquer tipo de dissipação não mencionada no texto.

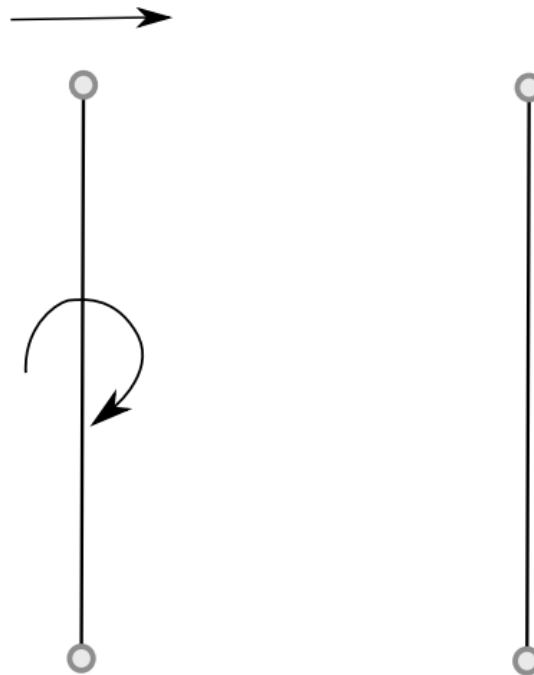


Figura 1: Movimento das cordas antes da colisão.

a.	Qual é a condição que deve ser cumprida em relação às velocidades v e ω para que colisão descrita aconteça?	3,0pt
b.	Considerando que as cordas são flexíveis, use argumentos baseados na minimização da energia para determinar a forma final do sistema de cordas depois da colisão.	4,0pt
c.	Encontre a velocidade angular do par de cordas (com respeito ao seu centro de massa) após a colisão.	3,0pt

Gabarito:

item a. O sentido da velocidade do extremo inferior, na hora da colisão, deve ser para a direita, com isso

$$\frac{\omega l}{2} < v$$

Dai...

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2}{l}$$

Distribuição da pontuação:**1,5 pontos** pela primeira condição**1,5 pontos** pela relação

item b. Da conservação do momento angular...

$$E = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$$

A energia deve ser mínima, o qual se corresponde com um “afastamento máximo”, dos elementos de massa da corda, do eixo de rotação (momento de inércia máximo), levando o sistema a uma configuração semelhante a um aro, cujo raio é dado por...

$$R = \frac{2l}{2\pi} = \frac{l}{\pi}$$

Distribuição da pontuação:**2,0 pontos** pela condição de mínima energia**2,0 pontos** pela expressão do raio

item c. Na colisão se conserva o momento angular, como já tínhamos apontado anteriormente...

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

O momento de inércia inicial é o da corda girando em torno do seu centro $I_i = \frac{1}{12}ml^2$. O momento de inércia final é o de um “aro”, de raio R , e massa $2m$, girando em torno do seu centro

$$I_f = 2mR^2 = 2m\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \omega_f^2$$

Então

$$2m\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \omega_f = \frac{1}{12}ml^2\omega_i^2$$

Assim, finalmente...

$$\omega_f = \frac{\pi^2}{24}\omega_i$$

Distribuição da pontuação:**1,0 pontos** pela conservação do momento angular**1,0 pontos** pelas expressões dos momentos de inércia (1,0 ponto por cada)**1,0 ponto** pelo resultado final

Q2 - TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS (10 pontos)

Neste problema exploraremos como conceitos elementares de termodinâmica podem ser aplicados em sistemas complexos como buracos negros. De acordo com Bekenstein e Hawking, a entropia de um buraco negro é proporcional a sua área A da forma

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A.$$

Para buracos negros de massa M e raio R , que possuem a propriedade de “capturar” até a luz, nada escapa do seu “universo”. Consideremos os buracos negros perfeitamente “esféricos”.

Parte A - Velocidade de escape do buraco negro

Estimativas relacionadas a buracos negros podem ser feitas por meio de abordagens clássicas como cálculo de “velocidade de escape” de um corpo de massa M e raio R . O raio de um buraco negro é definido como o limite tal que luz não possa escapar dele.

- A.1** Encontre a expressão da massa M de um buraco negro de raio R de tal forma que a luz não consiga escapar de sua superfície. 1,0pt

Parte B - Termodinâmica dos buracos negros

Considere dois buracos negros de massa $M_1 = M$ e raio R_1 , que colidem, gerando um único buraco negro de raio R_2 . Despreze qualquer tipo de dissipação de energia envolvido no processo.

- B.1** Determine uma expressão para a variação de entropia associada a esse processo em função de M e constantes. Ela será positiva ou negativa? Particularize sua expressão para $M \approx 2 \times 10^{30}$ kg. 2,5pt

A temperatura de um objeto pode ser estimada por uma relação entre energia interna (E) e sua entropia (S). Esta relação é chamada de **temperatura estatística** do sistema, cujo inverso é

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.$$

- B.2** A energia interna de um buraco negro é dada pela equação de Einstein $E = Mc^2$. Encontre a temperatura de um buraco negro em termos da sua massa. 2,0pt

Parte C - Tempo de vida de buracos negros

Hawking propôs um mecanismo pelo qual o buraco negro pode **emitir radiação térmica** devido a processos de criação de pares em seu horizonte de eventos. O processo se dá tal qual um corpo negro de temperatura T .

- C.1** Encontre a taxa de perda de energia por tempo devido à radiação do buraco negro. 1,5pt

- C.2** Determine uma expressão para o intervalo de tempo que um buraco negro isolado leva para “evaporar”. Quanto tempo dura um buraco negro de massa inicial igual à do Sol ($M \approx 2 \times 10^{30}$ kg)? 3,0pt

Gabarito:

A.1. Classicamente...

$$\frac{GMm}{R} = \frac{mv_E^2}{2}$$

Daí, para “partículas de luz”...

$$\frac{GM}{R} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2}$$

Para buracos negros de massa

$$M > \frac{Rc^2}{2G}$$

nada “escapa”. **Distribuição da pontuação:**

0,5 pontos pela expressão de R

0,5 pontos pela relação final

B.1. A variação da entropia é...

$$\Delta S = S_f - S_i = S_2 - 2S_1$$

Aqui, S_1 é a entropia dos buracos originais, de massas iguais a M_1 e raios R_1 ; S_2 , por outro lado, é a entropia do buraco negro resultante, de massa M_2 e raio R_2 .

Usando a expressão dada para a entropia...

$$\Delta S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \cdot 4\pi(R_2^2 - 2R_1^2) = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \cdot 4\pi \left(\left(\frac{2GM_2}{c^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{2GM_1}{c^2} \right)^2 \right)$$

Com $M_1 = M$ e $M_2 = 2M$

$$\Delta S = \frac{8\pi G k_B M^2}{c\hbar} > 0$$

Calculando...

$$\Delta S \approx 298 \cdot 10^{52} \text{ J/K} \approx 3 \cdot 10^{54} \text{ J/K!!!}$$

Distribuição da pontuação:

2,0 pontos pela expressão de ΔS

0,5 pontos pelo cálculo

B.2. Da relação de Einstein...

$$\partial E = c^2 \partial M$$

Usando a definição de temperatura estatística

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{c^2 \partial M} = \frac{\partial}{c^2 \partial M} \left(\frac{k_B c^3 A}{4G\hbar} \right) = \frac{\partial}{c^2 \partial M} \left(\frac{k_B c^3 \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2}{4G\hbar} \right)$$

Derivando, finalmente

$$\frac{1}{T} = \frac{8\pi k_B G}{\hbar c^3} M \Rightarrow T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

Distribuição da pontuação:

0,5 ponto pela expressão de ∂E

1,0 ponto pelo desenvolvimento

0,5 ponto pela expressão final de T

C.1. Da lei de Stefan Boltzmann...

$$\frac{1}{A} \frac{\partial E}{\partial t} = -\sigma T^4 \Rightarrow \frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\sigma \hbar^4 c^{12}}{8^4 \pi^4 k_B^4 G^4 M^4}$$

Substituindo a expressão para o raio do buraco negro...

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sigma \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \right)^4$$

Distribuição da pontuação:

0,5 ponto pela lei de S-B

0,5 ponto pelo desenvolvimento

0,5 ponto pela expressão final

C.2. A perda de energia do buraco negro é, do item anterior

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{d}{dt}(Mc^2) = -\sigma \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}\right)^4$$

Daí...

$$c^2 \frac{dM}{dt} = -\frac{16\sigma \hbar^4 c^8}{8^4 \pi^3 k_B^4 G^2 M^2} \Rightarrow M^2 \frac{dM}{dt} = -b$$

onde $b = \frac{16\sigma \hbar^4 c^6}{8^4 \pi^3 k_B^4 G^2}$. Para a evaporação, integramos, em M e t desde $M = 0$ até M , resultando em...

$$\Delta t = \frac{M^3}{3b}$$

Para um buraco negro de massa igual à massa do Sol

$$\Delta t = \frac{(2 \cdot 10^{30})^3}{3b}$$

Calculando...

$$\Delta t \approx 4 \cdot 10^{15} s \approx 1 \cdot 10^{12} h \approx 4 \cdot 7 \cdot 10^{10} \text{ dias} \approx 1,3 \cdot 10^8 \text{ anos!!!}$$

Sugiro revisar bem esta conta! Distribuição da pontuação:

2,0 pontos por chegar à equação diferencial (1,5 pela equação + 0,5 pela expressão de b)

0,5 ponto por resolver a equação diferencial

0,5 ponto pelo cálculo do tempo

Q3 - Diversão Infinita com Circuitos (10 pontos)

Neste problema revisitaremos uma questão famosa de resistência equivalente de circuitos elétricos infinitos. Na figura 2 **a)** abaixo, representamos um circuito infinito numa malha quadriculada em duas dimensões, onde todos os resistores tem valor igual a 1Ω . É possível, através de um argumento de sobreposição e linearidade, mostrar que a resistência equivalente entre pontos adjacentes na malha A e B é $R_{AB} = \frac{1}{2}\Omega$. Não é necessário provar este resultado neste problema.

Analisaremos duas variações deste circuito, nas quais consideraremos defeitos nas resistências (itens **A.** e **B.**) e o efeito da geometria da malha (item **C.**). Os três itens podem ser resolvidos independentemente.

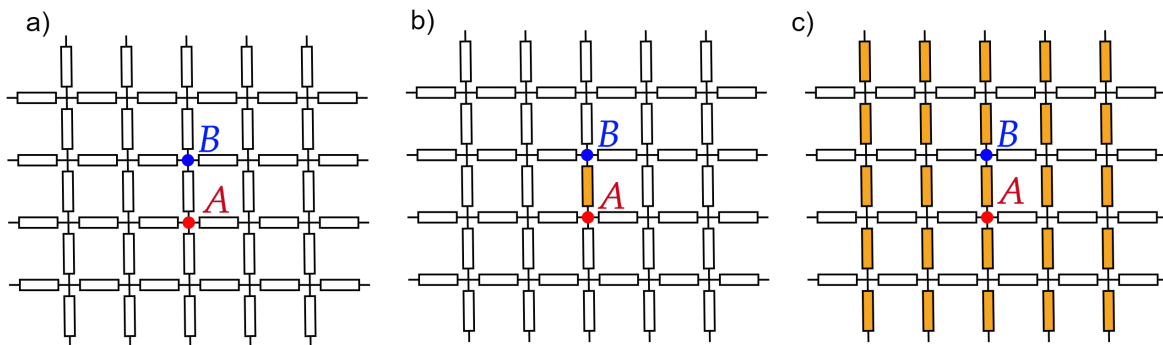


Figura 2: a) Circuito infinito em duas dimensões. Cada resistor tem valor de 1Ω . b) O circuito infinito com um defeito. c) Circuito infinito com defeitos em todos os resistores verticais. Cada resistor com defeito tem resistência elétrica de 2Ω .

Na figura 2 **b)** temos um *defeito* no nosso circuito, fazendo com que a resistência elétrica do resistor entre A e B dobre, agora sendo de 2Ω . Na figura 2 **c)**, o defeito no circuito afeta *todos* os resistores verticais. Dessa forma todos os verticais têm resistência elétrica de 2Ω , enquanto resistores os horizontais continuam tendo valor 1Ω .

Circuitos bidimensionais

A. (Um Defeito na Malha) No caso da malha com um *defeito* como na figura 2**b)**, qual a nova resistência equivalente entre os pontos A e B ? 2.0pt

B. (Vários Defeitos na Malha) No caso da malha com *defeitos* em todos os resistores verticais como na figura 2**c)**, mostre que a resistência equivalente entre os pontos A e B , R_{AB} satisfaz 4.0pt

$$0.6\Omega \leq R_{AB} \leq 0.9\Omega.$$

Pontos parciais serão dados para qualquer progresso em delimitar o valor de R_{AB} por cima ou por baixo.

Circuito tridimensional

Estudaremos agora o efeito da geometria da malha infinita na resistência equivalente entre dois pontos distantes. Na figura 2), representamos circuitos infinitos em malhas de $D = 1, 2, 3$ dimensões, onde todos os resistores tem valor igual a 1Ω , nas figuras **a)**, **b)**, **c)** respectivamente. O ponto A esta localizado na origem das malhas, e o ponto C esta no eixo \hat{x} , a uma distância de n resistores da origem, onde $n \in \mathbb{N}$ é um inteiro. Todos os circuitos considerados são infinitos para todas as dimensões representados.

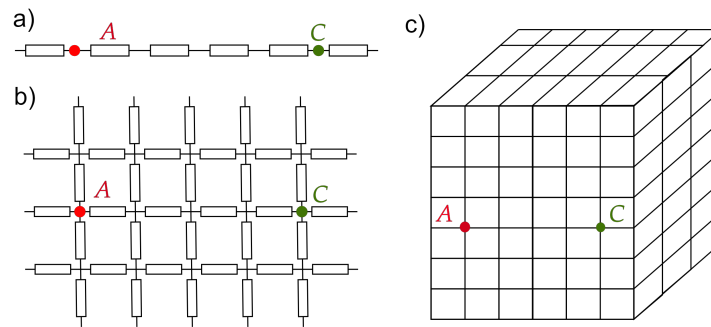


Figura 3: **a)** Circuito infinito em 1D, onde C está a uma distância n da origem A . **b)** Circuito infinito em 2D, onde C está na coordenada $(n, 0)$. **c)** Circuito infinito em 3D, onde C está na coordenada $(n, 0, 0)$. Todas as figuras tem $n = 4$.

C. (Resistências equivalentes em várias dimensões) No limite de $n \gg 1$, *estime* a resistência equivalente $R_{AC}(n)$ entre os pontos A e C , em 1D, 2D e 3D, em função de n . Justifique. 4.0pt

Pontos integrais serão dados a qualquer resposta que acerte a dependência de $R_{AC}(n)$ com n . Não se preocupe com constantes numéricas, apenas com a dependência em n .

Gabarito:

A.

Solução 1. Usamos a técnica das “resistências fictícias/negativas”, onde a resistência do defeito R é reescrito como a resistência em paralelo de uma resistência de valor 1Ω , e outra de valor $x\Omega$, onde

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{R}{1 - R}. \quad (1)$$

Note que a nova resistência de valor 1 está em paralelo com o resto da malha infinita, e portanto equivale a uma malha de resistores de valor 1. Portanto, a resistência equivalente entre A, B é a resistência em paralelo de x com $1/2$:

$$\frac{1}{R_{AB}(R)} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow R_{AB}(R) = \frac{R}{R + 1} \Rightarrow R_{AB}(2) = \frac{2}{3}\Omega. \quad (2)$$

Solução 2. Digamos que $\tilde{R} = R_{AB}(\infty)$ seja o valor da resistência equivalente entre A, B no circuito infinito, onde a resistência entre A, B foi removida. A resistência equivalente $R_{AB}(R)$ entre A, B , na presença do defeito, é a resistência em paralelo de R com \tilde{R} . Portanto,

$$\frac{1}{R_{AB}(R)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\tilde{R}} \quad (3)$$

Porém, sabemos que quando $R = 1$, $R_{AB}(1) = \frac{1}{2}$, porque o circuito volta a ser o mesmo circuito infinito de todas as resistências iguais. Logo,

$$2 = 1 + \frac{1}{\tilde{R}} \Rightarrow \tilde{R} = 1 \Rightarrow R_{AB}(R) = \frac{R}{R + 1} \Rightarrow R_{AB}(2) = \frac{2}{3}\Omega. \quad (4)$$

Marking Scheme

- +1.0 Pontos por pensar em transformar o circuito para o circuito original em paralelo com outro resistor.
- +1.0 Pontos pelo valor correto de $\frac{2}{3}\Omega$.

B.

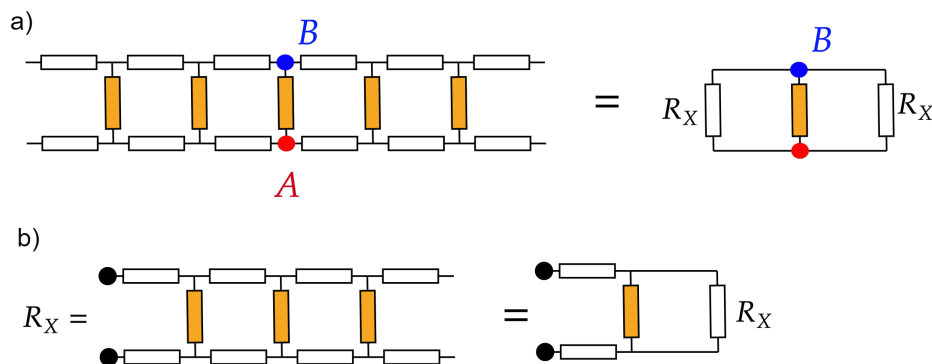
Primeiro note que trivialmente R_{AB} satisfaz: $0.5\Omega \leq R_{AB} \leq 1\Omega$, já que um circuito infinito de apenas resistores de 1Ω tem resistência igual a 0.5Ω , e um circuito de apenas resistores de 2Ω tem resistência igual a 1Ω . Para melhorar esses limites, precisamos da seguinte ideia: a resistência equivalente entre quaisquer dois pontos num circuito de resistores depende monotonicamente das resistências do circuito. Isto é:

- Se diminuirmos qualquer valor de resistência, a resistência equivalente diminui. Portanto, a resistência equivalente da malha de varios defeitos é maior do que a de 1 defeito.

Segue que $R_{AB} \geq \frac{2}{3} > 0.6$ do resultado da parte A acima.

- Se aumentarmos qualquer valor de resistência, a resistência equivalente aumenta. Note que remover um resistor da malha corresponde a aumentar sua resistencia para ∞ .

Com isso em mente, iremos remover todos os resistores verticais acima de A e abaixo de B, obtendo o seguinte da figura a) abaixo:



Note que na figura a) separamos o circuito infinito restante em um resistor de 1Ω , em paralelo com dois resistores de R_X , onde R_X é definido na figura abaixo. Para encontrar R_X , note que se trata de um circuito infinito, e remover a primeira componente que se repete do circuito não alteraria a resistência do conjunto. Com isso, obtemos a equação que:

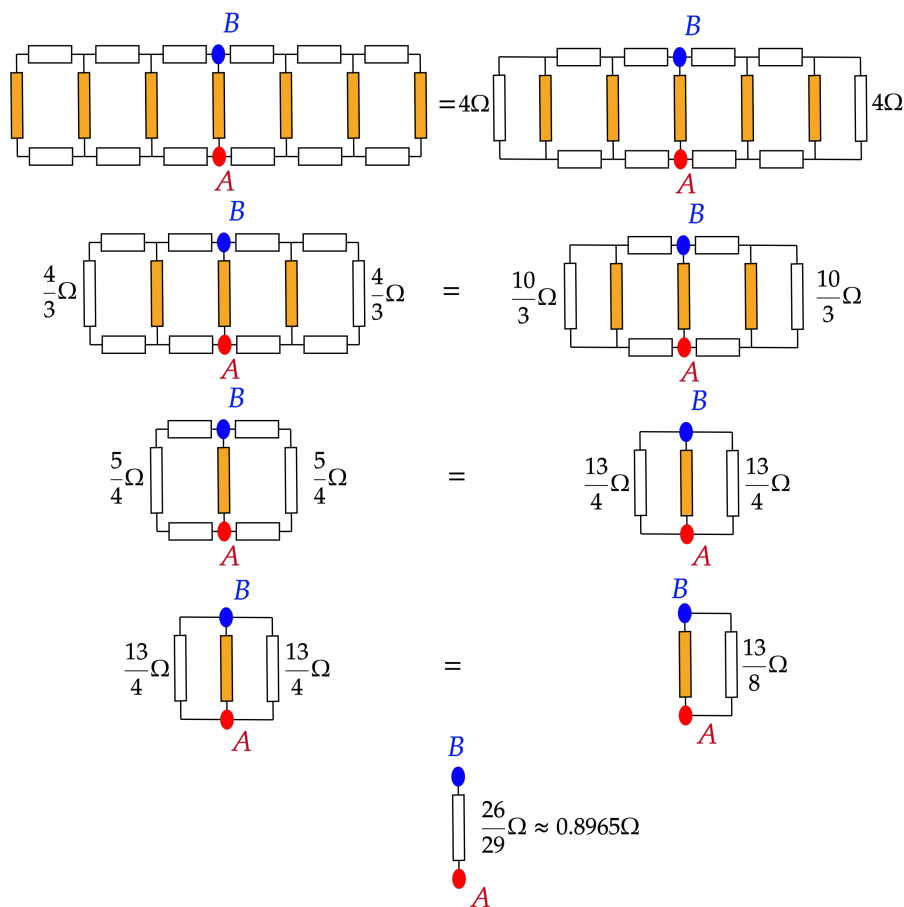
$$R_X = 1 + \frac{2 \cdot R_X}{2 + R_X} + 1 = 2 + \frac{2R_X}{2 + R_X} \Rightarrow R_X^2 - 2R_X - 4 = 0 \Rightarrow R_X = 1 \pm \sqrt{5}$$

Descartando a raiz negativa, obtemos $R_X = 1 + \sqrt{5}$, e então um limite superior para a resistência entre A e B da forma:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_X} \Rightarrow R = \frac{2R_X}{R_X + 4} = \frac{2}{\sqrt{5}}\Omega \approx 0.894\Omega < 0.9\Omega$$

Logo, conseguimos provar que R_{AB} satisfaz: $0.6\Omega \leq R_{AB} \leq 0.9\Omega$.

Note que não é necessário considerar um circuito infinito para obter um limite para a resistência dentro dos limites de 0.9Ω . Em particular, pode se remover resistores, obtendo se o circuito abaixo:



Note que esse resultado também satisfaz o limite de 0.9Ω da questão.

Marking Scheme

- +1.0 Pontos por apontar que resistencia equivalente varia monotonicamente com as resistências no circuito, e apontar que R_{AB} satisfaz $0.5\Omega \leq R_{AB} \leq 1\Omega$
- +1.0 Pontos por argumentar que o problema **a)** da um limite inferior para R_{AB} mesmo se o resultado do **a)** estiver errado, assumindo que o valor seja acima de 0.6Ω .
- +1.0 Pontos por obter um valor de $R_{AB} \leq 1.0\Omega$
- +1.0 Pontos por obter que $R_{AB} \leq 0.9\Omega$

Para os *interessados*, esse resultado pode ser resolvido de maneira exata, embora a solução é bem além do nível de olimpíadas. Em particular, pode se mostrar que $R_{AB} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arccot} \sqrt{2} \approx 0.7836\Omega$.

C.

A ideia principal nesse problema é perceber que como queremos apenas uma *estimativa*, podemos usar argumentos de simetria e sobreposição para resolver o problema. Consideremos primeiro o caso 1D. Nesse caso a resposta do problema é trivial e $R_{AC} \approx n\Omega$, já que existem n resistores entre A e C.

Os outros casos são mais complexos. Começemos pelo caso 2D. Em particular, injete corrente I em A, e vamos analisar como essa corrente se distribui muito longe de A. Note que muito longe de A está corrente se distribui cilindricamente simetricamente, de forma que em um fio a uma distância r de A a corrente é aproximadamente $\frac{I}{2\pi r}$. Dessa forma a diferença de potencial entre os pontos A e C é aproximadamente dada pela integral desse valor de corrente de $r = 1$ até $r = n$, e assim obtemos $R_{AC} = \frac{I}{2\pi} \log n \Omega$. Agora considere o caso onde extraímos corrente I em C e queremos saber a diferença de potencial entre A e C.

Similarmente a antes, acharemos o mesmo resultado, e usando o principio da superposição temos que a resistencia equivalente aproximada entre A e C é $\frac{1}{\pi} \log n \Omega \sim \log n \Omega$. Note que como queremos apenas a dependencia em n , $\log n$ é suficiente.

Similarmente, em 3D, a corrente se distribui esfericamente simetricamente, de forma que em um fio a uma distancia r de A a corrente é da forma $\frac{I}{4\pi r^2}$. Repetindo o argumento, a ddp entre A e C é aproximadamente dada pela integral entre esses dois pontos, e assim obtemos uma resistencia equivalente de $\frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi}$ para n grande. Note que como queremos apenas a dependencia em n , basta notar que é constante com n .

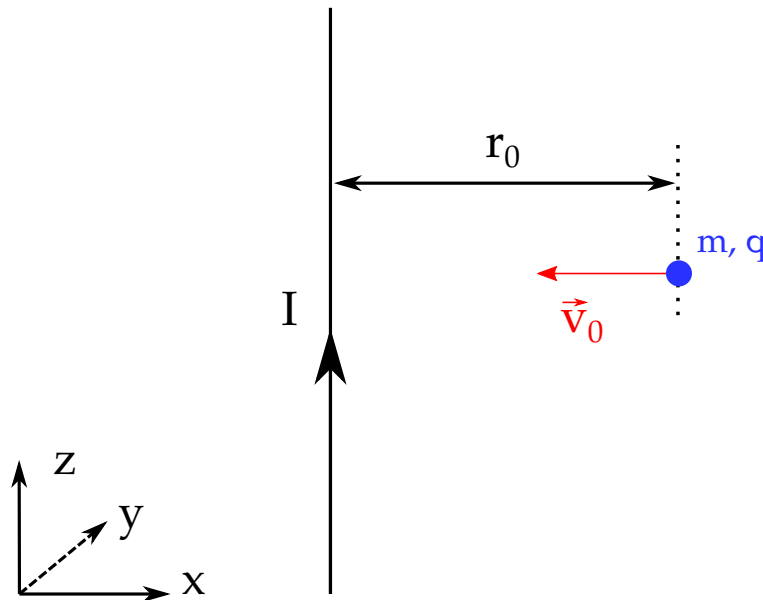
Notavelmente, em 1D a resistencia equivalente cresce linearmente com n , em 2D cresce com o logaritmo de n , e em 3D tende a uma constante.

Marking Scheme

- +1.0 Pontos por notar que em 1D a resistencia equivalente deve crescer linearmente com n : $R_{AC} \sim n$
- +1.0 Pontos por notar que em 2D e 3D pode se usar superposição, junto com o fato que a corrente se distribui simetricamente na malha
- +1.0 Pontos por obter que em 2D: $R_{AC} \sim \log n$
- +1.0 Pontos por obter que em 3D: R_{AC} é constante com n .

Q4 - Partícula sob campo de um fio infinito (10 pontos)

Considere um fio infinito carrega uma corrente $I > 0$ ao longo do eixo \hat{z} de um sistema cartesiano de coordenadas. Uma partícula de massa m e carga $q > 0$, inicialmente à distância x_0 do fio, é lançada com velocidade v_0 em direção a este ($-\hat{x}$), como mostra a figura abaixo.



A. Calcule o vetor do campo magnético \vec{B} em um ponto no plano xz a uma distância geral x do fio. 2.0pt

B. Determine expressões para as componentes da aceleração da partícula: $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, e $\frac{dv_z}{dt}$. Deixe sua resposta em função de q , m , I , v_x , v_y , v_z , e a distância da partícula ao fio x . 3.0pt

Inicialmente, a partícula se aproxima do fio, mas passado um tempo, ela atinge uma distância mínima do fio, a partir do qual, depois disso, ela começa a se afastar do fio. Nesse momento de distância mínima, a velocidade da partícula pode ser escrita como $\vec{v} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$.

C. Determine os valores de V_x , V_y e V_z . 2.0pt

D. Qual é a distância mínima x_{min} que a partícula chega do fio? 3.0pt

Dica: Se necessário, use a integral

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Gabarito:

Esse problema usa principalmente dos conceitos de campo magnético e requer domínio no uso de vetores em problemas de mecânica.

a)

A forma como o aluno lida com os vetores e simetrias na lei de Ampere não importam muito, contanto que sejam argumentos razoáveis. O mais importante é partir da lei de Ampere e trabalhar com os vetores, e não simplesmente escrever jogado o campo de um fio infinito.

A lei de Ampere diz que, dado uma curva fechada C:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

Podemos também usar do fato que o fio tem simetria ao redor de z, de modo que pontos à uma mesma distância do fio no plano xy precisam ter o mesmo modulo de campo, e eu posso escrever o modulo como sendo $|\vec{B}| = B(r)$. Além disso, como a corrente segue o eixo z, pela regra da mão direita, o campo tem que na direção $\hat{\theta}$, e então eu posso escrever $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$.

Usando a curva C como um circulo de raio R no plano xy centrado no fio, temos que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(R) \oint_C dl = B(R)(2\pi R)$$

Assim, chegamos que:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

O modulo do campo na partícula numa distância r_0 então é $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$. Podemos usar a regra da mão direita novamente pra acharmos que, no ponto definido, o campo aponta em \hat{y} . Assim:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \hat{y}$$

Critérios de correção:

- Escreveu a lei de Ampère ou análogo : 0.5
- Usou da simetria do fio ou análogo para argumentar a simetria radial do campo : 0.5
- Usou a regra da mão direita, a própria lei de Ampère ou análogo para achar a direção do campo magnético e o resultado da integral: 0.5
- Achou a resposta final com módulo e direção do campo corretos: 0.5

b)

A ideia do problema é trabalhar com o produto vetorial e tirar informações uteis dele. O principal é o aluno conseguir notar que, inicialmente v_y é igual a zero e portanto sempre será zero. A única maneira da partícula sair do plano xz é a partir do surgimento de uma velocidade em y, mas como o campo aponta em y, a força do campo magnético sera sempre perpendicular a essa direção, e se mexer em x ou em z não muda a direção do campo, de forma que a partícula nunca acelerara em y, e portanto a partícula sempre estará no plano xz. Com isso, se a partícula esta uma distância x do fio, o campo atuando nela sera:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y}$$

Com isso, dado que em certo momento a partícula possui v_x , v_y , e v_z , temos que:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y}$$
$$m \left(\frac{dv_x}{dt} \hat{x} + \frac{dv_y}{dt} \hat{y} + \frac{dv_z}{dz} \hat{z} \right) = q \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (v_x \hat{z} - v_z \hat{x})$$

O que nos dá então:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -q \frac{\mu_0 I}{2\pi x m} v_z \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_z}{dt} &= q \frac{\mu_0 I}{2\pi x m} v_x\end{aligned}$$

Nota: não é necessário assumir um v_y geral e achar que dv_y/dt é nulo. Pode ser usado o fato que a partícula está sempre no plano xz para escrever que sempre $v_y = 0$ e $dv_y/dt = 0$.

Critérios de correção:

- Argumentou a falta de velocidade inicialmente na direção y , e usou do fato que o campo não muda de direção devido ao movimento em x ou z , e portanto a partícula não sofre forças em y durante seu movimento: 1.0.
- Escreveu as equações de movimento de v_x e v_z com os sinais corretos partindo da Lei de Newton e resolvendo a equação: 0.8.
- Escreveu que $\frac{dv_y}{dt} = 0$, seja por assumir que $v_y = 0$ pela restrição do movimento, ou por assumir um v_y geral na Lei de Newton e chegar a essa resposta final: 0.2

c)

Pela definição de distância mínima do fio, a partícula nesse momento não está nem se afastando nem se aproximando (se estivesse se afastando, então em um momento anterior, ela estava mais próxima do fio, e caso estivesse se aproximando, num momento futuro, ela estaria ainda mais próxima, o que quebra a ideia da distância mínima durante toda a trajetória). Por consequência

$$V_x = 0$$

Como a quantidade $v_x^2 + v_z^2$ é conservada (devido a conservação de energia), e no momento inicial ela era igual a $(-v_0)^2 + 0^2$, temos que:

$$\begin{aligned}V_x^2 + V_z^2 &= v_0^2 \\ V_z^2 &= v_0^2\end{aligned}$$

. Chegamos então em:

$$V_z = -v_0$$

O sinal de menos precisa existir porque a quantidade conservada diz apenas sobre o módulo de v_z , e sabemos pela direção da força em z que, como inicialmente $v_x = -v_0$ a partícula adquire velocidade em $-z$, e isso só para de ser verdade depois que a partícula passa a ter $v_x > 0$, isso só acontece depois do momento de distância mínima.

Critérios de correção:

- Argumentou que no ponto de distância mínima $v_x = 0$: 0.3
- Usando a quantidade conservada, achou que $v_z = -v_0$: 0.7

d)

Existem duas maneiras de resolver esse problema, um deles envolve uma integral complicada, outra envolve uma integral mais simples, apresentaremos ambas.

Método 1:

Usando do fato que

$$\frac{dv_x}{dt} = -q \frac{\mu_0 I}{2\pi x m} v_z$$

Podemos usar da conservação de energia para escrever que:

$$v_z = -\sqrt{v_0^2 - v_x^2}$$

Usando também do fato que, devido a regra da cadeia:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Chegamos na equação:

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{q\mu_0 I}{2\pi x m} \sqrt{v_0^2 - v_x^2}$$

O que é uma equação que relaciona v_x com x . Indo do ponto onde $v_x = v_0$ até o ponto onde $v_x = 0$, podemos achar o valor de x_0 :

$$\frac{2\pi m}{q\mu_0 I} \frac{v_x dv_x}{\sqrt{v_0^2 - v_x^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int_{r_0}^{x_0} \frac{dx}{x} = \frac{2\pi m}{q\mu_0 I} \int_{v_0}^0 \frac{v_x dv_x}{\sqrt{v_0^2 - v_x^2}}$$

Usando a integral dada na prova, temos que:

$$\int_{v_0}^0 \frac{v_x dv_x}{\sqrt{v_0^2 - v_x^2}} = -v_0$$

Assim

$$\ln\left(\frac{x_0}{r_0}\right) = -\frac{2\pi m}{q\mu_0 I} v_0$$

Chegamos então na resposta:

$$x_0 = r_0 \exp\left\{\left(-\frac{2\pi m}{q\mu_0 I} v_0\right)\right\}$$

Método 2:

Partindo da equação:

$$\frac{dv_z}{dt} = q \frac{\mu_0 I}{2\pi x m} v_x$$

Podemos usar do fato que $v_x = \frac{dx}{dt}$ e escrever a relação entre uma pequena mudança em v_z e uma pequena mudança em x :

$$dv_z = q \frac{\mu_0 I}{2\pi x m} dx$$

Agora, inicialmente, $x = r_0$ e tínhamos $v_z = 0$; passado um tempo, atingimos $x = x_0$ onde, como vimos, $v_z = -v_0$.

Integrando nesses dois limites, chegamos em:

$$q \frac{\mu_0 I}{2\pi m} \int_{r_0}^{x_0} \frac{dx}{x} = \int_0^{-v_0} dv_z$$

$$\ln \left(\frac{x_0}{r_0} \right) = -\frac{2\pi m}{q\mu_0 I} v_0$$

O que nos dá a mesma resposta obtida anteriormente, mas com muito menos matemática e sem a necessidade de integrais complicadas:

$$x_0 = r_0 \exp \left\{ \left(-\frac{2\pi m}{q\mu_0 I} v_0 \right) \right\}$$

Critérios de correção (PARA MÉTODO 1):

- Usou a equação de $\frac{dv_x}{dt}$ (mesmo que não tenha usado ela corretamente, se demonstrou que ia achar a distância mínima partindo das equações de movimento, já está ótimo): 1.0
- Usou a quantidade conservada para tirar v_z da equação: 0.7 (-0.2 se usado o sinal incorreto)
- Usou a regra da cadeia para transformar a equação em uma relação entre v_x e x : 0.3
- Definiu a integral e calculou ela corretamente, chegando à resposta final: 1.0 (-0.3 para cada erro de cálculo, e para definição dos limites da integral incorretamente)

Critérios de correção (PARA MÉTODO 2):

- Usou a equação de $\frac{dv_z}{dt}$ (mesmo que não tenha usado ela corretamente, se demonstrou que ia achar a distância mínima partindo das equações de movimento, já está ótimo): 1.0
- Transformou a equação em uma relação entre v_z e x : 1.0
- Definiu a integral e calculou ela corretamente, chegando à resposta final: 1.0 (-0.3 para cada erro de cálculo, e para definição dos limites da integral incorretamente).

Q5 - UMA VISÃO “QUÂNTICA” DE PROBLEMAS CLÁSSICOS (10 pontos)

O conceito de **Ondas de Matéria** foi proposto por Louis D’Broglie em 1924, na sua tese apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade de Paris. D’Broglie propôs que, ao movimento de toda partícula, estava associada uma **onda** cujo comprimento de onda, λ_{DB} , se relaciona com o momento linear da partícula através da expressão

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

onde $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ é a constante universal de Planck. Desta forma, segundo D’Broglie, a matéria teria caráter dual, se comportando, dependendo da natureza do fenômeno em questão, como uma onda ou como uma partícula. As funções que descrevem as ondas de matéria de D’Broglie são chamadas de **Funções de onda**, e constituem o objeto matemático fundamental da **Mecânica Quântica**.

Max Born deu uma interpretação probabilística a estas funções. O módulo ao quadrado da função de onda representa a função **Densidade de Probabilidade** associada à probabilidade da ocorrência do evento específico caracterizado por dita função, ou seja, por exemplo

$$|\psi(x, t)|^2 = f(x, t)$$

é a função densidade de probabilidade ligada à probabilidade de, durante um processo de “medição”, encontrarmos uma partícula na posição x , no instante t . Da teoria das probabilidades, para este exemplo específico, sabemos que a probabilidade de encontrarmos a partícula, no instante t , na posição x é dada por:

$$P(x, t) = f(x, t)\Delta x \Rightarrow P(x, t) = \int f(x, t)dx.$$

Em um dado instante de tempo, o valor médio de uma grandeza qualquer, num certo intervalo ($x_1 \leq x \leq x_2$) pode ser calculado a partir desta função densidade de probabilidade como segue:

$$\langle A \rangle = \int_{x_1}^{x_2} Af(x)dx$$

Como consequência do postulado de D’Broglie e de propriedades simples comuns a todas as ondas, Werner Heisenberg mostrou que não é possível determinar, por meio de uma experiência real, a posição e o momento linear da matéria ou da radiação, simultaneamente. A precisão destas medidas simultâneas, estão relacionadas através de uma expressão conhecida como **Relação de Incerteza** de Heisenberg. O princípio de Heisenberg diz, na realidade, que, mesmo que tenhamos instrumentos ideais, nunca poderemos obter, na medição simultânea, resultados melhores do que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Nesta expressão, Δx e Δp são as incertezas nas medições da posição x e do momento p_x .

Parte A: A partícula livre e o princípio de incerteza

O princípio de incerteza de Heisenberg, na sua versão para a energia e o tempo tem a forma $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$. Uma interpretação desta expressão é a seguinte: sistemas estáveis possuem um “tempo de vida” elevado, enquanto que sistemas instáveis duram pouco.

Considere uma partícula em movimento uniformemente acelerado, durante o qual, a posição varia com o tempo da forma $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

- a. Prove que as expressões do princípio de incerteza nas versões momento-coordenada e energia-tempo, correspondentes ao movimento desta partícula são equivalentes. Suponha que a partícula se move, o tempo todo, na direção horizontal, coincidente com o nível **zero** de energia potencial. 3,0pt

Parte B: Partícula numa caixa vertical sob efeito da gravidade

Imagine uma partícula em queda livre a partir de uma altura $h \ll R_{Terra}$. Analise o movimento desta partícula sob os efeitos do campo gravitacional terrestre, e a partir desta análise, faça o que se pede nos itens a seguir.

- b.** Encontre uma expressão para o valor mais provável $\langle y(t) \rangle$ da posição da partícula 5,0pt em qualquer instante de tempo. Comente o resultado.

DICAS:

- i) considere que estão sendo registradas as posições da partícula em cada instante de tempo, e que a probabilidade do “registro” da partícula pode ser descrita como $\frac{dt}{T}$, onde T é seu tempo total de “voo”;
- ii) utilize um referencial fixo apontando para baixo, com a origem no ponto de onde a partícula começa a cair.

- c.** Escreva a função de onda de matéria associada ao movimento de queda livre da partícula. Verifique que a probabilidade de encontrar a partícula durante a queda, entre $y = h$ e $y = 0$ é igual a 1, ou seja, há certeza total de que, ao longo do tempo T , a partícula estará nesse intervalo de coordenadas. 2,0pt

Gabarito:

item a. Da equação do movimento $x(t)$

$$\Delta x = v_{0x}\Delta t + \frac{a_x}{2}2t\Delta t = v_{0x}\Delta t + a_x t\Delta t = (v_{0x} + a_x t)\Delta t \rightarrow \Delta x = v_x \Delta t$$

Da definição de energia cinética $E = E_c = \frac{p_x^2}{2m}$

$$2m\Delta E = 2p_x\Delta p_x \rightarrow \Delta p_x = \frac{m\Delta E}{p_x} = \frac{\Delta E}{v_x}$$

Então, construindo a relação de Heisenberg para x e p_x

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = (v_x \Delta t) \cdot \left(\frac{\Delta E}{v_x}\right) \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta E \cdot \Delta t$$

Distribuição da pontuação:

1,0 ponto pela expressão de Δx

1,0 ponto pela expressão de Δp_x

1,0 ponto pela relação final

item b. Na queda livre

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow dt = \frac{dy}{gt}$$

Também

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Da definição de probabilidade de registro, fornecida no texto

$$p[y, t] = \frac{dy}{t} \sqrt{\frac{1}{2gh}} = \frac{dy}{\sqrt{2gh}} \frac{1}{t}$$

O tempo, da equação de movimento

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Colocando na expressão da probabilidade

$$p[y] = \frac{dy}{\sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{g}{2y}} \rightarrow p[y] = \frac{dy}{2\sqrt{hy}}$$

Nesta equação reconhecemos a função densidade de probabilidade como sendo

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{hy}}$$

Para calcular o valor médio de y

$$\langle y \rangle = \int_0^h y \left(\frac{1}{2\sqrt{hy}} \right) dy = \frac{1}{2\sqrt{h}} \int_0^h y^{1/2} dy = \frac{h}{3}$$

Distribuição da pontuação:

3,0 pontos pela expressão da probabilidade

1,0 ponto pela expressão de $f(y)$

1,0 ponto pelo valor médio de y

item c. Da relação entre **função de onda** e **função densidade de probabilidade**

$$|\psi|^2 = \frac{1}{2\sqrt{hy}}$$

Daí

$$|\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(hy)^{1/4}}$$

Normalizando...

$$p[y : 0 - h] = \frac{1}{2\sqrt{h}} \int_0^h y^{1/2} dy = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left[\frac{y^{1/2}}{1/2} \Big|_0^h - \frac{y^{1/2}}{1/2} \Big|_0 \right] = 1$$

Distribuição da pontuação:

1,0 ponto pela expressão de $|\psi|$

1,0 ponto pela normalização