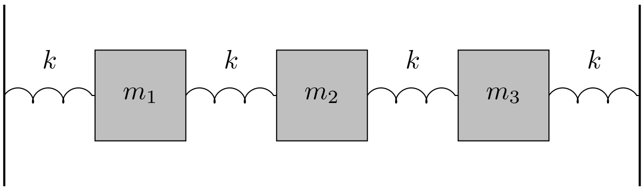
Q1 - Oscilações acopladas (10 pontos)

Três massas $m_1 = m_2 = m_3 = m$ estão conectadas em uma linha reta por quatro molas idênticas de constantes elásticas k. As extremidades das molas mais à esquerda e mais à direita estão fixas em duas paredes, como mostrado na figura abaixo. Os corpos estão livres para se movimentar apenas na direção horizontal.



Denote por x_1, x_2 e x_3 as posições de cada uma das massas, respectivamente, a partir da posição de equilíbrio do sistema $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ na qual as molas encontram-se no seu comprimento natural. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a.	Determine as equações diferenciais que descrevem a variação de x_1, x_2 e x_3 com o tempo.	2,0pt

b.	Determine a energia elástica U armazenada no sistema para uma configuração na qual as massas encontram-se em posições genéricas x_1, x_2 e x_3.	2,0pt

Uma oscilação qualquer das massas pode não ter uma frequência bem definida, mas sempre pode ser descrita como a superposição de três modos de oscilação com frequências angulares distintas, dadas por $\omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3$. Essas frequências angulares podem ser escritas convenientemente em função de $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

c.	Determine os valores de ω_1, ω_2 e ω_3 em função de ω_0.	6,0pt

Gabarito:

a) Para determinar as equações diferenciais que descrevem a variação de x_1, x_2 e x_3 com o tempo, aplicamos a segunda lei de Newton a cada massa.

Massa m_1:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$$

Massa m_2:

$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$

Massa m_3:

$$m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3) - kx_3$$
$$m\ddot{x}_3 = kx_2 - 2kx_3$$

Portanto, as equações diferenciais são:

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$$
$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$
$$m\ddot{x}_3 = kx_2 - 2kx_3$$

b) A energia elástica armazenada no sistema é a soma das energias elásticas de todas as molas. A energia elástica de uma mola esticada ou comprimida é dada por $\frac{1}{2}k\Delta x^2$, onde Δx é a deformação da mola.

Para a mola entre A e m_1: $\frac{1}{2}kx_1^2$

Para a mola entre m_1 e m_2: $\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$

Para a mola entre m_2 e m_3: $\frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$

Para a mola entre m_3 e D: $\frac{1}{2}kx_3^2$

Portanto, a energia elástica total armazenada no sistema é:

$$U = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2\right]$$

c) Para determinar as frequências naturais de oscilação do sistema, procuramos soluções oscilatórias do tipo:

$$x_i(t) = A_i e^{i\omega t}$$

Substituindo nas equações diferenciais, obtemos:

$$m(-\omega^2)A_1 = -2kA_1 + kA_2$$

$$m(-\omega^2)A_2 = kA_1 - 2kA_2 + kA_3$$

$$m(-\omega^2)A_3 = kA_2 - 2kA_3$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -2k - m\omega^2 & k & 0 \\ k & -2k - m\omega^2 & k \\ 0 & k & -2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que existam soluções não triviais, o determinante da matriz deve ser zero:

$$\begin{vmatrix} -2k - m\omega^2 & k & 0 \\ k & -2k - m\omega^2 & k \\ 0 & k & -2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Isso conduz à seguinte equação de 6^o grau em ω

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2) - 2\omega_0^2(\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0, \tag{1}$$

que pode ser fatorada em

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2) \cdot (\omega^2 - 2\omega_0^2 - \sqrt{2}\omega_0^2) \cdot (\omega^2 - 2\omega_0^2 + \sqrt{2}\omega_0^2) = 0. \tag{2}$$

As 3 raízes positivas dessa equação correspondem às frequências desejadas. São elas:

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 \tag{3}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0 \tag{4}$$

$$\omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 \tag{5}$$

Critério de correção:

a) Equações de movimento

- Uso correto das leis de Newton: 0.5 pontos
- $m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$ corretamente derivada: 0.5 pontos
- $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$ corretamente derivada: 0.5 pontos
- $m\ddot{x}_3 = kx_2 - 2kx_3$ corretamente derivada: 0.5 pontos

b) A pontuação da energia elástica será dada por cada parcela encontrada:

- $\frac{1}{2}kx_1^2$: 0.5 pontos
- $\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$: 0.5 pontos
- $\frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$: 0.5 pontos
- $\frac{1}{2}kx_3^2$: 0.5 pontos

c) Frequências angulares de oscilação:

- Substituição de $x_i(t) = A_i e^{i\omega t}$ nas equações diferenciais: 1 ponto
- Montagem correta da equação característica na forma matricial: 1 ponto
- Cálculo correto do determinante da matriz: 1 ponto
- Identificação da solução $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$: 1 ponto
- Identificação da solução $\omega = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})\frac{k}{m}}$: 2 ponto

Q2 - Transferência de órbitas (10 pontos)

Um satélite de massa m encontra-se inicialmente em órbita circular C_1, de raio R, ao redor da Terra. Nesse problema, discutiremos como realizar a transferência do satélite dessa condição inicial para uma nova órbita circular C_2, de raio $2R$. Denote a massa da Terra por M. Considerando a órbita inicial do satélite, responda aos itens a seguir.

a.	Determine a velocidade orbital v do satélite na órbita C_1.	1,0pt

b.	Determine a energia E do satélite na órbita C_1. Adote o referencial de energia potencial gravitacional no infinito.	1,0pt

Para realizar a transferência de órbita desejada, dispomos de dois incrementos de velocidade impulsivos capazes de gerar uma variação $\Delta\vec{v}$ durante um intervalo de tempo muito menor do que o período de revolução do satélite. O primeiro impulso faz com que o satélite saia de sua órbita circular original e passe a descrever uma órbita elíptica E.

A seguir, em um determinado instante, um segundo impulso é acionado, a fim de transferir o satélite da órbita elíptica de transferência para a nova órbita circular desejada, C_2. Considere os impulsos ocorrem sempre na direção tangencial às trajetórias e são tais que o consumo de combustível é o menor possível.

c.	Determine o semi-eixo maior, a, da órbita E.	1,5pt

d.	Determine a energia E do satélite na órbita E.	1,5pt

e.	Determine o impulso Δv_1 do primeiro impulso.	3,0pt

f.	Determine o impulso Δv_2 do segundo impulso.	2,0pt

Gabarito:

a) A velocidade orbital v de um satélite em uma órbita circular de raio R é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

b) A energia mecânica total E de um satélite em órbita circular é a soma da energia cinética K e da energia potencial U:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R}\right) = \frac{GMm}{2R}$$

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

$$E = K + U = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

c) A órbita elíptica E de transferência terá o apogeu em $2R$ e o perigeu em R. O semi-eixo maior a é a média das distâncias máxima e mínima ao centro da Terra:

$$a = \frac{R + 2R}{2} = \frac{3R}{2}$$

d) A energia total de uma órbita elíptica é dada por:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Substituindo $a = \frac{3R}{2}$:

$$E = -\frac{GMm}{2\left(\frac{3R}{2}\right)} = -\frac{GMm}{3R}$$

e) O primeiro impulso ocorre na órbita circular C_1 para colocar o satélite na órbita elíptica E. A velocidade inicial na órbita circular C_1 é:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

A velocidade no perigeu da órbita elíptica E é dada por:

$$v_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)}$$

Substituindo $a = \frac{3R}{2}$:

$$v_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{\frac{3R}{2}}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{3R}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{6-2}{3R}\right)} = \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$$

O impulso Δv_1 é a diferença entre a velocidade no perigeu da órbita elíptica e a velocidade inicial na órbita circular:

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{\frac{4GM}{3R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{4GM}{3R}} - \sqrt{\frac{3GM}{3R}}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{3R}}\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

f) O segundo impulso ocorre no apogeu da órbita elíptica E para colocar o satélite na nova órbita circular C_2 de raio $2R$. A velocidade no apogeu da órbita elíptica E é dada por:

$$v_a = \sqrt{GM\left(\frac{2}{2R} - \frac{1}{a}\right)}$$

Substituindo $a = \frac{3R}{2}$:

$$v_a = \sqrt{GM\left(\frac{1}{R} - \frac{2}{3R}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{3-2}{3R}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

A velocidade na órbita circular C_2 é:

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

O impulso Δv_2 é a diferença entre a velocidade na nova órbita circular e a velocidade no apogeu da órbita elíptica:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \sqrt{\frac{GM}{2R}} - \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Critérios de Correção:

a)

- Análise da força gravitacional como resultante centrípeta: 0.5 pontos
- Cálculo correto da velocidade orbital $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$: 0.5 pontos

b)

- Cálculo correto da energia cinética $K = \frac{GMm}{2R}$: 0.25 pontos
- Cálculo correto da energia potencial $U = -\frac{GMm}{R}$: 0.25 pontos
- Energia total correta $E = -\frac{GMm}{2R}$: 0.5 pontos

c)

- Identificação correta do apogeu e perigeu da órbita elíptica: 0.5 pontos
- Cálculo correto do semi-eixo maior $a = \frac{3R}{2}$: 1 ponto

d)

- Identificação correta da fórmula para a energia total de uma órbita elíptica: 0.75 pontos
- Cálculo correto da energia total $E = -\frac{GMm}{3R}$: 0.75 pontos

e)

- Cálculo correto da velocidade no perigeu da órbita elíptica v_p: 1.5 ponto
- Cálculo correto do impulso Δv_1: 1.5 pontos

f)

- Identificação correta da velocidade no apogeu da órbita elíptica v_a: 0.5 pontos
- Cálculo correto da velocidade na nova órbita circular v_2: 0.5 pontos
- Cálculo correto do impulso Δv_2: 1 ponto

Q3 - Trocador de calor (10 pontos)

Neste problema, analisaremos um modelo simplificado de um trocador de calor entre fluidos. O trocador é composto de uma placa metálica muito fina de espessura w, largura L e semi-infinita no eixo $\hat{x}$. Acima da placa metálica passa um filme de água quente, e, abaixo, um filme de água fria. Ambos os fluxos de têm uma velocidade constante $\vec{v} = v\hat{x}$, e uma espessura pequena h.

Se a água quente entra no trocador (em $x = 0$) a uma temperatura T_1^0, e a água fria a uma temperatura T_2^0, o efeito do trocador é conduzir calor entre os fluidos e levá-los a um equilíbrio térmico ao longo do eixo x. Neste problema, estudaremos este fenômeno e a dependência das temperaturas de cada fluido em função da coordenada x.

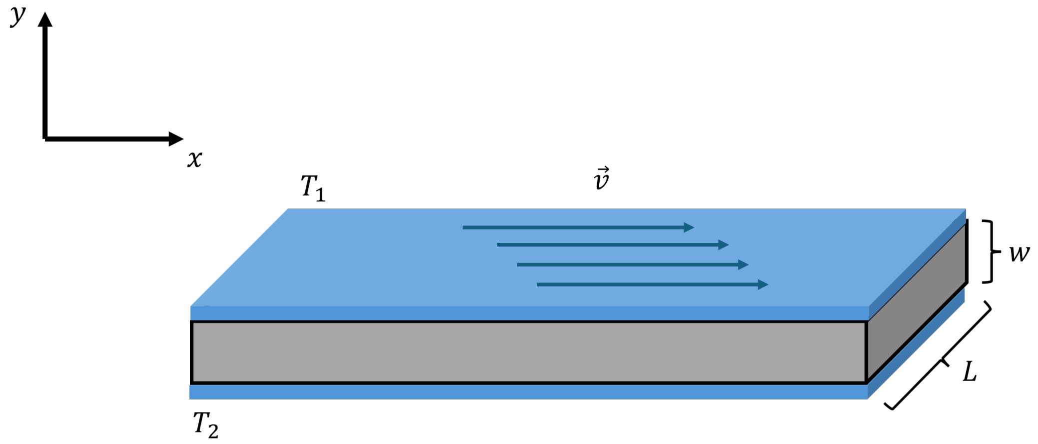


Figura 1: Movimento dos dois filmes de água nas duas faces da placa metálica.

Assumiremos que os filmes de água encontram-se em equilíbrio hidrodinâmico e que são suficientemente finos tal que sua temperatura depende apenas da coordenada x (e não de y). Dessa maneira, seja $T_1(x)$ a temperatura da face superior da placa, e $T_2(x)$ a temperatura da face inferior da placa. Seja ainda k a condutividade térmica do metal, ρ a densidade da água, e c sua capacidade térmica.

Considerando a condição de escoamento estacionário, faça o que se pede nos itens a seguir.

a. Determine o valor de $T_1(x) + T_2(x)$ em função de T_1^0 e T_2^0 . 2,0pt

b. Determine uma expressão para a diferença de temperatura entre os fluidos 7,0pt

$$\theta(x) = T_1(x) - T_2(x)$$

em função da coordenada x.

c. Determine $T_1(x)$ e $T_2(x)$ em função dos dados fornecidos no enunciado. 1,0pt

Gabarito:

a) Note que nenhuma quantidade de calor escapa do sistema, e simplesmente é transferido do líquido quente para o líquido frio, logo $T_1(x) + T_2(x)$ deve ser constante. Assim:

$$T_1(x) + T_2(x) = T_1(0) + T_2(0) \tag{6}$$

b) Agora, considere uma fatia fina de líquido na face superior de espessura Δx. O fluxo de calor da face superior para a inferior é (dado que o metal é muito fino):

$$\phi = k(L \cdot \Delta x)\nabla T \approx kL\Delta x \frac{T_1(x) - T_2(x)}{w} \tag{7}$$

Esse fluxo de calor causa a diminuição da temperatura $T_1(x)$ ao longo de x. Em particular, a energia térmica dessa fatia é:

$$E = \rho c(h \cdot L \cdot \Delta x)T_1(x) \tag{8}$$

E por unidade de tempo, temos que:

$$\frac{dE}{dt} = \rho chL\Delta x \left(v\frac{dT_1(x)}{dx} \right) = -\phi = -\frac{kL\Delta x}{w}(T_1(x) - T_2(x)) \tag{9}$$

Logo:

$$\frac{dT_1}{dx} = -\frac{k}{\rho chwv} \cdot (T_1(x) - T_2(x)) \tag{10}$$

Usando que $T_1 + T_2 = T_1(0) + T_2(0)$, resolvemos a equação acima para:

$$T_{1,2}(x) = \frac{T_1(0) + T_2(0)}{2} \mp \frac{T_1(0) - T_2(0)}{2} \exp\left(-\frac{2k}{\rho chwv} \cdot x \right) \tag{11}$$

Marking Scheme:

- +1.0 por perceber que $T_1(x) + T_2(x)$ deve ser constante
- +3.0 por perceber que o fluxo de calor por condução deve ser totalmente vertical, e por aproximar que o gradiente de temperatura é $\frac{T_1(x)-T_2(x)}{w}$
- +3.0 por calcular a energia de um pequeno filete de agua de espessura Δx, e calcular a mudança de energia por unidade de tempo do filete
- +2.0 Pela equação para $\frac{dT}{dx}$.
- +1.0 Pela expressão de $T_1(x)$, $T_2(x)$

Q4 - Interferência por espelhos (10 pontos)

Considere o experimento de interferência ilustrado na Figura 2. No aparato experimental dispomos de uma fonte de luz pontual no ponto F, dois espelhos levemente inclinados com respeito à direção vertical articulados no ponto E, e um anteparo vertical em T. No anteparo, observaremos um padrão de interferência na intensidade da luz $I(y)$. Nesta questão, estudaremos este fenômeno e a função $I(y)$.

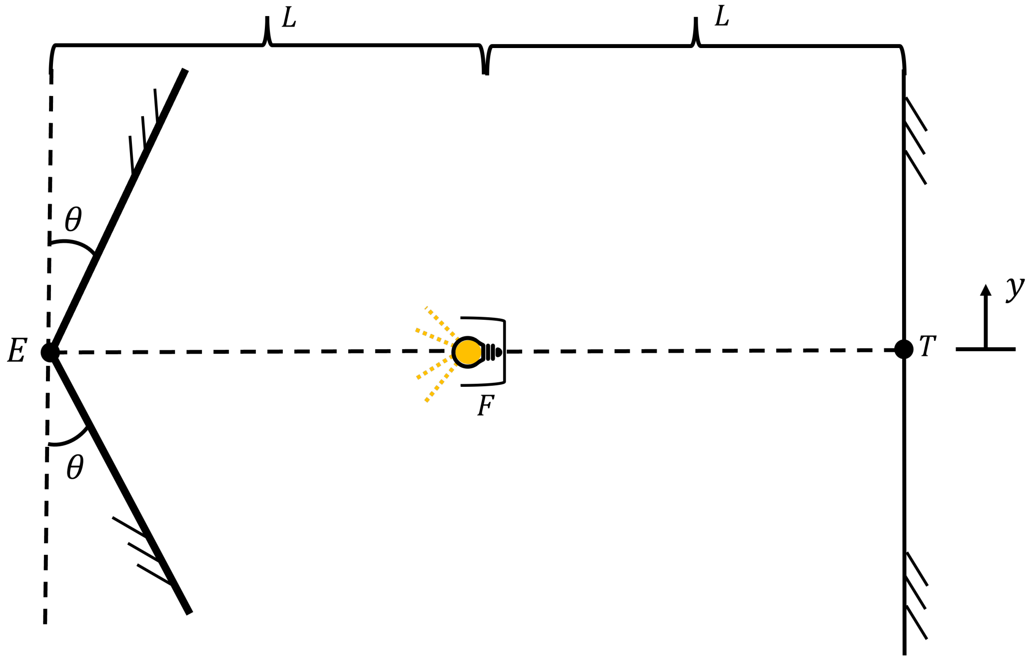


Figura 2: O aparato experimental. Na figura, a luz da fonte F está sendo parcialmente obstruída, e só pode incidir no anteparo incidindo primeiramente nos espelhos.

Considere que os espelhos estão inclinados a um ângulo θ, a distância entre a fonte F e o ponto E é L, a distância entre F e a tela T também é L e que o comprimento de onda da luz emitido pela fonte é λ. Assumiremos que $y \ll L$, e que o ângulo θ é pequeno suficiente para que podemos desconsiderar múltiplas reflexões da luz nos espelhos.

Sempre que for solicitado uma expressão da intensidade $I(y)$, forneça como resposta uma função que considere a intensidade máxima observada igual a I_{max}.

a.	Assumindo que a fonte de luz está sendo parcialmente obstruída como na Figura 2, tal que a luz da fonte F só pode incidir na tela através de uma reflexão nos espelhos, encontre a intensidade da luz na tela $I(y)$ em funcão de y.	3,0pt

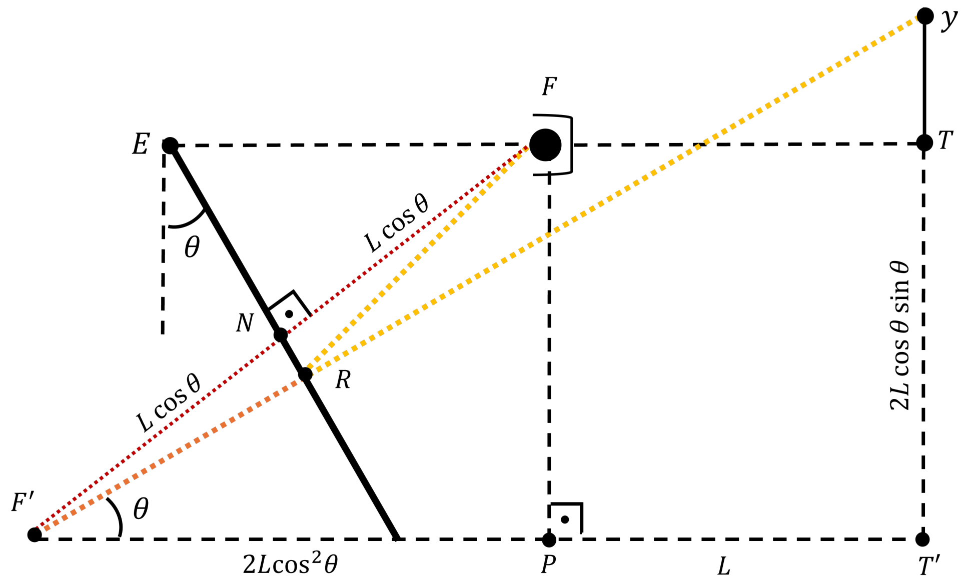
b.	Agora, remova a obstrução sobre a fonte de luz F, tal que a luz pode incidir na tela ambos com e sem reflexão nos espelhos. Encontre $I(y)$.	4,0pt

c.	Para a situação sem obstrução do item **b.**, calcule para quais valores de y a intensidade $I(y)$ é máxima e mínima, e o valor da intensidade nestes pontos. Também esboçe um gráfico de $I(y)$.	3,0pt

Gabarito:

a)

Com a obstrução, a luz que incide na tela a um ponto y vem de reflexões na face superior e inferior do espelho. Como ambos esses caminhos vão ter comprimentos distintos, teremos uma diferença de caminho, e assim uma diferença de fase.



Na figura, espelhamos a fonte F para F'. A distância horizontal entre F' e y é $2L\cos^2\theta + L$, e a vertical é $2L\cos\theta\sin\theta + y$. A distância total entre $F'y$ é:

$$D_{F'y} = \sqrt{(2L\cos^2\theta + L)^2 + (2L\cos\theta\sin\theta + y)^2} = \sqrt{8L^2\cos^2\theta + L^2 + 4Ly\cos\theta\sin\theta + y^2} \tag{12}$$

Se definirmos $D_0^2 \equiv 8L^2\cos^2\theta + L^2$, temos no limite $y \ll L$:

$$D_{F'y} = \sqrt{D_0^2 + 2Ly\sin 2\theta} = D_0\sqrt{1 + \frac{2Ly}{D_0^2}\sin 2\theta} \approx D_0 + \frac{Ly}{D_0}\sin 2\theta \tag{13}$$

Onde usamos a approximação de Bernoulli: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. A diferença de caminho (e de fase) entre os dois raios de luz é, portanto:

$$\Delta D = 2\frac{Ly}{D_0}\sin 2\theta \Rightarrow \Delta\phi = 2k\frac{Ly}{D_0}\sin 2\theta \tag{14}$$

Onde k é o numero de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Agora, lembrando resultados clássicos de interferência, a intensidade na parede será de:

$$I(y) = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} = 4I_0\cos^2\frac{2\pi Ly}{\lambda D_0}\sin 2\theta = 4I_0\cos^2\frac{2\pi\sin 2\theta}{\lambda\sqrt{8\cos^2\theta + 1}}y \tag{15}$$

b)

Sem a obstrução, temos três raios de luz incidentes em y. Os dois primeiros são através de reflexões nos espelhos, e viajam distâncias:

$$D_{\pm} = D_0 \pm \frac{Ly}{D_0}\sin 2\theta = D_0 \pm \frac{\Delta\phi}{2k} \tag{16}$$

E o terceiro viaja distância $D_3 = \sqrt{L^2 + y^2} \approx L$. Também perceba que os raios de luz incidente nos espelhos ganham uma diferença de fase de π devido a reflexão. Assim, sendo A a amplitude de uma onda, a onda em y é:

$$\psi = Ae^{ikD_+ + i\pi} + Ae^{ikD_- + i\pi} + Ae^{ikL} = A(e^{ikL} - e^{ikD_0}(e^{i\Delta\phi/2} + e^{-i\Delta\phi/2})) = \tag{17}$$

$$= A\left(e^{ikL} - 2e^{ikD_0}\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right) = Ae^{ikL}\left(1 - 2e^{ik(D_0-L)}\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right) \tag{18}$$

Chamando $\Delta\phi_0 = k(D_0 - L)$, temos $\psi = A\exp(ikL)\left(1 - 2e^{i\Delta\phi_0}\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right)$, e a intensidade é $I \propto |\psi|^2$, assim:

$$I(y) = I_0\left|1 - 2e^{i\Delta\phi_0}\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right|^2 = I_0\left|(1 - 2\cos\Delta\phi_0\cos\frac{\Delta\phi}{2}) - 2i\sin\Delta\phi_0\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right|^2 \tag{19}$$

$$= I_0\left((1 - 2\cos\Delta\phi_0\cos\frac{\Delta\phi}{2})^2 + 4\sin^2\Delta\phi_0\cos^2\frac{\Delta\phi}{2}\right) = I_0\left(1 - 4\cos\frac{\Delta\phi}{2}\cos\Delta\phi_0 + 4\cos^2\frac{\Delta\phi}{2}\right) \tag{20}$$

c) Para achar o máximo/mínimo de $I(y)$, derivamos a equação acima com respeito a $\Delta\phi$:

$$\frac{dI(y)}{d\Delta\phi} \propto \frac{1}{2}\sin\frac{\Delta\phi}{2}\cos\Delta\phi_0 - \sin\frac{\Delta\phi}{2}\cos\frac{\Delta\phi}{2} = 2\sin\frac{\Delta\phi}{2}(\cos\Delta\phi_0 - 2\cos\frac{\Delta\phi}{2}) \tag{21}$$

Que é 0 em duas situações:

1. $\sin\frac{\Delta\phi}{2} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi m$ para um inteiro m. Note que $\Delta\phi = 2\pi m \Rightarrow \cos\frac{\Delta\phi}{2} = (-1)^{m+1}$. Portanto,

$$I = I_0\big(5 + (-1)^{m+1}\cdot 4\cdot\cos\Delta\phi_0\big) \tag{22}$$

2. $2\cos\frac{\Delta\phi}{2} = \cos\Delta\phi_0$. Portanto,

$$I = I_0(1 - 2\cos^2\Delta\phi_0 + \cos^2\Delta\phi_0) = I_0(1 - \cos^2\Delta\phi_0) \tag{23}$$

Dessa forma, a intensidade mínima sempre ocorre no segundo caso, em y tal que $\Delta\phi(y) = 2\arccos\left(\frac{\cos\Delta\phi_0}{2}\right)$:

$$y_{min} = \frac{D_0}{kL\sin 2\theta}\arccos\frac{\cos k(D_0 - L)}{2},\ \text{e}\ I_{min} = I_0(1 - \cos\Delta\phi_0)^2 \tag{24}$$

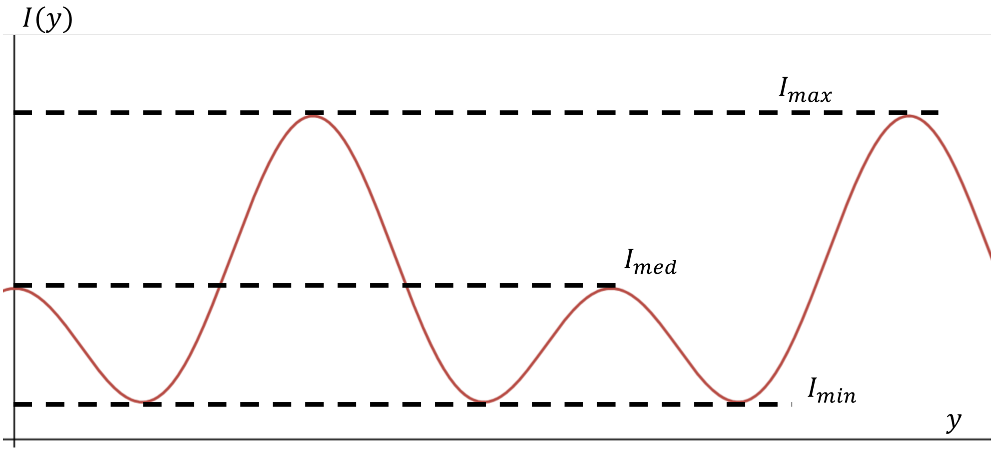
Por sua vez, o máximo de intensidade ocorre no primeiro caso, e tem valor

$$I_{max} = I_0(5 + 4\cdot|\cos\Delta\phi_0|) \tag{25}$$

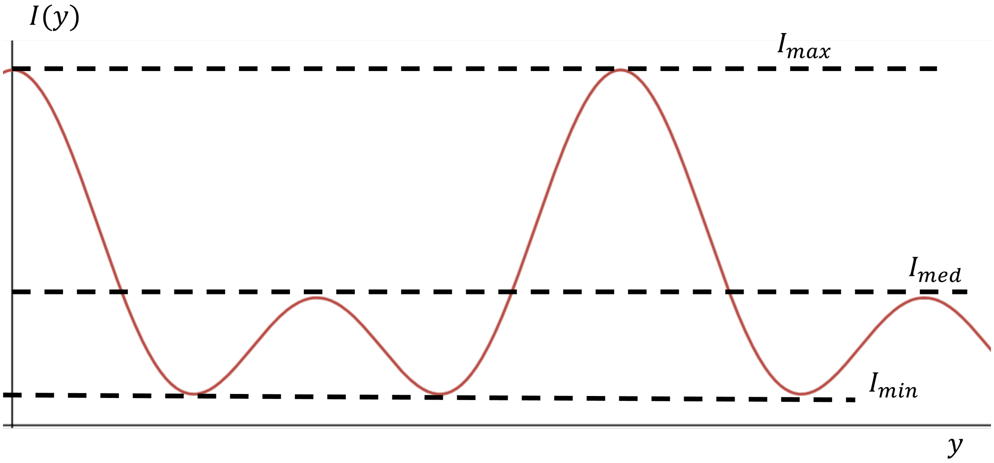
Porém, seu local depende se $\cos\Delta\phi_0$ é positivo ou negativo. Se negativo, o máximo ocorre em m impar; se positivo, m par; e

$$\Delta\phi = 2\pi m \Rightarrow y_{\max} = \frac{D_0}{kL\sin 2\theta}\pi m \tag{26}$$

Finalmente, para o gráfico, note que precisamos de tres pontos onde a derivada é 0. Esboçamos o grafico para $\cos\Delta\phi_0 > 0$ abaixo:



Similarmente, para $\cos \Delta\phi_0 < 0$ temos a seguinte variação:



Note que a diferença fundamental é se o primeiro ponto é o máximo global ou não.

Marking Scheme:

a)

- +1.0 por perceber que pode se refletir a fonte de luz F através dos espelhos e calcular a distância que a percorrida em função de y.
- +1.0 pela diferença de fase linearizada em funcção de y.
- +0.5 pela expressão $I(\Delta\phi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$.
- +0.5 pelo resultado correto de $I(y)$.

b)

- +1.0 por calcular corretamente a fase de cada um dos três raios de luz incidindo em y. Caso o fator de π da reflexão foi esquecido, desconte -0.5 pontos.
- +1.0 pela expressão da onda em y, expandida ate primeira ordem em y.
- +2.0 pela expressão final de $I(y)$ correta.

c)

- +1.0 por calcular a derivada de $I(y)$ corretamente e igualar a 0 para os pontos de máximo/mínimo.
- +1.0 por obter as 2 raízes distintas de $\Delta\phi$: $\Delta\phi = 2\pi m$ e $\Delta\phi = 2 \arccos \frac{\Delta\phi_0}{2}$.
- +1.0 por notar que teremos máximos globais e máximos locais que dependem do sinal de $\Delta\phi_0$.

- +1.0 pelo esboço de $I(y)$. O gráfico precisa indicar o ponto de mínimo e os dois máximos. Para ganhar pontos integrais, o aluno precisa indicar se esta considerando $\cos \Delta\phi_0 > 0$ (ou qualquer condição equivalente) no esboço, e indicar corretamente se o primeiro ponto é o máximo global ou não,

Q5 - Óptica do arco-íris. (10 pontos)

Arco-íris surgem porque as gotas de chuva espalham a luz, preferencialmente em certas direções. Esse efeito de focalização resulta em um céu mais brilhante em determinada região, e esse brilho é o que chamamos de arco-íris. As cores do arco-íris são causadas pelas diferenças nos índices de refração da água para diferentes comprimentos de onda.

Parte I - Arco-íris primário (6,0 pontos)

Considere um raio de luz incidindo na superfície de uma gota de chuva, formando um ângulo genérico ϕ com a horizontal. Suponha que o índice de refração da água seja igual a $\frac{4}{3}$ e que as gotas de chuva sejam perfeitamente esféricas. O raio de luz é refratado, formando um ângulo β com a direção radial da gota, conforme mostrado na figura a seguir.

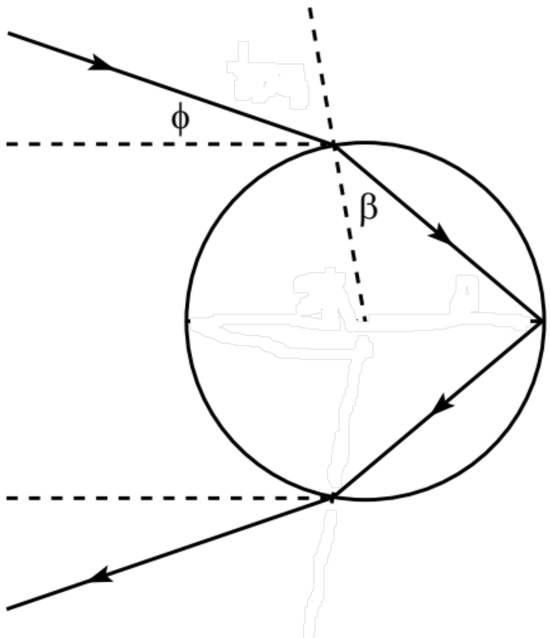


Figura 3: Esquema de uma reflexão total no interior de uma gota de chuva.

O ângulo de refração, β, dependerá do índice de refração específico de cada cor. Na figura acima se mostra o caso em que o raio refratado, após sofrer uma reflexão total interna na superfície posterior da gota, acaba sofrendo uma segunda refração e emerge da gota para o ar novamente.

a. Mostre que a equação que relaciona os ângulos ϕ e β é — 3,0pt

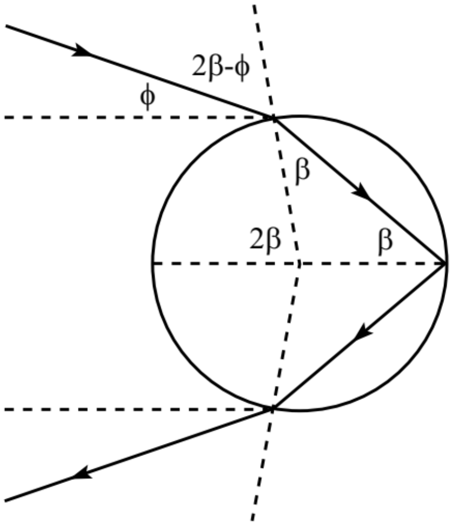
$$\phi = 2\beta - \arcsin\left(\frac{4}{3}\sin\beta\right)$$

Note que, β não pode ser maior do que $\arcsin\frac{3}{4}$, já que levaria a um valor de seno superior a 1. Este valor de β resulta no ângulo crítico para a interface ar/água.

b. Nesta equação podemos perceber que o ângulo ϕ tem um máximo para certo valor de $\beta_{\phi_{max}}$. Encontre esse ângulo e o valor de ϕ_{max} correspondente. — 3,0pt

Gabarito:

a. A refração e reflexão total interna fazem com que um raio de luz siga o caminho mostrado na figura a seguir.



Na figura, vemos simetria em torno do diâmetro horizontal representado. A partir dessa construção, temos que o ângulo que o raio incidente forma com a normal à superfície da gota é $\theta_1 = 2\beta - \phi$. O ângulo refratado, atravessando essa normal, é $\theta_2 = \beta$. Aplicando a lei de Snell:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \to \sin(2\beta - \phi) = \frac{4}{3}\sin\beta$$

Daí:

$$\phi = 2\beta - \arcsin\left(\frac{4}{3}\sin\beta\right)$$

b) Derivando em função de β e igualando a zero na equação anterior:

$$2 - \frac{(4/3)\cos(\beta)}{\sqrt{1 - \frac{16}{9}\sin^2\beta}} = 0$$

Trabalhando algebricamente, chegamos à seguinte expressão:

$$\sin^2\beta_{\phi_{\max}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin\beta_{\phi_{\max}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

Daí:

$$\phi_{\max} = 2\arcsin\sqrt{\frac{5}{12}} - \arcsin\sqrt{\frac{20}{27}}$$

Critério de correção:

a)
2,0 ponto pela aplicação correta da lei de Snell
1,0 ponto pelo resultado $\phi(\beta)$
b)
0,75 ponto por derivar e igualar a zero
0,75 ponto por encontrar $\beta_{\phi_{max}}$
1,5 ponto pelo resultado final ϕ_{max}

Parte II. Arco-íris secundário (4,0 pontos)

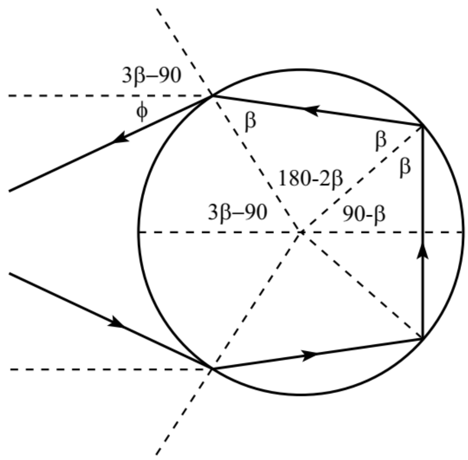
Um segundo arco-íris pode ser formado a partir de duas reflexões internas totais na gota, antes de o raio sofrer a segunda refração. O resultado é um arco-íris invertido, ou seja, com as cores na ordem contrária. Este fato se explica porque a função $\phi(\beta)$ agora possui um mínimo em $\beta_{\phi_{min}}$.

c.	Encontre a nova expressão de $\phi(\beta)$, assim como β_{min} e $\phi(\beta_{min})$.	2,0pt

d.	Qual é o desvio angular total do raio refratado em relação ao incidente?	2,0pt

Gabarito:

c. Neste caso, a trajetória do raio, desde que entra até a sua saída da gota, é mostrada na figura a seguir.



Novamente, a partir da análise geométrica da figura e aplicando a lei de Snell:

$$\sin\left(3\beta - \frac{\pi}{2} + \phi\right) = \frac{4}{3}\sin\beta$$

De onde chegamos a:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 3\beta + \arcsin\left(\frac{4}{3}\sin\beta\right)$$

Seguindo o mesmo procedimento que no item anterior:

$$\sin\beta_{\phi_{\min}} = \sqrt{\frac{65}{128}}$$

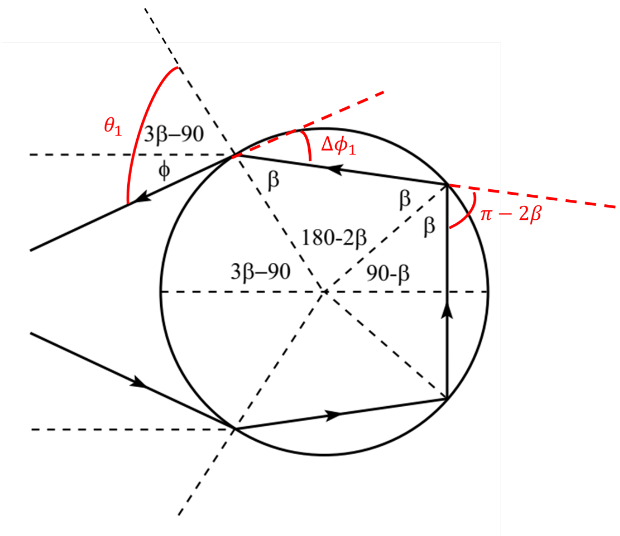
Assim, após algum trabalho algébrico:

$$\phi_{\min} = \frac{\pi}{2} - 3\arcsin\sqrt{\frac{65}{128}} + \arcsin\sqrt{\frac{65}{72}}$$

d. Segundo a figura abaixo, o desvio angular do raio é:

$$\delta = 2\left(\Delta\phi_1 + \pi - 2\beta\right)$$

$$\Delta\phi_1 = \theta_1 - \beta$$



Da lei de Snell:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{4}{3}\sin\beta\right)$$

Então:

$$\delta = 2\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}\sin\beta\right) - \beta + \pi - 2\beta\right) = 2\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}\sin\beta\right) - \beta\right) + 2(\pi - 2\beta)$$

Critério de correção:

c)
0,5 ponto pela expressão de ϕ
0,5 ponto pela expressão de β_{min}
1,0 ponto pela expressão de $\phi_{\beta_{min}}$
d)
1,0 ponto pela expressão de $\Delta\phi_1$
1,0 ponto pela expressão final de δ