SELETIVA ONLINE
COMENTÁRIO P3

Instruções Gerais

1. A duração da prova é de **duas** (2 horas).
2. A prova é composta por 20 questões (totalizando 20 pontos).
3. A prova é individual e sem consultas.
4. O uso de calculadoras é permitido desde que não sejam programáveis.

1. **(1 ponto)** Na física, um corpo negro é um objeto teórico que absorve toda a radiação que chega até ele. A temperatura desse corpo negro depende da quantidade de radiação absorvida, que por sua vez determina as frequências e as intensidades da radiação eletromagnética que ele emite.

   Um buraco negro isolado é um corpo negro quase perfeito e, como tal, segue regras semelhantes de emissão e absorção. A temperatura de um buraco negro (em primeira aproximação) é a radiação que ele emite, chamada **Radiação Hawking**, e depende apenas da sua massa. A relação entre a temperatura T_{BN} e a massa M_{BN} de um buraco negro está definida na seguinte equação:

$$T_{BN} = \frac{hc^3}{16\pi^2 G M_{BN} k_B}$$

   onde h é a Constante de Planck, c é a velocidade da luz, G é a Constante Gravitacional Universal, e k_B é a Constante de Boltzmann.

   Na realidade, muitos dos buracos negros encontrados no Universo absorvem e interagem com outros objetos massivos. Portanto, sua temperatura real é diferente da temperatura esperada do corpo negro.

   Vamos considerar um sistema binário não interativo, composto por uma estrela e um buraco negro. Por "não interativo" entenda que não há troca de matéria entre a estrela e o buraco negro e, portanto, não há um disco de acreção em torno dele. A influência mútua é apenas gravitacional.

   A estrela tem supostamente 2,5 vezes a massa do Sol e ela gira em torno do centro de massa do sistema com período orbital $P = 81$ dias e semieixo maior $a = 0,68$ UA.

   Com essas informações, assinale a opção que traz a temperatura teórica aproximada desse buraco negro.

   Dados: $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s; $c = 3,00 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}; $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}; $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}; Massa do Sol: $M_\odot = 2,00 \times 10^{30}$ kg; 1UA $= 1,50 \times 10^{11}$ m

   (a) $6,32 \times 10^{-8}$ K

   (b) $3,16 \times 10^{-8}$ K

   (c) $1,58 \times 10^{-8}$ K

   (d) $3,95 \times 10^{-8}$ K

   (e) $1,38 \times 10^{-8}$ K

Solução:

A temperatura teórica do buraco negro é dada pela fórmula:

$$T_{BN} = \frac{hc^3}{16\pi^2 G M_{BN} k_B}.$$

Para determinar a massa do buraco negro, usamos as informações fornecidas sobre o sistema binário. O período orbital (P) e o semieixo maior (a) são usados na terceira lei de Kepler, na forma adaptada para sistemas binários:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{\text{estrela}} + M_{BN})}.$$

Reorganizando para encontrar M_{BN}:

$$M_{BN} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} - M_{\text{estrela}}.$$

A massa da estrela é dada como 2,5 vezes a massa do Sol:

$$M_{\text{estrela}} = 2,5 \times M_{\odot} = 2,5 \times 2,00 \times 10^{30} \text{ kg} = 5,00 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Sabemos:

$$a = 0,68 \text{ UA} = 0,68 \times 1,50 \times 10^{11} \text{ m} = 1,02 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$P = 81 \text{ dias} = 81 \times 24 \times 3600 \text{ s} = 6,9984 \times 10^{6} \text{ s}$$

Substituímos na fórmula:

$$M_{BN} = \frac{4\pi^2(1,02 \times 10^{11})^3}{6,67 \times 10^{-11}(6,9984 \times 10^6)^2} - 5,00 \times 10^{30}.$$

$$M_{BN} \approx 7,81 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Substituímos os valores na equação da temperatura:

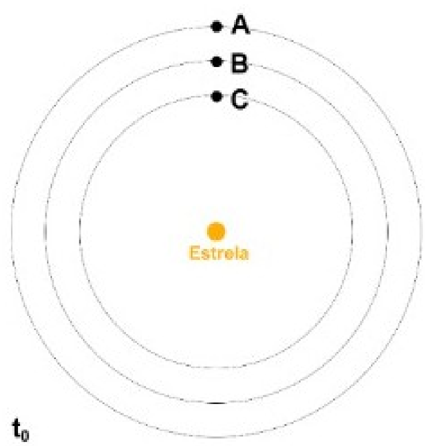
$$T_{BN} = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3,00 \times 10^{8})^3}{16\pi^2(6,67 \times 10^{-11})(7,81 \times 10^{30})(1,38 \times 10^{-23})}.$$

Calculando:

$$T_{BN} \approx 1,58 \times 10^{-8} \text{ K}.$$

Resposta: (c)

2. **(1 ponto)** Considere um sistema de três planetas A, B, C, orbitando uma estrela. Em um determinado dia (t_0), eles estão em conjunção (veja figura, fora de escala).



Cada planeta orbita a estrela no sentido horário, de modo que o planeta A dá uma volta completa em 5,0 anos, o planeta B, em 4,0 anos e o planeta C, em 3,0 anos.

Depois de quantos anos (completos), os planetas A e C estarão novamente em conjunção, mas o planeta B estará em oposição a eles?

(a) 30 anos

(b) 25 anos

(c) 60 anos

(d) 15 anos

(e) 20 anos

Solução:

Para acharmos tal período devemos encontrar o mínimo múltiplo comun entre os períodos de A (5 anos), C (3 anos) e meio período de B (2 anos) tal que não seja múltiplo do período de B (4 anos). Como $mmc(5, 3) = 15$ o período desejado segue como $15 \cdot 2 = 30$ anos.

Resposta: (a)

3. **(1 ponto)** Asteroides são objetos rochosos e metálicos que orbitam o Sol, mas são pequenos demais para serem considerados planetas. A dimensão dos asteroides pode variar desde centenas de quilômetros até a dimensão de pequenas pedras.

A Magnitude Absoluta H de um asteroide é definida, diferentemente da definição para as estrelas, como sua magnitude visual a uma distância de 1 unidade astronômica tanto do Sol como do observador, com um ângulo de fase igual a zero. Em outras palavras, é a magnitude visual do asteroide, situada a 1 unidade astronômica do Sol, sendo observado por dito Sol. Apesar de ser uma grandeza imprescindível, ela é a maneira ideal para se ter uma medida de brilho que permita uma estimativa de seu tamanho.

Fazendo a assunção de um objeto esférico com uma superfície uniforme, o diâmetro D de um asteroide pode ser estimado usando a seguinte equação:

$$D[\text{km}] = \frac{1329}{\sqrt{\text{p}}} 10^{-0,2\text{H}}$$

Onde p é o albedo geométrico do asteroide. Sendo que, refletores de luz perfeitos têm $p = 1$ e absorvedores perfeitos têm $p = 0$. Normalmente o albedo de um asteroide não é conhecido e as estimativas são feitas considerando-se albedos geométricos entre 0,30 e 0,05.

Considere que um asteroide tenha magnitude absoluta $H = 10,5 \pm 0,5$. Assinale o item que traz o valor aproximado do diâmetro médio desse asteroide, incluindo sua incerteza.

(a) 59 ± 22 km

(b) 37 ± 15 km

(c) 30 ± 10 km

(d) 59 ± 15 km

(e) 37 ± 22 km

Solução:

Substituindo os valores na fórmula, encontramos os seguintes valores para D em quilômetros: $37,5$; $15,31$; $59,43$ e $24,26$. Observamos que o maior valor para D é $59,43$ km e o menor é $15,31$ km. A média entre esses valores é:

$$\overline{D} = \frac{59,43 + 15,31}{2} = 37,37 \text{ km}$$

Enquanto isso, a média das variações é dada por:

$$\Delta\overline{D} = \frac{(59,43 - 37,37) + (37,37 - 15,31)}{2} = 22,06 \text{ km}$$

Logo, a resposta seria $D = 37 \pm 22$ km.

Nota: Alternativamente, poderíamos abordar a questão calculando a média aritmética de todos os valores, resultando em:

$$\text{Média} = \frac{37,5 + 15,31 + 59,43 + 24,26}{4} = 34,125 \text{ km}$$

Para calcular a média das diferenças entre cada valor e a média, usamos:

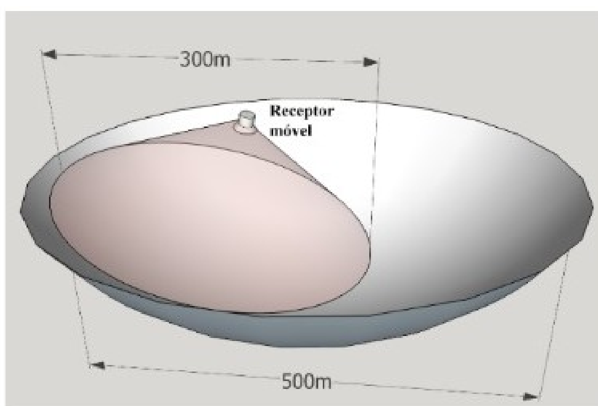
$$\text{Desvios} = |37,5 - 34,125|\,, |15,31 - 34,125|\,, |59,43 - 34,125|\,, |24,26 - 34,125|$$

$$\text{Média Desvios} = \frac{|37,5 - 34,125| + |15,31 - 34,125| + |59,43 - 34,125| + |24,26 - 34,125|}{4}$$
$$\text{Média dos Desvios} \approx 14,23 \text{ km}$$

Portanto, o resultado que minimiza os erros é dado por $D = 34,1 \pm 14$ km. No entanto, não há uma alternativa corresponde a esse resultado.

4. **(1 ponto)** O *Five-hundred-meter Aperture Spherical Telescope* (FAST), apelidado de Tianyan ("Olho do Céu"), é um radiotelescópio localizado na depressão de Dawodang, uma bacia natural no Condado de Pingtang, Guizhou, sudoeste da China.

   Embora o diâmetro do disco refletor seja de 500 m, seu receptor, que pode ser apontado para diferentes posições no céu, capta ondas de apenas um círculo de 300 m de diâmetro útil.



Desenho adaptado: Phoenix7777 - Creative Commons.

   A frequência de trabalho do receptor varia de $f_1 = 70,0$ MHz a $f_2 = 3,0$ GHz.

   Baseado nas informações e em seus conhecimentos, avalie os instrumentos a seguir (numerados de I a V) e assinale a opção que traz a(s) luneta(s) que tem(êm) a resolução angular teórica equivalente ou maior, na faixa do visível ($\lambda = 500$ nm), à máxima resolução angular teórica, na faixa do rádio do FAST. Desconsidere a turbulência atmosférica.

(a) Somente IV e V

(b) Somente II, III, IV e V

(c) Somente V

(d) Somente III, IV, V

(e) Todas

Solução:

Pelo critério de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Podemos relacionar λ e f pela expressão da velocidade da onda:

$$c = f \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

Substituindo na expressão do critério de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{c}{f \cdot D}$$

Como queremos a maior resolução possível, devemos minimizar o θ, ou seja, devemos ter o maior f possível. Nesse caso, $f = 3 \times 10^9\ Hz$. Calculando a resolução angular do FAST:

$$\theta_{FAST} = 1,22 \cdot \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9 \cdot 300} = 4,067 \times 10^{-4}$$

Utilizando o critério de Rayleight para calcular qual seria o diâmetro de um telescópio com a mesma resolução angular, mas no visível:

$$D_{eqv} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{\theta_{FAST}} = 1,22 \cdot \frac{500 \times 10^{-9}}{4,067 \times 10^{-4}\ m} = 1,5 \times 10^{-3}$$

Como observado na imagem, todos os instrumentos possuem diâmetros superiores à $1,5\ mm$.
Resposta: (e)

5. **(1 ponto)** Um buraco negro é um objeto extremamente denso no espaço. Embora possam ser enigmáticos, a Ciência conseguiu decifrar muito sobre eles. Por exemplo, sabemos que os buracos

negros são uma manifestação fundamental da gravidade.

Quando uma grande quantidade de massa é comprimida em um espaço pequeno o suficiente, o objeto resultante rompe o próprio tecido do espaço e do tempo, tornando-se o que é chamado de singularidade. Se considerarmos a velocidade da luz como limite da velocidade de escape de um buraco negro, chegamos ao que se conhece como Raio de Schwarzschild r_{Sch} de uma região esférica em torno da singularidade.

$$r_{Sch} = \frac{2GM_{bn}}{c^2}$$

Como temos uma região esférica em torno da singularidade, podemos dividir a massa do buraco negro por esse volume e definir uma densidade média para um buraco negro, apesar da densidade ser considerada infinita para a singularidade em si.

Sendo assim, analise a opção que traz a massa aproximada de um buraco negro, em unidades de massa solar, com a mesma densidade média da Terra.

Dados: Massa do Sol: $M_\odot = 2,00 \times 10^{30}$ kg; Massa da Terra: $M_\oplus = 5,97 \times 10^{24}$ kg; Raio da Terra: $R_\oplus = 6,37 \times 10^6$ m; $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}; $c = 3,00 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}

(a) $1,15 \times 10^7$

(b) $3,00 \times 10^8$

(c) $6,67 \times 10^5$

(d) $5,75 \times 10^7$

(e) $5,51 \times 10^3$

Solução:

Vamos calcular a densidade média da Terra:

$$\rho_\oplus = \frac{M_\oplus}{4\pi {R_\oplus}^3/3}$$

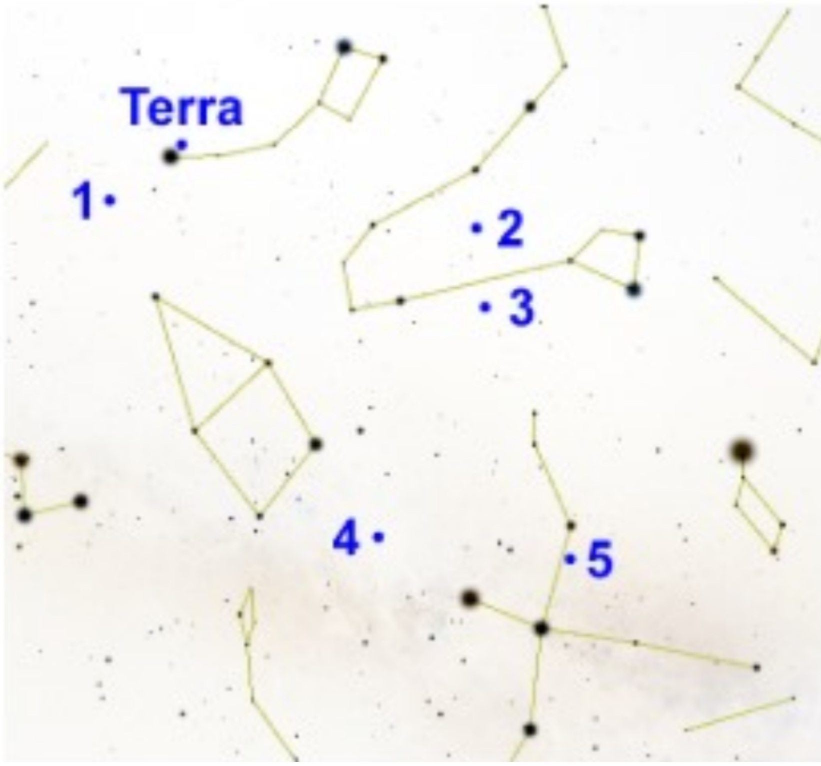
Para o buraco negro:

$$\rho = \rho_\oplus = \frac{M}{4\pi {r_{Sch}}^3/3} = \frac{c^6}{6\pi G^3 M^2} \therefore M = 1,15 \cdot 10^38\ kg = 5,75 \cdot 10^7 M_\odot$$

Resposta: (d)

6. **(1 ponto)** O eixo de rotação da Terra define dois pontos fixos no céu, em tornos dos quais a Esfera Celeste parece girar: os Polos Celestes. Para o Hemisfério Norte da Terra, temos uma estrela bem próxima do Polo Celeste Norte (PCN), nossa “estrela polar”, conhecida por Polaris (*Alpha Ursae Minoris*). Na verdade, devido à lenta precessão do eixo de rotação da Terra, o PCN está se movendo lentamente para mais perto de Polaris. Sua aproximação máxima ocorrerá no início do ano de 2102, para depois começar a se afastar novamente.

   Do mesmo modo, todos os planetas do Sistema Solar (SS também têm seus Polos Celestes. Na Carta Celeste a seguir, temos marcado o PCN da Terra e de outros planetas do SS, numerados de 1 a 5.



Seguem algumas informações:

- Marte tem seu PCN localizado no céu escuro entre as constelações de Cefeu e Cisne;
- Os PCNs de Mercúrio e de Júpiter estão na constelação do Dragão;
- A declinação do PCN de Júpiter é maior do que a do PCN de Mercúrio;
- Saturno tem seu PCN localizado no céu escuro da constelação de Cefeu;
- O PCN de Netuno está entre as estrelas Gamma Cygni e Delta Cygni.

Assinale a opção que faz a correspondência correta entre o número e o respectivo PCN do planete.

(a) 1 - Marte; 2 - Mercúrio; 3 - Júpiter; 4 - Saturno; 5 - Netuno.

(b) 1 - Saturno; 2 - Júpiter; 3 - Marte; 4 - Mercúrio; 5 - Netuno.

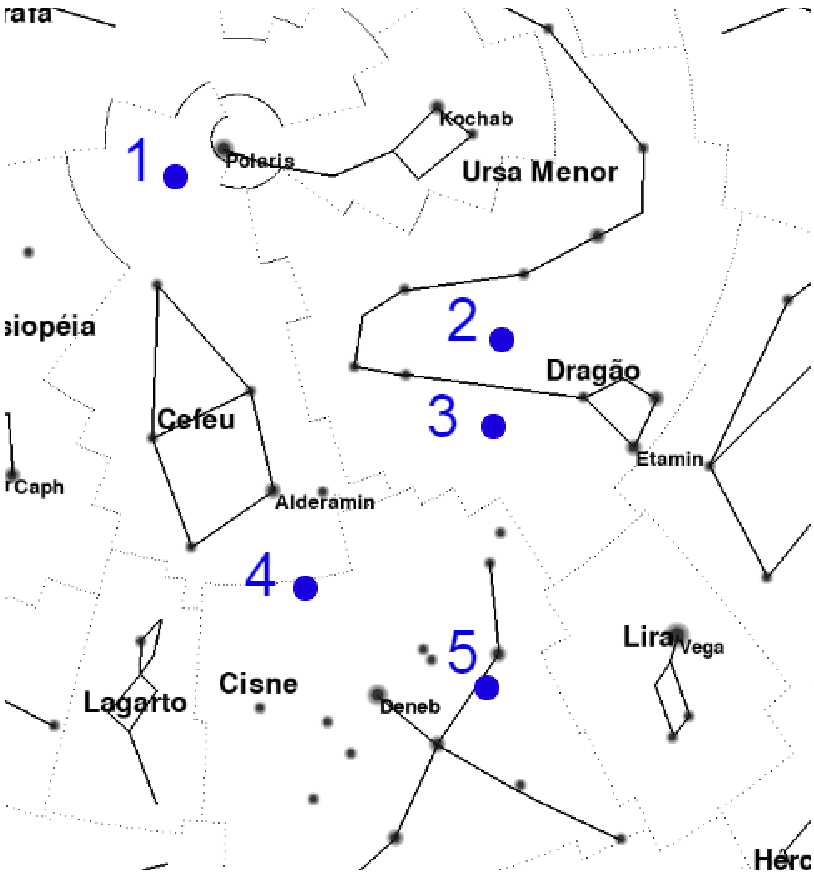
(c) 1 - Marte; 2 - Júpiter; 3 - Mercúrio; 4 - Saturno; 5 - Netuno.

(d) 1 - Saturno; 2 - Mercúrio; 3 - Júpiter; 4 - Netuno; 5 - Marte.

(e) 1 - Saturno; 2 - Júpiter; 3 - Mercúrio; 4 - Marte; 5 - Netuno.

Solução:

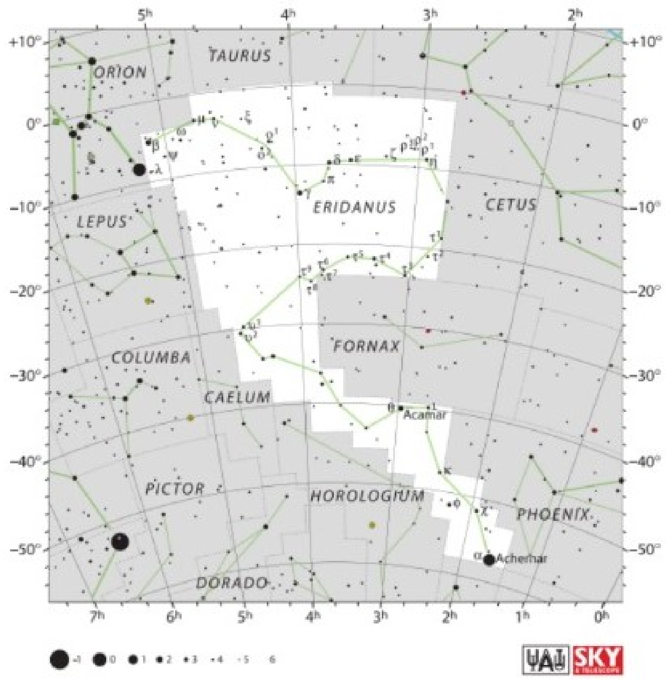
Na questão apresentada, devemos identificar os Polos Celestes dos planetas numerados na carta celeste fornecida, baseando-nos nas informações. Identificando os números na carta celeste de acordo com a imagem abaixo:



1. O número **3** está localizado na constelação do Dragão e está mais próximo da borda da constelação, indicando menor declinação. Assim, ele corresponde ao PCN de **Mercúrio**.
2. O número **2** também está na constelação do Dragão, mas em uma região com maior declinação (mais próximo do PCN da Terra). Portanto, corresponde ao PCN de **Júpiter**.
3. O número **1** está localizado na constelação de Cefeu, próximo ao céu escuro. Este número é identificado como o PCN de **Saturno**.
4. O número **4** encontra-se entre as constelações de Cefeu e Cisne, o que o identifica como o PCN de **Marte**.
5. O número **5** está situado entre as estrelas Gamma Cygni e Delta Cygni, na constelação do Cisne. Assim, ele corresponde ao PCN de **Netuno**.

Resposta: (e)

7. **(1 ponto)** A estrela Alpha Eridani, conehcida como Achernar, é a nona estrela mais brilhante do céu, no extremo sul da longa constelação Erídano.



Achernar tem magnitude aparente $m = +0,45$ e sua paralaxe estelar vale $p = 23,39 \pm 0,57$ mas (milissegundos de arco).

Assinale a opção que traz a incerteza associada à magnitude absoluta M de Achernar.

(a) $\pm 0,11$

(b) $\pm 0,23$

(c) $\pm 0,39$

(d) $\pm 0,57$

(e) $\pm 0,45$

Solução:

A magnitude absoluta M é calculada pela fórmula do módulo da distância:

$$M = m - 5\log_{10}(d) + 5,$$

onde m é a magnitude aparente e d é a distância em parsecs, obtida a partir da paralaxe p usando $d = \frac{1}{p}$, com p dado em segundos de arco.

A paralaxe fornecida é $p = 23,39 \pm 0,57$ mas, ou seja, $p = 23,39 \times 10^{-3}$ arcsec.

Considerando a incerteza na paralaxe, calculamos as distâncias mínima e máxima:

- Para $p_{\text{máx}} = 23,39 + 0,57 = 23,96$ mas:

$$d_{\text{mín}} = \frac{1}{p_{\text{máx}}} = \frac{1}{23,96 \times 10^{-3}} = 41,74 \text{ pc}.$$

- Para $p_{\text{mín}} = 23,39 - 0,57 = 22,82$ mas:

$$d_{\text{máx}} = \frac{1}{p_{\text{mín}}} = \frac{1}{22,82 \times 10^{-3}} = 43,82 \text{ pc.}$$

Substituímos $d_{\text{mín}}$ e $d_{\text{máx}}$ na fórmula da magnitude absoluta:

Para $d_{\text{mín}} = 41,73$ pc:

$$M_{\text{mín}} = 0,45 - 5\log_{10}(41,74) + 5 = -2,65.$$

Para $d_{\text{máx}} = 43,79$ pc:

$$M_{\text{máx}} = 0,45 - 5\log_{10}(43,82) + 5 = -2,76.$$

A variação na magnitude absoluta é dada pela diferença entre o valor máximo e mínimo de M:

$$\Delta M = M_{\text{máx}} - M_{\text{mín}} = (-2,65) - (-2,76) = 0,11.$$

Portanto, a incerteza associada à magnitude absoluta M de Achernar é $0,11$ dividido por 2. Assim, a partir do valor médio, variando na incerteza de $\pm 0,055$, temos uma variação total de 0,11. Porém, a incerteza $\pm 0,055$ não está presente entre as alternativas, sugerindo que talvez tenha ocorrido um erro de digitação e a resposta desejada fosse a alternativa a) que é o dobro da incerteza encontrada.

8. **(1 ponto)** Na astrofísica, o **Comprimento de Jeans** λ_J é uma medida do raio de uma nuvem de gás em que a pressão interna suporta exatamente a nuvem contra o colapso devido à gravidade.

   Tem esse nome em homenagem ao astrônomo britânico Sir James Jeans (1877-1946), que estudou a estabilidade de nuvens esféricas no início do século XX.

   O Comprimento de Jeans depende da velocidade do som no gás v_s, da Constante Gravitacional G, e da densidade da nuvem ρ.

$$\lambda_J \propto v_s^{\alpha} G^{\beta} \rho^{\gamma}$$

(lê-se "λ_J é proporcional a...")

Assinale a opção que traz os valores dos expoentes α, β, e γ para que λ_J tenha a unidade (ou dimensão) correta.

Dados: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ kg^{-1}m^{3}s^{-2}

(a) $\alpha = 1/2$; $\beta = -1$; $\gamma = -1/2$

(b) $\alpha = 1/2$; $\beta = -1/2$; $\gamma = -1$

(c) $\alpha = 1$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$

(d) $\alpha = 1$; $\beta = -1/2$; $\gamma = -1/2$

(e) $\alpha = -1$; $\beta = 1/2$; $\gamma = 1/2$

Solução:

O **Comprimento de Jeans** λ_J é uma medida de comprimento, ou seja, sua unidade deve ser de dimensão de comprimento $[L]$. A relação proporcional é dada por:

$$\lambda_J \propto v_s^\alpha G^\beta \rho^\gamma,$$

onde:

- v_s é a velocidade do som no gás, com unidade $[v_s] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = [\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}]$;

- G é a constante gravitacional, com unidade $[G] = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2} = [\mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2}]$;

- ρ é a densidade do gás, com unidade $[\rho] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = [\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}]$.

A unidade de λ_J deve ser $[L]$. Assim, substituímos as dimensões de v_s, G e ρ na expressão:

$$[L] = ([L \cdot T^{-1}])^\alpha ([L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}])^\beta ([M \cdot L^{-3}])^\gamma.$$

Expandindo as potências:

$$[L] = [L^\alpha \cdot T^{-\alpha}] \cdot [L^{3\beta} \cdot M^{-\beta} \cdot T^{-2\beta}] \cdot [M^\gamma \cdot L^{-3\gamma}].$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$[L] = L^{\alpha+3\beta-3\gamma} \cdot T^{-\alpha-2\beta} \cdot M^{-\beta+\gamma}.$$

Para que a equação seja dimensionalmente consistente, os expoentes de L, T e M devem satisfazer as seguintes condições:

1. Para L: $\alpha + 3\beta - 3\gamma = 1$

2. Para T: $-\alpha - 2\beta = 0$

3. Para M: $-\beta + \gamma = 0$

Resolvemos o sistema de equações:

1. Da condição para T: $-\alpha - 2\beta = 0 \implies \alpha = -2\beta$.

2. Da condição para M: $-\beta + \gamma = 0 \implies \gamma = \beta$.

3. Substituímos $\alpha = -2\beta$ e $\gamma = \beta$ na condição para L:

$$\alpha + 3\beta - 3\gamma = 1 \implies -2\beta + 3\beta - 3\beta = 1 \implies -2\beta = 1 \implies \beta = -\frac{1}{2}.$$

4. Substituímos $\beta = -\frac{1}{2}$ em $\alpha = -2\beta$ e $\gamma = \beta$:

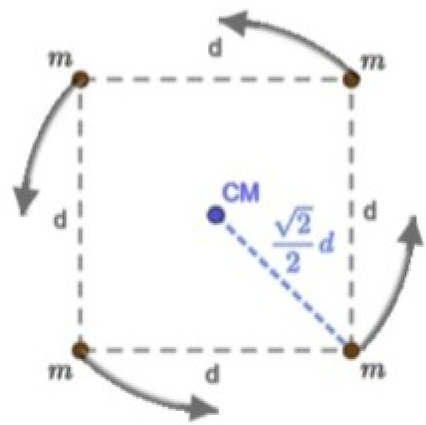
$$\alpha = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \gamma = \beta = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, os valores dos expoentes são:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Resposta: (d)

9. **(1 ponto)** Considere um sistema em que quatro asteroides idênticos de massa m estão dispostos a formar um quadrado de lado d, onde cada asteroide ocupa um dos vértices.



Considerando apenas o efeito gravitacional que cada um exerce sobre os outros e que a distância entre eles permaneça inalterada, qual seria a velocidade orbital de cada asteroide em relação ao centro de massa do sistema?

(a) $v = \sqrt{\dfrac{Gm}{d}}$

(b) $v = \sqrt{\dfrac{Gm}{d}\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

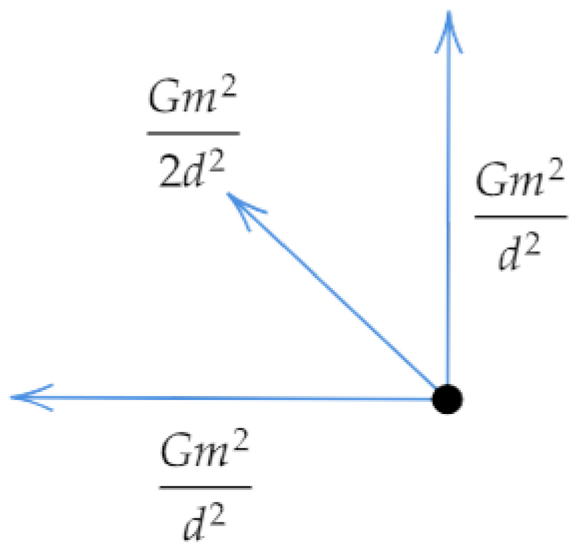
(c) $v = \sqrt{\dfrac{Gm}{d}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

(d) $v = \dfrac{m}{d}\sqrt{G\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

(e) $v = \sqrt{\dfrac{Gm}{d}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Solução:

Para determinar a velocidade orbital dos asteroides, devemos inicialmente calcular a força resultante atuante em um deles e igualar essa força à força centrípeta, já que o movimento descrito pelos asteroides é circular. Representamos o diagrama de forças:



Somando vetorialmente as duas forças que possuem o mesmo módulo, a resultante estará na mesma direção da terceira força. Isso ocorre porque a força resultante entre essas duas forças formará um ângulo de 45° com a horizontal e terá módulo dado por:

$$F_1 = \sqrt{2}\frac{Gm^2}{d^2}$$

Agora, somando essa força à causada pelo terceiro asteroide, obtemos:

$$F_r = \sqrt{2}\frac{Gm^2}{d^2} + \frac{Gm^2}{2d^2}$$

Igualando essa força à resultante centrípeta em relação ao centro de massa do sistema, temos:

$$\frac{mv^2}{\frac{\sqrt{2}d}{2}} = \frac{Gm^2}{d^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Assim, a velocidade orbital dos asteroides é dada por:

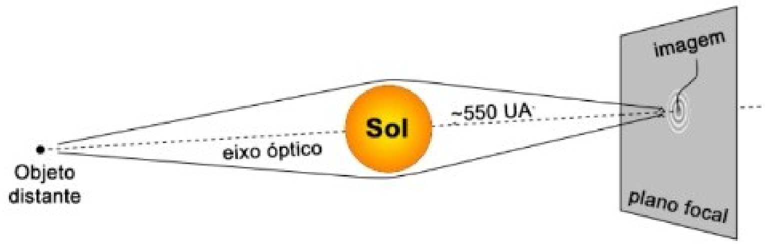
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Gm}{d}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}}$$

Resposta: (c)

10. **(1 ponto)** De acordo com a Teoria Geral da Relatividade, objetos massivos como o Sol curvam raios de luz. A lente gravitacional solar (solar gravitational lens ou SGL, em inglês) resultante pode ser usada como um instrumento fornecido pela Natureza: parte de um telescópio imensamente poderoso com considerável amplificação de luz e capacidades significativas de resolução angular, apesar de ser uma lente imperfeita, que sofre de aberração esférica e astigmatismo. Além disso, embora a amplificação de luz da SGL seja tremenda, qualquer sinal de uma fonte tênue e distante

é sobrecarregado pela luz do Sol e da Coroa Solar. Esses desafios devem ser enfrentados se a SGL for considerada um "instrumento"prático para observações de alta resolução de alvos extrassolares distantes.

A região focal da SGL começa além de ≈ 550 unidades astronômicas (UA) do Sol. Isso é pouco mais de três vezes a distância até nossa nave espacial mais distante até o momento, a Voyager 1, que está atualmente a mais de 165 UA. Um esquema fora de escala pode ser visto na imagem a seguir.



Se um raio de luz de um objeto muito distante passa a uma distância R bem próxima a uma grande massa M, este raio será desviado por um valor ϕ. Este desvio pode ser calculado através da seguinte equação:

$$\phi = \frac{4GM}{c^2 R}$$

onde G é a Constante Gravitacional Universal e c, a velocidade da luz.

Considere o planeta Júpiter e a lente gravitacional devido à sua massa e assinale a opção que traz a distância focal aproximada desta lente.

Dados: Diâmetro de Júpiter: $\varnothing_{\text{Júpiter}} = 142.984$ km; Massa de Júpiter: $M_{\text{Júpiter}} = 1,90 \times 10^{27}$ kg; Constante Gravitacional: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}; Velocidade da Luz: $c = 300.000$ km/s; Unidade Astronômica: 1 UA $= 1,50 \times 10^{11}$ m.

(a) 5.500 UA

(b) 1.500 UA

(c) 6.000 UA

(d) 7.100 UA

(e) 3.000 UA

Solução:

Resposta: (c) Pelo esquema, podemos perceber que $\tan\phi \approx \phi = \frac{R}{f}$, onde R é o raio do objeto observado e f é a distância focal do sistema óptico. Assim, temos:

$$\frac{f_j}{f_\odot} = \frac{R_j}{R_\odot}\frac{\phi_\odot}{\phi_j} = \frac{R_j^2}{R_\odot^2}\frac{M_\odot}{M_j}$$

onde R_j e $R_\odot$ são os raios do objeto j e do Sol, respectivamente, e $M_\odot$ e M_j são as massas do Sol e do objeto j, respectivamente.

Substituindo os valores numéricos, obtemos $f_j \approx 6.000$ unidades astronômicas (UA).

11. **(1 ponto)** No início de novembro de 1572, uma "estrela nova" brilhante apareceu na constelação de Cassiopeia e era visível mesmo durante o dia. Entre aqueles que ficaram impressionados com o fenômeno estava o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), que registrou a localização precisa da estrela em seu livro *Stella Nova*. Hoje, sabemos que se tratou de uma explosão de supernova e ela ficou conhecida como Supernova de Tycho [SN 1572].

 Em 2008, cientistas do instituto Max Planck usaram telescópios no Havaí e na Espanha para captar os "ecos" da luz da explosão original, refletida por uma nuvem de poeira cósmica. Um esquema, fora de escala, pode ser visto na figura a seguir.

 Considere que a SN 1572 está a 7.500 anos-luz de nós e a origem da luz refletida localizada a 2° (dois graus) de onde está o remanescente da supernova.

 Baseado nessas informações e em seus conhecimentos, assinale a opção que traz a que distância aproximada se encontra a nuvem de poeira da SN 1572.

 (a) 342 anos-luz
 (b) 298 anos-luz
 (c) 261 anos-luz
 (d) 355 anos-luz
 (e) 424 anos-luz

Solução:

Resposta: (b) A diferença entre as distâncias é dada por $2008 - 1572 = 436$ anos-luz. Seja d a distância entre a supernova e a nuvem, e x a distância entre a Terra e a nuvem. Podemos utilizar a lei dos cossenos da seguinte maneira:

$$d^2 = x^2 + a^2 - 2xa\cos\theta$$

onde a é a distância da supernova até nós, e θ é a separação angular entre a supernova e a nuvem.

Combinando essa equação com a condição de que $x + d = a + 436$ anos-luz, obtemos um sistema de duas equações com duas variáveis. Isolando o x nessa última equaçao e substitundo $a = 7500$ anos-luz: $x = a - d + 436 = 7936 - d$ anos-luz.

Voltando a Lei dos Cossenos:

$$d^2 = (7936 - d)^2 + 7500^2 - 2(7936 - d)7500 \cos 2^\circ$$

Essa expressao é muito díficil de ser simplificada. Por isso, vamos utilizar o método de ITERAÇÃO. Escrevendo

$$d = \sqrt{(7936 - d)^2 + 7500^2 - 2(7936 - d)7500 \cos 2^\circ}$$

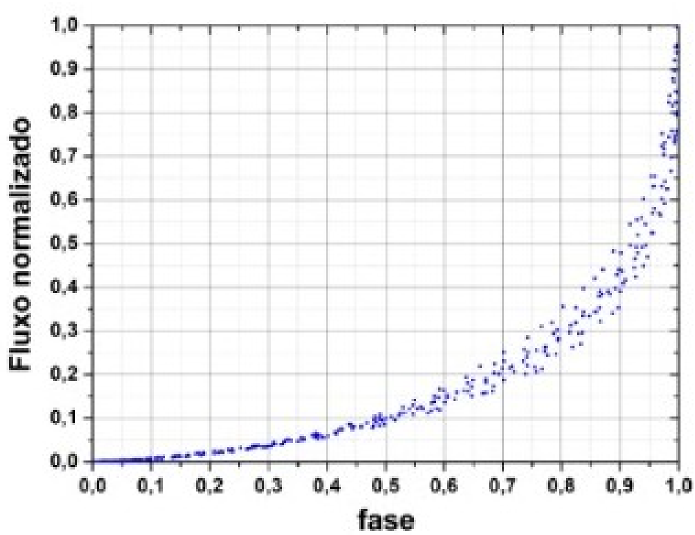
Nós começamos com uma estimativa para d, vamos assumir $d_0 = 400$ e apertamos a tecla igual na calculadora. A seguir, re-escrevemos a expressão na forma:

$$\sqrt{(7936 - ANS)^2 + 7500^2 - 2(7936 - ANS)7500 \cos 2^\circ}$$

Então, apertamos o botão = repetidas vezes, até convergir em um valor. Fazendo isso, encontramos um resultado $d \approx 298$ anos-luz.

12. **(1 ponto)** Pela definição, o fluxo F de um corpo celeste é a energia por unidade de área e por unidade de tempo que chega ao detector.

No gráfico a seguir, temos o fluxo F da Lua, medido na Terra ao longo de 1 ano, em função da sua fase. No eixo das ordenadas, o fluxo foi normalizado de forma que a sua intensidade máxima vale 1,0 (um) e no eixo das abcissas, fase igual a 1,0 significa Lua Cheia. A dispersão dos pontos próximos à Lua Cheia se deve ao fato da medida do fluxo ser mais "sensível" à variação da distância do nosso satélite quando sua superfície está muito iluminada.



Baseado nesse gráfico e em seus conhecimentos, assinale a opção que traz a magnitude aparente da Lua em Quarto Crescente. Considere que a magnitude aparente da Lua Cheia vale $m = -12,6$.

(a) $-10,9$

(b) $-11,8$

(c) $-11,1$

(d) $-10,1$

(e) $-11,3$

Solução:

No quarto crescente, metade da face voltada para a Terra está visível no céu. Assim, o ângulo de fase será metade do correspondente à Lua Cheia, ou seja, $0,5$. Pelo gráfico, observa-se que, para esse ângulo de fase, o fluxo normalizado é de $0,1$.

Utilizando a equação de Pogson, é possível determinar a magnitude aparente da Lua no Quarto Crescente:

$$m_q - m_c = -2,5 \log \frac{0,1F}{F}$$

Simplificando:

$$m_q - m_c = -2,5 \log(0,1)$$

$$m_q - m_c = 2,5 \times 1 = -10,1$$

Portanto:

$$\boxed{m_q = -10,1}$$

Resposta: (d)

13. **(1 ponto)** De um satélite artificial em torno da Terra, sabemos que a excentricidade da sua órbita vale $e = 0,8$ e que seu perigeu se dá a 9 raios terrestres de altitude.

Assinale a opção que traz a razão entre os módulos das velocidades desse satélite no perigeu e no apogeu, ou seja, v_p/v_a.

Dados: Massa da Terra: $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg; Raio da Terra: $R_T = 6.378,0$ km

(a) 0,8

(b) 6,0

(c) 0,2

(d) 9,0

(e) 1,8

Solução:

A maneira mais simples de determinar a razão entre as velocidades no perigeu e no apogeu é utilizando a conservação do momento angular da órbita. O momento angular é dado por:

$$L = mrv$$

Comparando os valores no perigeu e no apogeu:

$$mr_pv_p = mr_av_a$$

Eliminando a massa m e rearranjando os termos, obtemos:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}$$

Sabendo que as distâncias no apogeu e no perigeu podem ser expressas em função do semi-eixo maior a e da excentricidade e da órbita:

$$r_a = a(1+e) \quad \text{e} \quad r_p = a(1-e)$$

Substituímos essas relações na equação:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)}$$

Cancelando o semi-eixo maior a:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e}$$

Substituindo $e = 0,8$:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+0,8}{1-0,8}$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1,8}{0,2} = 9,0$$

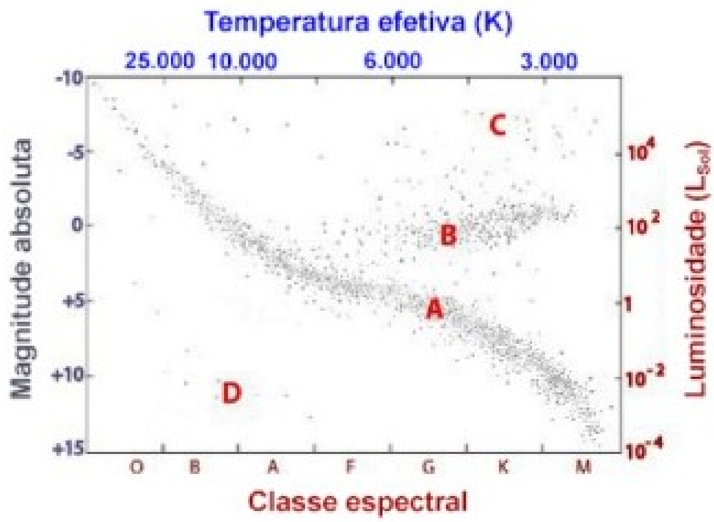
Portanto:

$$\boxed{\frac{v_p}{v_a} = 9,0}$$

Resposta: (d)

14. **(1 ponto)** O Diagrama de Hertzprung-Russell, conhecido como diagrama HR, foi publicado independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hetrzprung (1873-1967), em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell (1877-1957), em 1913, como uma relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura efetiva (ou superficial).

    A imagem abaixo traz um diagrama HR com quatro estrelas: A, B, C, e D. Em seguida, temos várias afirmações. Cada afirmação pode ser FALSA, VERDADEIRA, ou INCONCLUSIVA.



Assinale a opção que traz a afirmação inconclusiva.

(a) A estrela **A** é semelhante ao Sol.

(b) A estrela **D** é uma estrela da Sequência Principal.

(c) A estrela **B** é mais massiva que o Sol.

(d) O raio da estrela **B** é maior que o da estrela **C**.

(e) A estrela **C** é mais fria que as outras estrelas.

Solução:

a) A afirmativa é **verdadeira**, pois, ao analisar o diagrama, é possível ver que a estrela A possui luminosidade de cerca de 1 $L_{\odot}$ e temperatura semelhante à do Sol.

b) A afirmativa é **falsa**, pois a estrela D se encontra completamente fora do grupo de estrelas da sequência principal (diagonal do diagrama).

c) A afirmativa é **inconclusiva**. A estrela B não pertence à sequência principal (grupo de estrela ao qual pertence o Sol), logo, não podemos estabelecer uma relação direta entre as massas das estrelas e as informações fornecidas no diagrama.

d) A afirmativa é **falsa**. A luminosidade de uma estrela pode ser expressa como $L \propto R^2 T^4$. A estrela C é mais luminosa que a estrela B, porém a estrela C é possui uma temperatura menor que a da estrela B. Isso só é possível caso o raio da estrela C seja maior que o da estrela B.

e) A afirmativa é **verdadeira**, pois, analisando a escala de temperaturas do diagrama, é possível ver que a estrela C possui a menor temperatura.

Resposta: (c)

15. **(1 ponto)** A Lei de Stefan-Boltzmann nos diz que o fluxo F (energia por unidade de área por unidade de tempo) emitido por um corpo negro à temperatura T é proporcional à quarta potência de T:

$$F = \sigma T^4$$

onde σ é a cosntante de Stefan-Boltzmann.

Como uma estrela não é um corpo negro, isto é, suas camadas externas, de onde provém a radiação, não estão exatamente em equilíbrio térmico e, portanto, a temperatura não é a mesma para toda a estrela, definimos um parâmetro chamado temperatura efetiva T_{ef}, que é a temperatura de um corpo negro que emite a mesma quantidade de energia por unidade de área e por unidade de tempo que a estrela. Portanto, para uma estrela esférica de raio R, a luminosidade L (energia total por segundo) é obtida multiplicando-se o fluxo pela área da sua superfície: $4\pi R^2$.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

Suponha uma estrela 100 vezes mais luminosa do que o Sol ($L = 100L_\odot$) e cuja temperatura efetiva seja a metade da do Sol ($T = \frac{T_\odot}{2}$).

Assinale a opção que traz a razão entre o raio da estrela e o raio do Sol.

(a) 100

(b) 400

(c) 40

(d) 80

(e) 50

Solução:

Por stefan-Boltzmann:

$$100L_\odot = 4\pi R^2 \sigma T_\odot^4 / 2^4$$

e

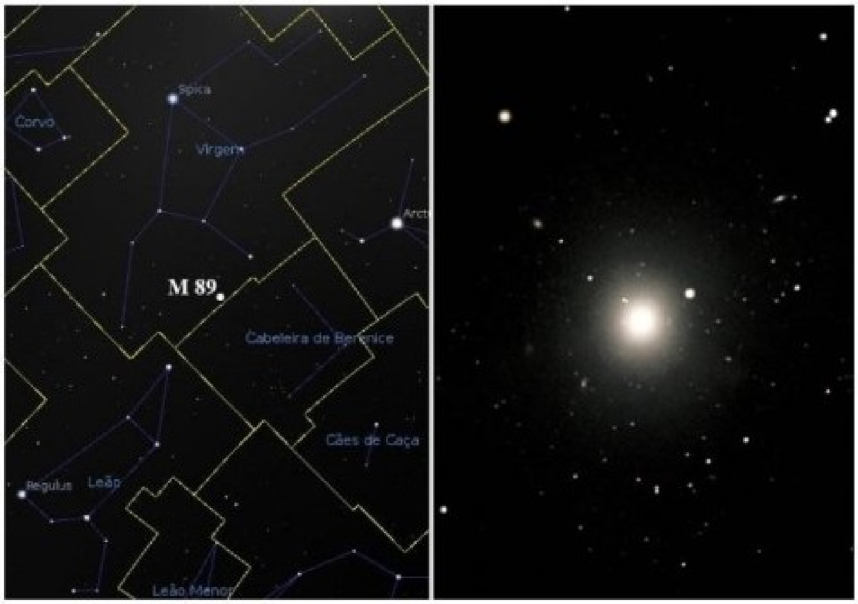
$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

Dividindo uma pela outra:

$$100 = \frac{R^2}{R_\odot^2 16} \therefore R = 40R_\odot$$

Resposta: (C)

16. **(1 ponto)** M89 é uma das oito galáxias do aglomerado de Virgem que o astrônomo francês Charles Messier (1730-1817) descobriu em 1781. Esta galáxia é elíptica do tipo E0, ou seja, M89 é praticamente esférica. Está localizado a cerca de 50 milhões de anos-luz de distância na constelação de Virgem.



Seu diâmetro aparente de $4'$ (minutos de arco) corresponde a um diâmetro real de $D = 70.000,0$ anos $-$ luz. M89 contém aproximadamente $N = 100$ bilhões de estrelas e sua magnitude aparente vale $m = 9,8$.

Em primeira aproximação, vamos considerar que todas as estrelas de M89 são semelhantes entre si e que têm a mesma magnitude absoluta.

Deste modo, assinale a opção que traz a magnitude aparente de cada uma das estrelas.

(a) 9,8

(b) 17,7

(c) 15,1

(d) 27,5

(e) 37,3

Solução:

Como o enunciado afirma que podemos aproximar as magnitudes absolutas de todas as estrelas como iguais, concluímos que as luminosidades de cada estrela também são iguais, e as denominaremos L.

Além disso, considerando que a galáxia está muito distante e que o que observamos é, na prática, um único ponto que condensa toda a sua luminosidade, podemos aproximar as distâncias de todas as estrelas como sendo iguais à distância da galáxia até nós, que denominaremos d.

Dessa forma, sabendo que a magnitude da galáxia é m e que ela contém N estrelas, podemos determinar a magnitude de cada estrela, m_e, utilizando a equação de Pogson:

$$m - m_e = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi d^2} \frac{4\pi d^2}{L_e} \right)$$

Lembre-se de que não é possível somar magnitudes devido à escala logarítmica; o que podemos somar são as luminosidades. Assim, a luminosidade total da galáxia, L, equivale à soma das luminosidades das N estrelas, cada uma com luminosidade L_e. Portanto, temos:

$$m - m_e = -2,5 \log \left(\frac{N \cdot L_e}{4\pi d^2} \frac{4\pi d^2}{L_e} \right)$$

Simplificando a expressão:

$$m - m_e = -2,5 \log(N)$$

Logo:

$$m_e = m + 2,5 \log(N)$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado:

$$\boxed{m_e = 37,3}$$

Resposta: (e)

17. **(1 ponto)** Considere uma luneta com uma objetiva de diâmetro $\varnothing = 15,0$ cm e distância focal $f = 1,0$ m. No plano focal da luneta está um sensor imageador CMOS, com uma matriz de pixels quadrados de 3586×2180, com $2,9\ \mu$m de lado.

O astrofotógrafo, dono desse equipamento, quer fazer fotos da famosa cratera de impacto Tycho, que tem seu nome homenageado Tycho Brahe (1546-1601), o astrônomo dinamarquês cujas medições dos movimentos de Marte permitiram que Johannes Kepler (1571-1630) mostrasse que as órbitas dos planetas são elípticas, não circulares.

Sendo assim, assinale a opção que traz a área aproximada, em pixels^2, que a imagem da cratera Tycho ocupa no sensor do telescópio. Considere-a circular, sem qualquer efeito de perspectiva.

Dados: Diâmetro da cratera Tycho: $\varnothing = 86,0$ km; Distância média Terra-Lua: $d_{TL} = 384.400,0$ km.

(a) 3.586

(b) 19.006

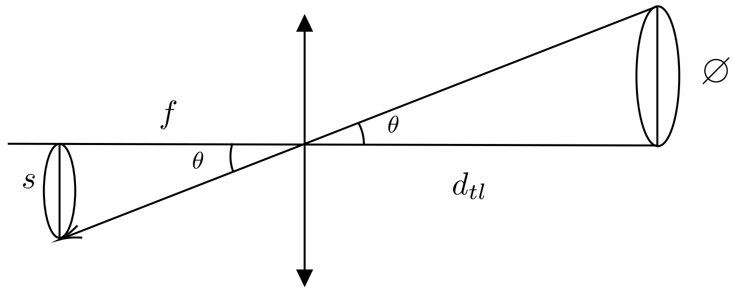
(c) 2.180

(d) 38.013

(e) 4.520

Solução:

Esquematizaremos a situação em que analisamos raios de luz especiais que cobrem toda a Lua e nos proporcionam uma imagem de comprimento s no telescópio, com distância focal f, sendo θ o diâmetro angular.



A partir deste desenho, podemos utilizar a trigonometria:

$$\tan\theta = \frac{s}{f} = \frac{\varnothing}{d_{tl}}$$

Como o que queremos é a área que a imagem ocupa, precisamos encontrar s, que representa o diâmetro da imagem da Lua. Assim, temos:

$$s = \frac{f\varnothing}{d_{tl}}$$

Observe que s é o comprimento físico, e não em pixels. Como desejamos o número de pixels N que o diâmetro da imagem da Lua ocupa, temos que:

$$N = \frac{s}{l}$$

onde l é o lado de cada pixel. Substituindo s, obtemos:

$$N = \frac{f\varnothing}{d_{tl}l}$$

Como N é o diâmetro da imagem da Lua em pixels, a área A é dada por:

$$A = \pi\left(\frac{N}{2}\right)^2$$

Portanto:

$$A = \pi\left(\frac{f\varnothing}{2d_{tl}l}\right)^2$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado:

$$\boxed{A \approx 4520\,\text{pixels}^2}$$

Resposta: (e)

18. **(1 ponto)** Ao contrário do que muitos podem pensar, o raio de influência gravitacional do super buraco negro central da Via Láctea, conhecido como *Sagittarius A** (lê-se: Sagittarius A "estrela"), com massa equivalente a 4,3 milhões de massas solares, é de alguns anos-luz. O que

significa que o movimento na Via Láctea unida à gravidade de todo o resto - estrelas, gás, poeira e matéria escura. Percebemos, então, que a influência gravitacional de *Sagittarius A** sobre o Sol, que está a cerca de 26.000 anos-luz do centro da Via Láctea, é desprezível.

Podemos definir a esfera de influência gravitacional como uma região em torno de um buraco negro supermassivo na qual o movimento das estrelas se deve ao buraco negro. O raio desta esfera é denominado **raio de influência gravitacional** r_i e pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$r_i = \frac{GM_{BN}}{\sigma^2}$$

onde G é a constante da Gravitação Universal, M_{BN} é a massa do buraco negro e σ é uma grandeza que tem a ver com a média das velocidades das estrelas em torno do buraco negro. Para *Sagittarius A** este raio vale aproximadamente $r_i = 10$ anos $-$ luz.

NGC 3258 é uma galáxia elíptica gigante localizada na direção da constelação da Máquina Pneumática (Antlia). Os astrônomos sabem que em seu centro existe um buraco negro supermassivo com cerca de 520 vezes a massa de *Sagittarius A** e que seu σ tem 3,3 vezes o σ de *Sagittarius A**.

Sendo assim, assinale a opção que traz o valor aproximado do raio de influência gravitacional para o super buraco negro central da **Galáxia NGC 3258**.

(a) 520,0 anos-luz

(b) 33,0 anos-luz

(c) 330,0 anos-luz

(d) 477,5 anos-luz

(e) 606,0 anos-luz

Solução:

O raio de influência gravitacional é dado por:

$$r_i = \frac{GM_{BN}}{\sigma^2}.$$

Para o buraco negro da Via Láctea (*Sagittarius A**), sabemos que $r_i = 10$ anos-luz. Comparando com o buraco negro da galáxia **NGC 3258**, temos que:

$$M_{BN,\text{NGC}} = 520 \cdot M_{BN,\text{Via Láctea}} \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{NGC}} = 3,3 \cdot \sigma_{\text{Via Láctea}}.$$

Substituímos essas relações na fórmula para r_i:

$$r_{i,\text{NGC}} = \frac{G(520 \cdot M_{BN,\text{Via Láctea}})}{(3,3 \cdot \sigma_{\text{Via Láctea}})^2}.$$

$$r_{i,\text{NGC}} = \frac{(520)GM_{BN,\text{Via Láctea}}}{(3,3)^2\sigma^2_{\text{Via Láctea}}}.$$

$$r_{i,\text{NGC}} = \frac{(520)r_{i,\text{Via Láctea}}}{(3,3)^2}$$

Fatoramos $r_{i,\text{Via Láctea}} = 10$ anos-luz e simplificamos os termos:

$$r_{i,\text{NGC}} = 10 \cdot \frac{520}{(3,3)^2}.$$

$$r_{i,\text{NGC}} = 10 \cdot \frac{520}{10,89} \approx 10 \cdot 47,75 = 477,5 \text{ anos-luz.}$$

Portanto, o raio de influência gravitacional do buraco negro da galáxia **NGC 3258** é aproximadamente:

$$\boxed{477,5 \text{ anos-luz}}$$

Resposta: (d)

19. **(1 ponto)** Quando a NASA enviou humanos à Lua em 1969, um dos muitos perigos que a agência teve que prever foi a penetração de rochas espaciais nos trajes e equipamentos dos astronautas. Ao contrário da Terra, que tem uma atmosfera protetora na qual meteoróides geralmente se desintegram, a Lua é vulnerável a quaisquer rochas, ou mesmo partículas, que estejam vagando pelo espaço.

Felizmente, os astronautas não estavam em muito perigo. De acordo com os especialistas da NASA, as chances de um astronauta ser atingido por um objeto do tamanho de um milímetro é de 1 em 1 milhão por hora por pessoa. Um milímetro é quanto um meteoróide precisa ter de tamanho para penetrar no traje espacial de um astronauta.

A NASA e outras agências estão se preparando para enviar humanos de volta à Lua nos próximos anos e, além disso, estabelecer uma base orbitando a Lua ou em sua superfície. Então é muito importante entender a frequência com que uma determinada área do nosso satélite natural sofre um impacto.

Considere que, atualmente, cerca de 100 meteoróides do tamanho de bolas de pingue-pongue estão atingindo a Lua por dia. Apesar de seu pequeno tamanho, cada uma dessas rochas impacta a superfície com velocidades de algumas dezenas de km/s, podendo causar grandes estragos. Considere, também, que esses 100 meteoróides diários caem por toda a superfície da Lua, com igual probabilidade, sem uma região preferencial de impacto.

Sendo assim, assinale a opção que traz de quanto em quanto anos, aproximadamente, um meteoróide desses atingirá uma base lunar de 1 km$^{\mathbf{2}}$ de área.

Dados: Diâmetro equatorial da Lua $\varnothing_{Lua} = 3.474,8$ km

(a) 1 a cada 1.000 anos

(b) 1 a cada 10.000 anos

(c) 1 a cada 100 anos

(d) 1 a cada 1.000.000 anos

(e) 1 a cada 100.000 anos

Solução:

Sabe-se que 100 meteoróides atingem a superfície lunar por dia. Considerando a Lua uma esfera, sua área superficial é dada por:

$$A = 4\pi R^2 = \pi D^2$$

Assim, a área da superfície lunar é:

$$A = 3,79 \times 10^7 \text{ km}^2$$

Com isso, é possível determinar o número de meteoróides que atigem a Lua em um dia por km^2:

$$\frac{100 \text{ meteoroides}}{3,79 \times 10^7 \text{ km}^2} = 2,64 \times 10^{-6} \text{ met./km}^2 \cdot \text{dia}$$

Como um dia equivale a 86164 segundos, a taxa de colisões será:

$$\frac{2,64 \times 10^{-6}}{86164} = 3,06 \times 10^{-11} \text{ met./km}^2 \cdot \text{s}$$

Como a área da base lunar mede 1 km^2, a frequência de colisões será de $3,06 \times 10^{-11}$ met./s. Desse modo, o intervalo de tempo entre duas colisões será de:

$$t = \frac{1}{f} = \frac{1}{3,06 \times 10^{-11}} = 3,27 \times 10^{10} \text{ s} \approx 1000 \text{ anos}$$

Resposta: (a)

20. **(1 ponto)** O Sol é o astro mais brilhante em nosso céu, sua magnitude aparente, a 1 UA de distância, vale aproximadamente $m_\odot = -26,8$. A Lua é o segundo astro mais brilhante. Sua magnitude aparente quando seu disco se encontra completamente iluminado, a cerca de 384.000 km de distância, vale aproximadamente $m_{Lua} = -12,6$.

Sabemos que o brilho de um astro varia com o quadrado da distância. Então, podemos imaginar que, à medida que nos aproximamos da Lua Cheia, seu brilho irá aumentar até que, em uma determinada distância desse astro, seu brilho seja igual ao brilho do Sol, visto da Terra.

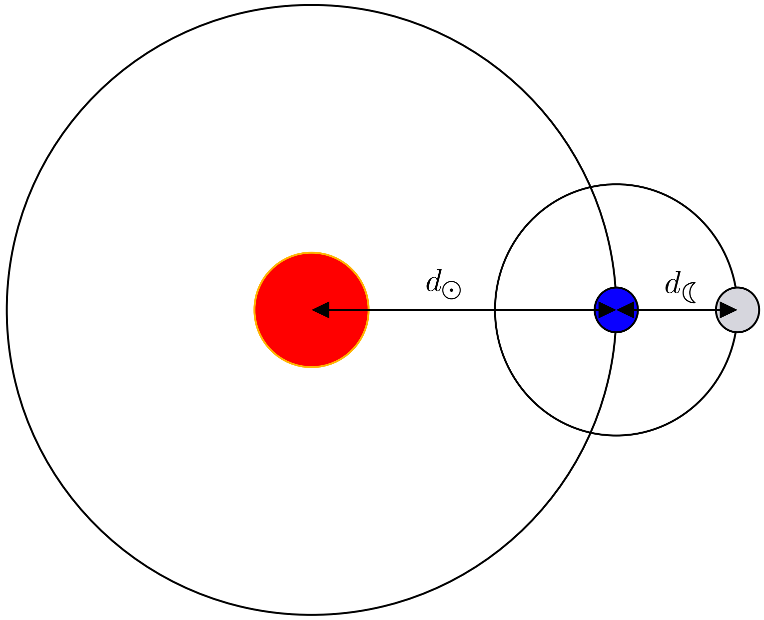
Sendo assim, assinale a opção que traz, aproximadamente, essa distância.

Dados: Diâmetro do Sol: $\varnothing_{Sol} = 1,4 \times 10^6$ km; Diâmetro da Lua: $\varnothing_{Lua} = 3.474,8$ km

(a) 570,6 km
(b) 586,1 km
(c) 555,1 km
(d) 691,8 km
(e) 568,9 km

Solução:

Esquematizando o plano que contém o Sol, a Terra e a Lua cheia (Fora de escala):



Como as únicas informações disponíveis são as magnitudes, não conhecemos as luminosidades do Sol e da Lua para aplicar diretamente a equação de Pogson:

$$m_1 - m_2 = -2,5\log\left(\frac{L_1}{4\pi d_1^2}\cdot\frac{4\pi d_2^2}{L_2}\right)$$

e determinar quando o logaritmo se anula, ou seja, quando as magnitudes se igualam ($m_1 = m_2$). Dessa forma, utilizaremos as magnitudes fornecidas no enunciado para calcular a razão entre as luminosidades:

$$m_{\odot} - m_{☾} = -2,5\log\left(\frac{L_{\odot}}{L_{☾}}\cdot\frac{4\pi d_{☾}^2}{4\pi d_{\odot}^2}\right)$$

$$\frac{m_{☾} - m_{\odot}}{2,5} = \log\left(\frac{L_{\odot}}{L_{☾}}\cdot\frac{d_{☾}^2}{d_{\odot}^2}\right)$$

$$\frac{L_{\odot}}{L_{☾}} = 10^{\frac{m_{☾} - m_{\odot}}{2,5}}\cdot\frac{d_{\odot}^2}{d_{☾}^2}$$

Substituindo os valores do enunciado, antes de alterar qualquer distância, obtemos:

$$\frac{L_{\odot}}{L_{☾}} \approx 7,3\cdot 10^{10}$$

Agora, perceba que a distância até o Sol mudará pouco em função das ordens de grandeza das distâncias: Sol (10^{11} m) e Lua (10^{6} m). Analisando novamente a equação de Pogson, percebemos que, para que as magnitudes sejam iguais, o termo $\left(\frac{L_{\odot}}{L_{☾}}\cdot\frac{4\pi d_{☾}^2}{4\pi d_{\odot}^2}\right)$ deve ser igual a 1, já que $\log(1) = 0$:

$$\frac{L_\odot}{L_☾} \cdot \frac{d_☾^2}{d_\odot^2} = 1$$

Daí, concluímos:

$$d_☾ = d_\odot \cdot \sqrt{\frac{L_☾}{L_\odot}}$$

Substituindo a distância do Sol ($d_\odot \approx 1,5 \cdot 10^8$ km) e a razão entre as luminosidades, temos:

$$\boxed{d_☾ \approx 555,1\,\mathrm{km}}$$

Resposta: (c)