

Essa etapa avaliará a sua habilidade em montar aparatos, extrair dados dos sistemas montados, relacionar resultados teóricos com a experimentação e analisá-los, fazendo uso dos itens disponíveis no *kit* experimental.

### O *kit* experimental

Na bancada você encontrará, conforme aparece na Figura 1, o *kit* experimental do TBF 2024 contendo:

- 1: 1 (um) trilho de 1,00 m de comprimento com uma ranhura de ângulo de abertura  $2\theta \approx 80^\circ$ ;
- 2: 1 (um) regulador de altura (veja a Figura 2 para detalhes da montagem);
- 3: 1 (um) cronômetro digital (marca **Classe** – modelo: **CLA-1063**);
- 4: 1 (um) saco plástico modelo *zip lock* contendo:
  - 14 (catorze) esferas metálicas de 8 mm de diâmetro e 2 g de massa cada;
  - 4 (quatro) ímãs de neodímio com formato de cilindro de 8 mm  $\times$  8 mm e 3 g de massa cada;
- 5: 1 (uma) régua milimetrada; e
- 6: 1 (um) bloco de madeira com 9 sulcos e limitadores de 36 g.

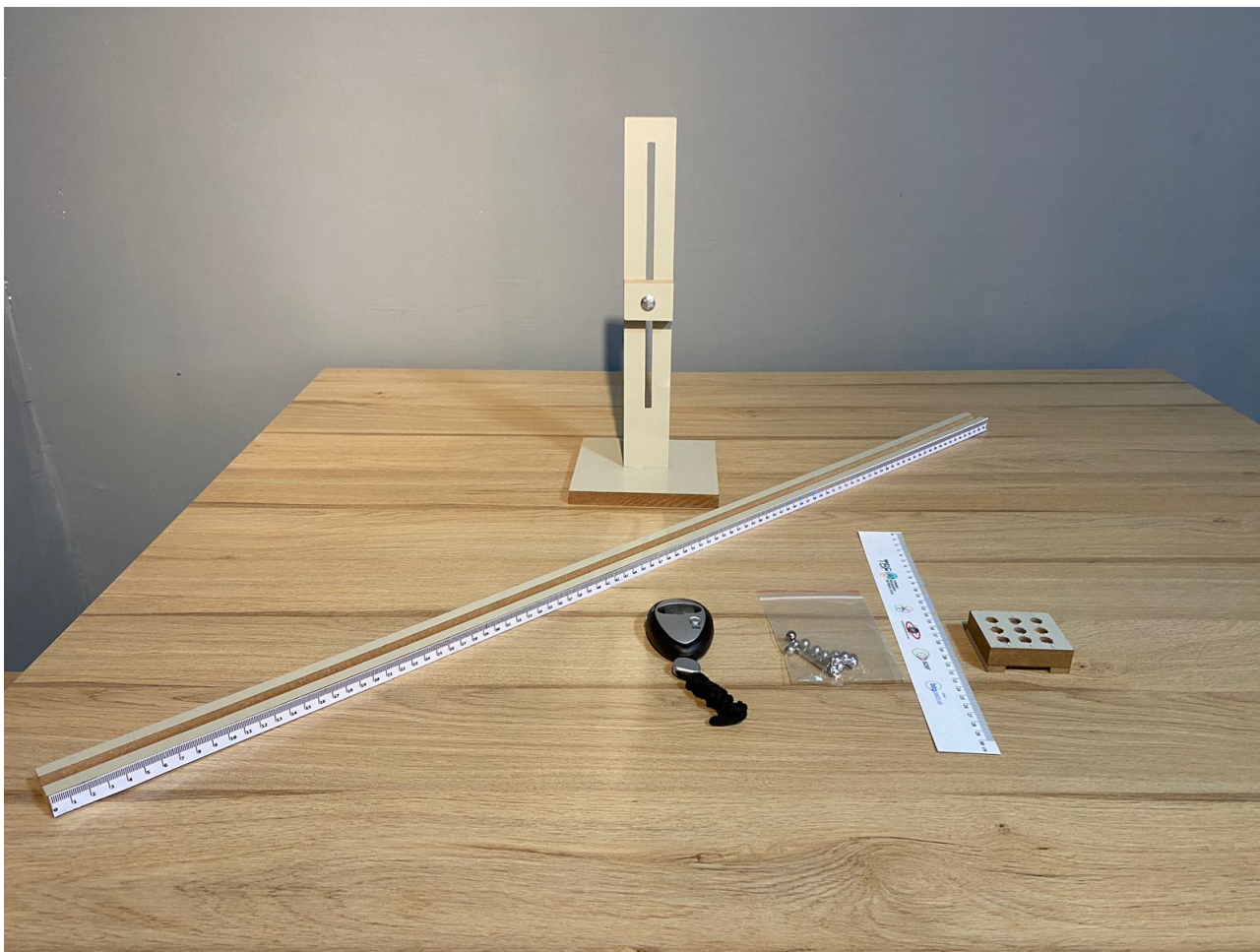


Figura 1: Componentes *kit* experimental do TBF 2024 para conferência e identificação.

### Regulador de altura

O regulador de altura é um equipamento ajustável com a finalidade de prover uma inclinação ao trilho. No *kit* experimental você encontrará um regulador de altura montado. Caso esta montagem esteja inconsistente ou irregular, siga as instruções presentes na legenda da Figura 2. Na legenda da figura, você ainda encontrará seus componentes constituintes. Em caso de problemas, solicitar auxílio.

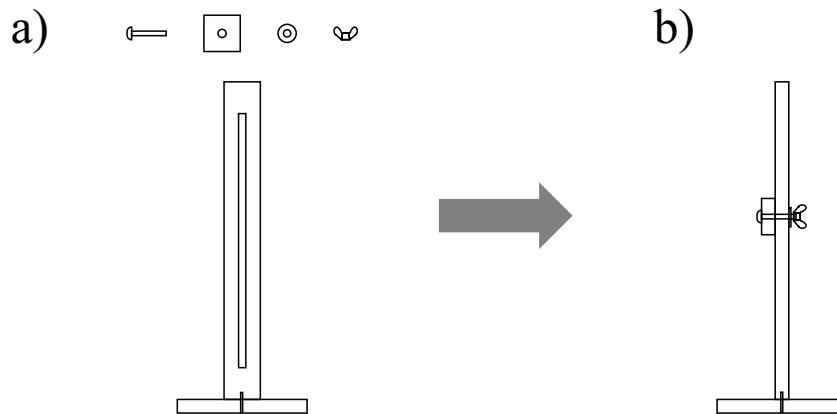


Figura 2: **Esquema de montagem do regulador de altura.** **A)** itens necessários para a montagem do regulador de altura, sendo eles: um bloco furado, um parafuso francês, uma porca borboleta, uma arruela, uma base de madeira e uma tábua com rasgo vazado. **B)** Esboço indicando a montagem da base e a tábua com rasgo vazado encaixando-se verticalmente. Ainda, o parafuso atravessa o bloco furado e o furo da tábua vazada sendo preso pelo outro lado pela arruela seguido da porca borboleta. Ao soltar a porca é possível regular a altura, para cima ou para baixo, bastando reapertar a porca para manter o sistema na posição desejada.

O ajuste da inclinação se dá pelo apoio do trilho sobre o pequeno bloco de madeira atravessado pelo parafuso do regulador de altura. Assim, é possível ajustar previamente a altura ( $h$ ) indicada e então apoiar o trilho.

### Funcionamento do cronômetro

Você recebeu um cronômetro digital esportivo com algumas funções. Para a medida do tempo pressione o botão ‘‘MODE’’ até alcançar a função *cronômetro*. O botão ao topo na direita ‘‘START/STOP’’ aciona e paralisa a contagem do tempo. Com a contagem do tempo paralisada é possível zerar o cronômetro com o botão ‘‘RESET’’ localizado no topo à esquerda. Vale ressaltar que, por se tratar de um relógio esportivo, ao clicar no botão ‘‘RESET’’ com a contagem acionada é apresentado o *tempo de volta*, que fica congelado na tela, todavia com a contagem correndo em plano de fundo. Para zerar o cronômetro nesta situação, basta pressionar novamente o botão ‘‘START/STOP’’ seguido do botão ‘‘RESET’’.

**Confira o kit experimental!** As Figuras 1 e 2 permitem identificar todos os itens que devem estar contidos no *kit* experimental. Caso exista algum equívoco, solicite apoio imediatamente.

### ATENÇÃO:

Estando todos os itens corretos, anote o seu UID no local reservado da caixa do *kit* experimental.

## Q1 - Plano Inclinado (14 pontos) <sup>1</sup>

Iniciamos a parte experimental obtendo e calculando resultados clássicos para uma esfera rolando sem escorregar sobre um plano inclinado. A montagem deve permitir ao participante a familiarização com os itens disponíveis no *kit* experimental, assim como prover valores de referência para um tratamento inicial.

Se preciso, considere a aceleração gravitacional local,  $g = 9,78 \text{ m/s}^2$  (Natal - RN).

Para todos os itens da questão, apresentar a incerteza da medida somente quando solicitado.

### Parte A - Esfera rolando em um plano inclinado

Utilizando o trilho e o regulador de altura, realize a montagem do aparato experimental conforme o esquema apresentado na Figura 3. O experimento consistirá em soltar a esfera do repouso e avaliar o seu movimento de descida ao longo de todo o trilho. Aqui, utilize o bloco disponível no *kit* experimental como anteparo de parada da esfera metálica para que ela não escape do trilho pela mesa. Um diagrama esquemático do rolamento da esfera é fornecido na Figura 4.

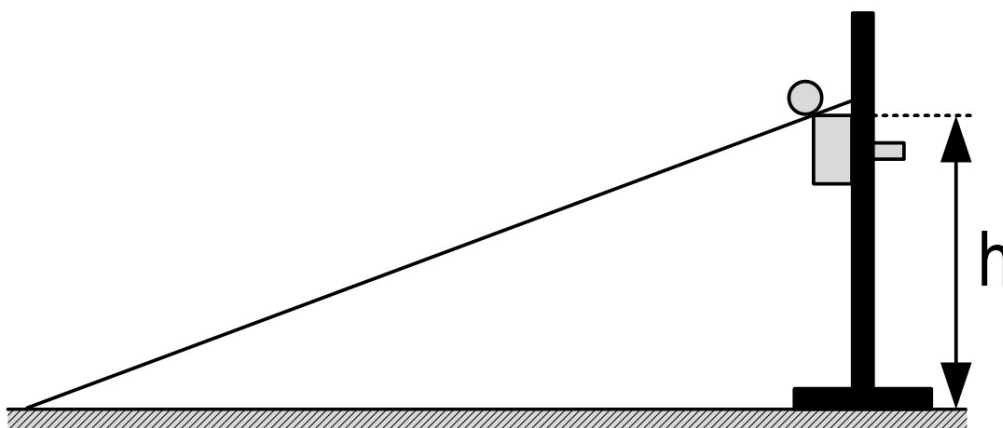


Figura 3: **Esquema de montagem do aparato para a Q1.** A construção consiste em um plano inclinado composto por um trilho com uma das extremidades apoiada no regulador de altura e a outra na mesa de trabalho. A altura ajustada está indicada pela letra  $h$  com suas delimitações, sendo no caso para essa questão, a uma altura de 17,0 cm. Nesta representação a esfera está posicionada no ponto mais alto do trilho. Ainda, a esfera metálica deverá partir do repouso percorrendo todo o trilho após ser liberada. No final, um bloco é colocado como anteparo para frear a esfera mantendo-a no trilho, todavia outros itens podem ser utilizados com a mesma finalidade.

Para os itens iniciais a altura do regulador deve ser ajustada para  $h = 17,0 \text{ cm}$ . Considere que a esfera rola sobre o trilho sem escorregar, para responder os itens da questão.

<sup>1</sup>Autoria: Prof. Leandro Cristante de Oliveira (IBILCE – UNESP Campus de São José do Rio Preto).  
Revisão: Comitê de questões do TBF 2024

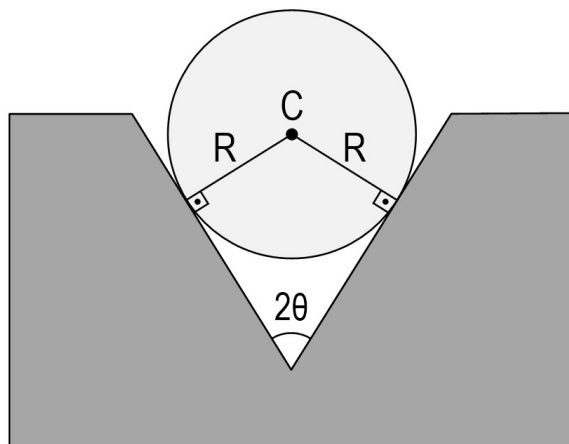


Figura 4: Diagrama esquemático do rolamento da esfera.

**A.1** Quantas revoluções a esfera pode realizar partindo do ponto mais alto do trilho e rolando ao longo de toda sua extensão? 0,75pt

**Solução Q1-A.1:**

Considerando o ponto de contato no esquema:

$$R' = R \operatorname{sen}40^\circ \tag{1}$$

$$n_{rev} = \frac{s}{2\pi R'} = 61.9 \approx \boxed{62 \text{ revoluções}} \tag{2}$$

**Critérios de avaliação:**

+0.25 pt pela expressão de  $R'$  (Equação 1)  
 +0.50 pt para valores entre 61 e 62 revoluções.

Certifique-se que o regulador está a uma altura de 17,0 cm e então posicione uma esfera metálica no início, isto é, na parte mais alta do trilho. Utilizando o cronômetro, registre o tempo necessário para a esfera percorrer todo o caminho do trilho partindo do repouso.

**A.2** Construa uma tabela com os tempos para que a esfera, partindo do repouso e do ponto mais alto do trilho, alcance seu final. Ainda, apresente o tempo médio e a incerteza associada. 1,0pt

Solução Q1-A.2:

Medida	tempo (s)
1	1.41
2	1.38
3	1.38
4	1.44
5	1.35
6	1.41
7	1.41
8	1.37
9	1.38
10	1.44
Média	1.397
Desvio	0.03

$$\langle T_{h=17cm,s=100cm} \rangle = (1.40 \pm \frac{0.03}{\sqrt{10}})s$$

$$\langle T_{h=17cm,s=100cm} \rangle = (1.40 \pm 0.01)s$$

**Critérios de avaliação:**

- +0.25 pontos – para o cálculo da média
- +0.25 pontos – para o cálculo do desvio
- +0.25 pontos – pelo uso adequado de algarismos significativos
- +0.25 pontos – pela incerteza associada
- 0.25 pontos – poucos valores medidos
- 0.25 pontos – pela falta de unidades

O resultado obtido por meio da análise do item **A2** poderá ser convenientemente utilizado para a resolução dos itens seguintes.

**A.3** Calcule a velocidade média de translação do centro de massa da esfera metálica assumindo o deslocamento sobre todo o trilho. Apresente a resposta e a incerteza associada. 0,5pt

**Resolução Q1-A.3:**

$$\langle v_{CM} \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(1 \pm 0.005)m}{(1.40 \pm 0.01)s} = \boxed{(0.714 \pm 0.005) \text{ m/s}}$$

Erro do comprimento:  $\pm 0.5mm$  (metade da menor divisão).

Para a propagação da incerteza é possível utilizar as expressões:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots$$

ou

$$w = a(x/y) \text{ (divisão)} : \left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

com igual efeito.

**Critérios de avaliação:**

+0.1 pontos – cálculo de  $v_{CM}$

+0.4 pontos – propagação da incerteza

-0.2 pontos – falta da incerteza da régua milimetrada

**A.4** Determine a velocidade final instantânea de translação do centro de massa da esfera no final do trilho, imediatamente antes de colidir com o bloco empregando um ou mais valores obtidos experimentalmente. Apresente também a aceleração do centro de massa da esfera. 3,0pt

**Solução Q1-A.4:**

Um caminho:

$$\Delta S = \frac{1}{2} A_{CM} \Delta t^2 \Rightarrow A_{CM} = \frac{2\Delta S}{t^2}$$
$$\boxed{A_{CM} = 1.01 \text{ m/s}^2}$$

Assim:

$$A_{CM} = \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V_{CM} - V_0}{\Delta T}$$
$$V_{CM} = A_{CM} \Delta T = 1.01 \cdot 1.40 \Rightarrow \boxed{V_{CM} = 1.414 \text{ m/s}}$$

empregando aqui o resultado de **A.2**.

Alternativamente (caminho 2),

Para encontrar a aceleração do centro de massa da esfera, uma opção é trabalhar com o equilíbrio das forças.

$$m_e g \sin\phi - (2)\mathcal{F} = m_e A_{CM} \quad (3)$$

onde  $m_e$  é a massa da esfera,  $\vec{g}$  a aceleração gravitacional local e  $\vec{\mathcal{F}}$  a força de atrito. Com,

$$2\mathcal{F}R \sin\theta = I_{CM} \frac{A_{CM}}{R \sin\theta} \quad \therefore \quad 2\mathcal{F} = \frac{I_{CM} A_{CM}}{R^2 \sin^2\theta}$$

temos,

$$A_{cm} = \frac{mg \sin\theta}{m_e + \frac{I_{CM}}{R^2 \sin^2\theta}}$$

$$A_{cm} = \frac{m_e g \sin\theta}{m_e + \frac{2/5 m_e R^2 \sin^2\theta}{R^2 \sin^2\theta}}$$

$$m_e g \sin\phi - I_{CM} \frac{A_{CM}}{R} = m_e A_{CM}$$

$$A_{CM} = \frac{m_e g \sin\phi}{m_e + \frac{2m_e R^2}{5R^2}}$$

$$A_{CM} = \frac{g \sin\phi}{1 + \frac{2}{5 \sin^2\theta}}$$

Assumindo então a aceleração como constante:

$$A_{CM} = \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V_{CM} - V_0}{\Delta T}$$

$$V_{CM} = A_{CM} \Delta T$$

$$V_{CM} = \frac{g \sin\phi}{1 + \frac{2}{5 \sin^2\theta}} \Delta T$$

Resultando em:

$$A_{CM} = \frac{9.78 \frac{OP}{HIP}}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 40^\circ}} = 0.85 \text{ m/s}^2$$

$$V_{CM} = A_{CM} 1.40 = 1.19 \text{ m/s}$$

Vale a pena considerar que a forma como a fita foi colada pode alterar o ângulo da canaleta fazendo inclusive permitindo em alguns casos que a esfera toque o fundo. Ainda, a superfície pode gerar oscilações resultando em perturbações aos valores teóricos esperados. Essa hipótese poderá ser reforçada com o cálculo da conservação da energia mais adiante.

Alternativamente (caminho 3), empregar o torque para equações equivalentes a caminho 2.

$$\tau = I\alpha \quad (4)$$

$$(5)$$

Utilizando o teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 \sin^2\theta$$

Retornando a definição do torque  $\tau = I\alpha$ :

$$mg(R \sin\theta) \sin\phi = \left( \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 \sin^2\theta \right) \alpha$$
$$\alpha = \frac{gR \sin\theta \sin\phi}{R^2 \sin^2\theta + \frac{2}{5}R^2}$$

Tendo a aceleração:

$$A_{CM} = (R \sin\theta)\alpha = \frac{gR^2 \sin^2\theta \sin\phi}{R^2 \sin^2\theta + \frac{2}{5}R^2}$$
$$A_{CM} = \frac{g \sin\phi}{1 + \frac{2}{5 \sin^2\theta}}$$

Como obtido no caminho 2, seguindo o mesmo procedimento realizado lá.

---

**Critérios de avaliação:**

+1.5 pontos – cálculo da aceleração (qq caminho)

+1.5 pontos – cálculo da velocidade

-1.0 pontos – Imprecisões (expoentes, sinais, ...)

OBS: Não permitir dupla penalidade (momento de inércia) nos item A.7 e A.12.

---



**A.5** Calcule a velocidade final de translação por meios puramente teóricos e compare com o resultado experimental obtido no item anterior. 0,25pt

Qual a diferença percentual desses valores? Discuta as fontes de eventuais discrepâncias verificadas.

**Solução Q1-A.5:**

Equação de Torricelli:

$$V_{CM}^2 = V_0^2 + 2 A_{CM} \Delta S$$
$$V_{CM}^2 = 2 \times 1.01 \times 1$$
$$V_{CM} = 1.42 \text{ m/s}$$

**Alternativamente** (caminho 2 ou 3):

$$V_{CM}^2 = 2 \times 0.85 \times 1$$
$$V_{CM} = 1.30 \text{ m/s}$$

Critério de avaliação:

+0.25 pontos – cálculo coerente da velocidade

-0.10 pontos – falta de unidades

**A.6** Calcule a velocidade angular média da esfera metálica partindo do repouso e percorrendo todo o trilho, utilizando o resultado do item **A.1** e **A.2**. Ainda, apresente a aceleração angular média. 0,5pt

**Solução Q1-A.6:**

$$\langle w \rangle = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta T} \approx \frac{62 \cdot 2\pi}{1.4} \Rightarrow \langle w \rangle = 278 \text{ rad/s}$$
$$\langle \alpha \rangle = \frac{dw}{dt} = \frac{\Delta w}{\Delta T} \approx \frac{62 \cdot 2\pi}{(1.4)^2} \Rightarrow \langle \alpha \rangle = 198.8 \text{ rad/s}^2$$

Critérios de avaliação:

+0.25 pontos – por item corretamente calculado.

-0.15 pontos – falta de unidades

**A.7** Verifique se a energia mecânica se conserva comparando as energias totais quando a esfera se encontra nas extremidades do trilho na situação de estudo. 1,0pt

**Solução Q1-A.7:**

Pela conservação da energia:

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I_{CM}w^2 = mgh$$

É possível utilizar a condição de rolamento para eliminar  $w$  (ou  $V$ ), assim:

$$K_{trans} = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}2 \times 10^{-3}(1.41)^2 = 1.99 \times 10^{-3} J$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_{CM} \left(\frac{V}{R'}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{2m(R)^2}{5} \left(\frac{V}{R'}\right)^2 = \frac{1}{5} \frac{mV^2}{\sin^2\theta} = \frac{2 \times 10^{-3} (1.41)^2}{5 \sin^2 40^\circ} = 1.93 \times 10^{-3} J$$

$$K_{Tot} = 3.91 \times 10^{-3} J$$

$$P = mgh = 2 \times 10^{-3} 9.78 0.17 = 3.3 \times 10^{-3} J$$

Conforme obtido em **A.4** e com a velocidade “alternativa” de **A.5** é possível notar que talvez estejamos medindo uma distância maior, visto que:

$$K_{trans} = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}2 \times 10^{-3}(1.30)^2 = 1.69 \times 10^{-3} J$$

$$K_{rot} = \frac{1}{5} \frac{mV^2}{\sin^2\theta} = \frac{2 \times 10^{-3} (1.30)^2}{5 \sin^2 40^\circ} = 1.64 \times 10^{-3} J$$

$$K_{Tot} = 3.33 \times 10^{-3} J$$

$$P = mgh = 2 \times 10^{-3} 9.78 0.17 = 3.3 \times 10^{-3} J$$

Reforçando a hipótese.

**Critérios de avaliação:**

+1.0 ponto – calculado adequado

-0.2 pontos – pela falta de unidades

OBS: Não penalizar em duplicidade (Q1-A.4, momento de inércia).

**A.8** Qual é a força de atrito exercida sobre a esfera e qual o coeficiente de atrito mínimo para que a esfera metálica não escorregue ao rolar sobre o trilho? 1,0pt

**Solução Q1-A.8:**

Definindo a força de atrito por:

$$\begin{aligned}2\mathcal{F}R' &= I_{CM} \alpha \\2\mathcal{F}R \sin\theta &= \frac{2}{5}m_e R^2 \frac{A_{CM}}{R \sin\theta} \\ \mathcal{F} &= \frac{2}{5}m_e R^2 \frac{A_{CM}}{2R^2 \sin^2\theta} = \frac{m_e A_{CM}}{5 \sin^2\theta} \\ \mathcal{F} &= \frac{2 \times 10^{-3} \cdot 0.85}{5 \sin^2(40^\circ)} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F} = 8.23 \times 10^{-4} \text{ N}}\end{aligned}$$

Alternativamente,  $\mathcal{F}\Delta S = \Delta E$  é igualmente aceito.

Quanto ao coeficiente de atrito, devido a esfera estar girando sem escorregar o atrito é igual ao atrito estático ( $\mu$ ), isto é, não se trata de seu valor máximo, assim:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\leq \mu_s F_N = \mu_s m g \cos\theta \\ \mu_s &\geq \frac{\mathcal{F}}{m g \cos\theta}\end{aligned}$$

Utilizando Pitágoras temos que:

$$AD^2 = HIP^2 - OP^2 AD^2 = 1^2 - (0.17)^2 AD = 0.985$$

$$\begin{aligned}\mu_s &\geq \frac{8.23 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3} \cdot 9.78 \cdot 0.985} \\ &\boxed{\mu_s \geq 4.27 \times 10^{-8}}\end{aligned}$$

**Critérios de avaliação:**

+0.5 pontos – por item calculado adequadamente

-0.2 pontos – pela falta de unidades

Alguns experimentos, por suas características particulares, permitem estabelecer uma relação entre as variáveis medidas. Assim, eles provêm equações eficientes para extrapolar valores de interesse ou obter complementarmente medidas indiretas. Com tal procedimento de “modelagem matemática do sistema” é possível antever valores sem a necessidade de uma nova aquisição de dados específica, o que é muito útil na prática experimental e na fundamentação de diferentes teorias.

Essa situação poderá ser verificada nos itens a seguir a partir da aquisição de tempos médios para a esfera metálica percorrer toda a extensão do trilho para diferentes alturas de apoio do trilho.

**A.9** Construa uma tabela com os tempos para a esfera percorrer todo o trilho, partindo do repouso desde o ponto mais alto e tendo o trilho apoiado para as seguintes alturas: 10 cm, 15 cm, 20 cm, 25 cm e 30 cm. Apresente os valores médios para cada altura. 1,5pt

**Solução Q1-A.9:**

Medida	$h = 10\text{cm}(s)$	$h = 15\text{cm}(s)$	$h = 20\text{cm}(s)$	$h = 25\text{cm}(s)$	$h = 30\text{cm}(s)$
1	1.72	1.50	1.35	1.22	1.13
2	1.75	1.50	1.28	1.19	1.06
3	1.78	1.47	1.31	1.21	1.13
4	1.72	1.44	1.34	1.22	1.15
5	1.75	1.44	1.28	1.19	1.04
6	1.78	1.47	1.35	1.22	1.13
7	1.81	1.47	1.34	1.19	1.12
8	1.81	1.53	1.31	1.19	1.07
9	1.79	1.53	1.35	1.18	1.16
10	1.82	1.53	1.31	1.25	1.13
Média	1.77	1.49	1.32	1.21	1.11

**Critérios de avaliação:**

+0.3 pontos – por média para cada altura

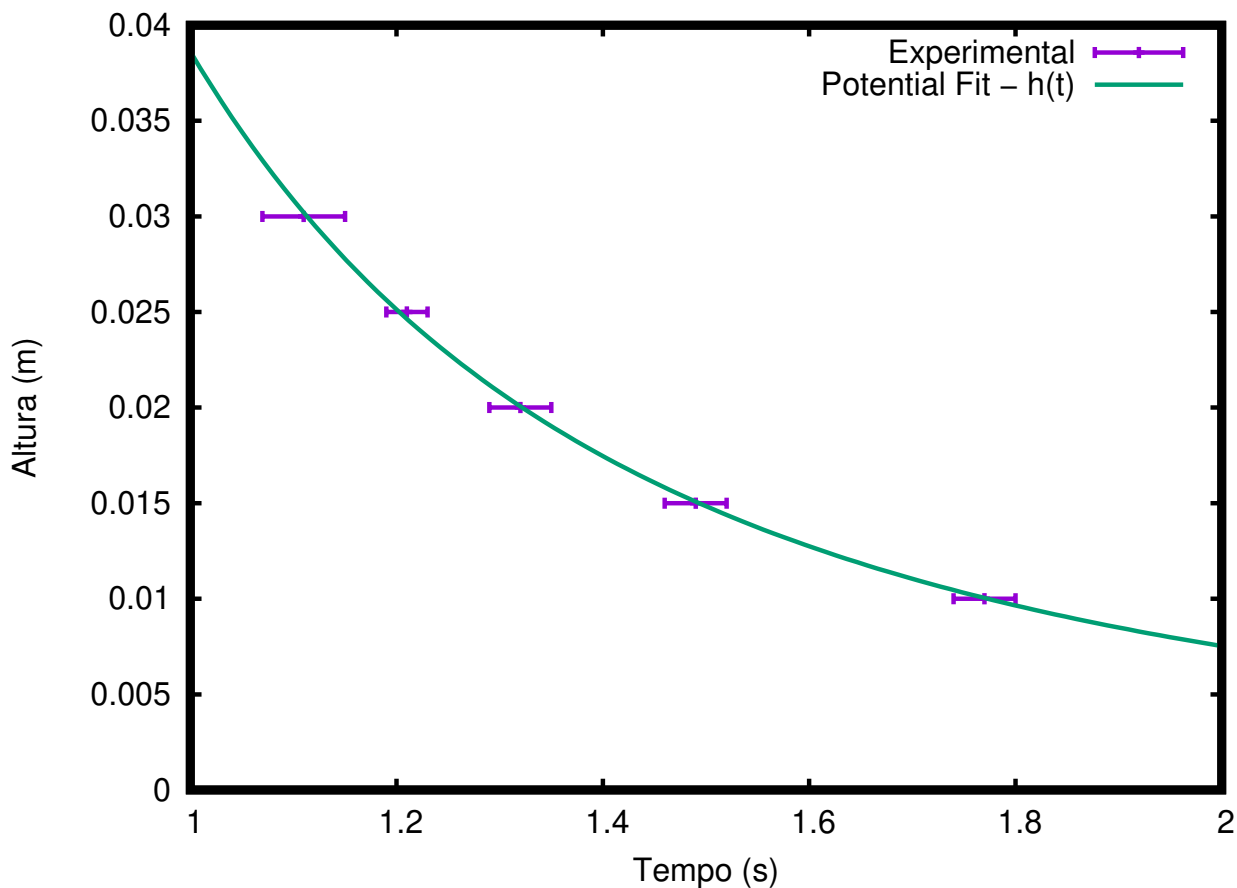
-0.3 pontos – por falta de unidades

-0.5 pontos – por aquisição de menos de 10 medidas

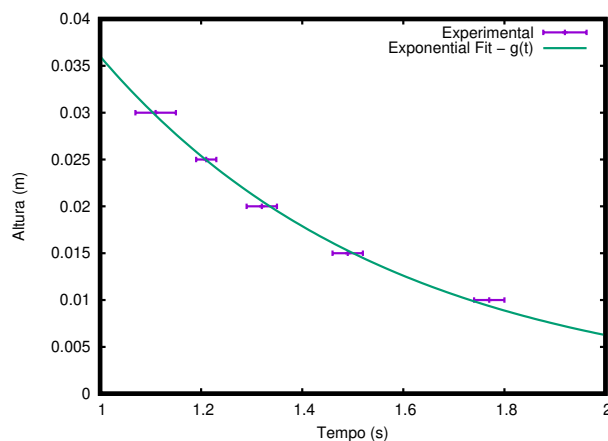
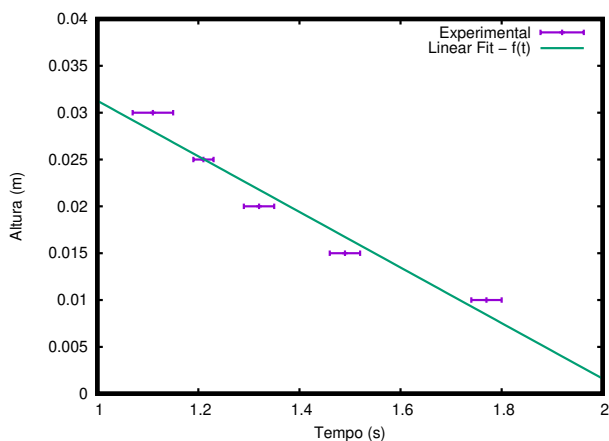
**A.10** Empregando a tabela obtida no item **A.9**, construa um gráfico para a determinação dos coeficientes da curva com o melhor ajuste. 3,0pt

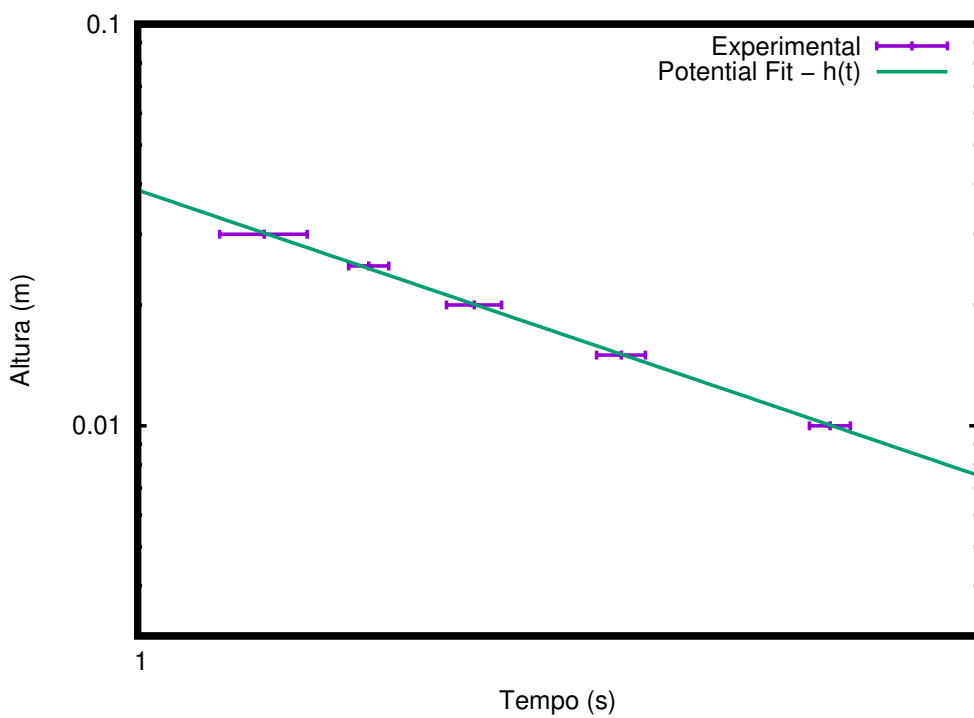
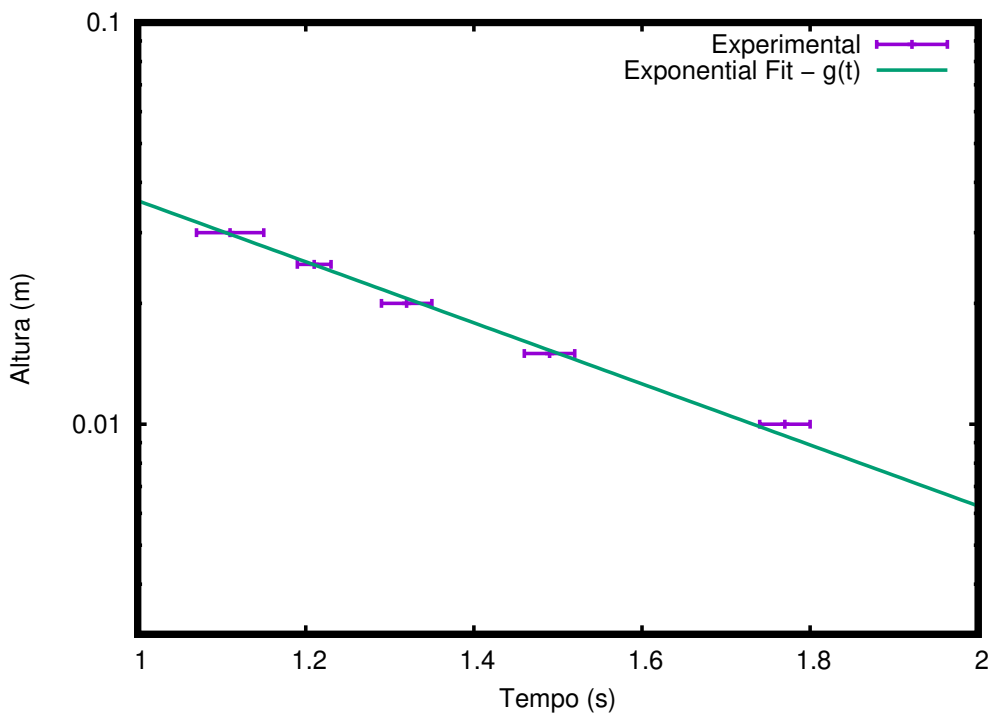
Solução Q1-A.10:

Melhor ajuste:  $h(t) = 0.0386 t^{-2.36}$



Demais:





Critérios de avaliação:

+0.9 ponto – pela curva adequada no gráfico

+0.6 pontos – por eixos, nomenclatura adequada dos eixos, unidades e legenda. (0.1 cada)

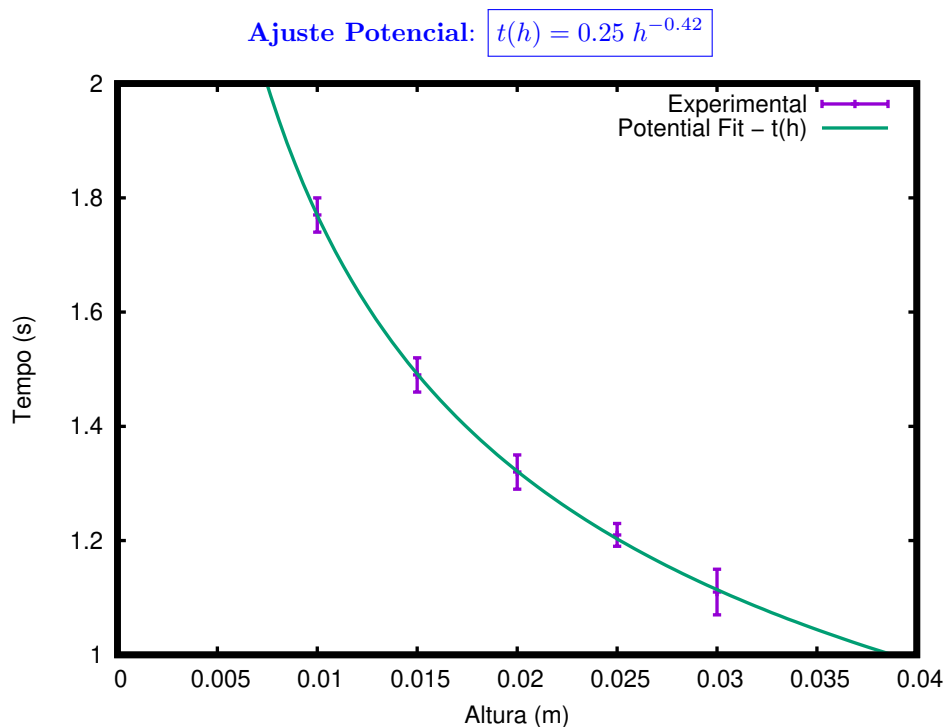
+1.5 pontos – pela equação da reta

OBS: O participante pode utilizar o método que preferir, incluso indicar que fez na calculadora.

**A.11** Encontre, baseando-se principalmente nos últimos itens, uma equação para a velocidade final do centro de massa da esfera metálica em função da altura do regulador de inclinação do trilho. 0,75pt

**Solução Q1-A.11:**

Inicialmente, é possível com os dados obter a relação:



Então,

$$\langle v \rangle = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}$$

$$V_{max} = 2 \langle v \rangle = 2 \frac{\Delta S}{\Delta T}$$

$$V_{max} = 2 \frac{1}{0.25 h^{-0.42}}$$

$$V_{max} = 8.0 h^{0.42}$$

Critérios de avaliação:  
 +0.75 – pelo substituição adequada

**A.12** Empregando a velocidade final do centro de massa em função da altura, obtida no item anterior (A.11), verifique sua similaridade com a equação teórica esperada. 0,75pt

**Solução Q1-A.12:** Retornando a resolução do item Q1-A.7, temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5 \sin^2 \theta}mv^2 = mgh \quad (6)$$

$$V^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5 \sin^2 \theta} \right) = gh \quad (7)$$

$$v_{CM}(h) = 1.29 h^{0.5} \quad (8)$$

Comparando com

$$V_{max} = 8.0 h^{0.42}$$

Verificamos um resultado razoavelmente similar, considerando as questões do trilho já apontadas.

Critérios de avaliação:

+0.75 – pelo cálculo adequado

OBS: Não permitir dupla penalização em Q1.A7 e Q1.A4.



**Q2 - Colisões (26 pontos) <sup>2</sup>**

Nesta questão vamos explorar as colisões entre uma esfera metálica e um bloco de madeira. O bloco de madeira permite a variação da massa pela inserção de esferas metálicas em seus furos, localizado em sua parte superior. Na parte inferior existem aparadores que limitam seu deslocamento somente sobre o trilho. Os resultados obtidos aqui servirão de referência para as partes futuras desta questão.

**Parte A - Esfera metálica e um bloco de massa variável (6,0 pontos)**

Utilizando o trilho, o bloco e o regulador de altura disponíveis no *kit* experimental, realize a montagem conforme o esquema apresentado na Figura 5. Posicione o bloco na metade do trilho e marque essa posição como ponto de referência. Ajuste o regulador para uma altura  $h = 15,0$  cm,  $17,0$  cm ou  $19,0$  cm, de modo que o carrinho possa ser freado pelo atrito dinâmico até o repouso após um deslocamento da ordem de 1 cm.

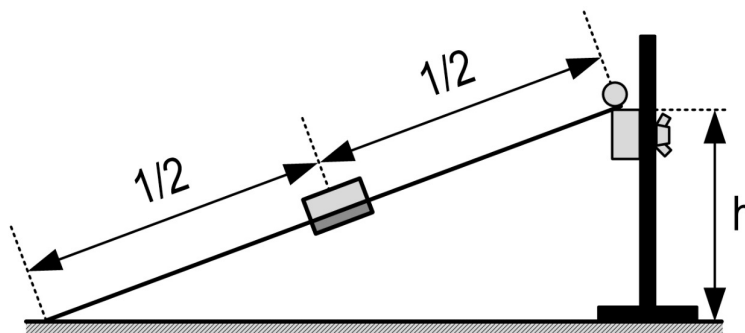


Figura 5: **Esquema de montagem do aparato experimental para a Q2 – parte A.** É apresentado um plano inclinado com um bloco situado em sua metade. O esquema mostra a esfera localizada no início do trilho e o bloco encaixado por seus aparadores laterais.

Posicione uma esfera metálica no início do trilho (parte mais alta) soltando-a do repouso. Considere ainda que ao longo de todo o percurso a esfera gira sem escorregar. A colisão da esfera deve produzir um deslocamento no bloco, sendo esta uma medida de referência.

**A.1** Seguindo o procedimento apresentado, construa uma tabela com os valores dos deslocamentos do bloco após a colisão com a esfera metálica. Para tal tabela, utilize o bloco empregando convenientemente de 0 a 9 esferas inseridas em seus furos. 3,0pt

Apresente os valores das médias e desvios das medidas na tabela.

**Critérios de avaliação:**

+1,5 – Pelo menos 5 medidas para cada número de bolas

+0,5 – Cálculo correto de médias

+1,0 – Cálculo correto de desvios (ou desvios padrão)

Pequenos erros de número de algarismos significativos podem ser penalizados.

<sup>2</sup>Autoria: Prof. Leandro Cristante de Oliveira (IBILCE – UNESP Campus de São José do Rio Preto).  
Revisão: Comitê de questões do TBF 2024

	0B	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	8B	9B
0	9	7.5	7.0	6.5	6.0	5.0	5.0	6.0	5.5	5.5
1	8	7.0	7.0	6.5	6.0	5.5	5.0	5.5	4.0	5.0
2	8	7.0	6.5	6.5	6.0	5.5	5.5	5.0	5.0	5.0
3	8	7.0	7.0	6.0	6.0	5.5	6.0	4.5	5.5	5.0
4	8	7.0	7.0	6.0	5.5	6.0	5.0	5.0	5.0	3.5
5	8	7.0	6.5	7.0	6.0	6.0	6.0	5.0	5.0	4.5

Figura 6: Tabela de medidas de deslocamentos em mm.

1	dataA1.mean()
0B	8.166667
1B	7.083333
2B	6.833333
3B	6.416667
4B	5.916667
5B	5.583333
6B	5.416667
7B	5.166667
8B	5.000000
9B	4.750000

Figura 7: Tabela de valores médios de deslocamentos em mm.

dev0B	dev1B	dev2B	dev3B	dev4B	dev5B	dev6B	dev7B	dev8B	dev9B
0.833333	0.416667	0.166667	0.083333	0.083333	-0.583333	-0.416667	0.833333	0.5	0.75
-0.166667	-0.083333	0.166667	0.083333	0.083333	-0.083333	-0.416667	0.333333	-1.0	0.25
-0.166667	-0.083333	-0.333333	0.083333	0.083333	-0.083333	0.083333	-0.166667	0.0	0.25
-0.166667	-0.083333	0.166667	-0.416667	0.083333	-0.083333	0.583333	-0.666667	0.5	0.25
-0.166667	-0.083333	0.166667	-0.416667	-0.416667	0.416667	-0.416667	-0.166667	0.0	-1.25
-0.166667	-0.083333	-0.333333	0.583333	0.083333	0.416667	0.583333	-0.166667	0.0	-0.25

Figura 8: Tabela de desvios das medidas de deslocamento em mm.

**A.2** Empregando a tabela obtida em **A.1**, construa um gráfico para a determinação dos coeficientes da curva com o melhor ajuste. 2,0pt

**Solução Q2-A.2:**

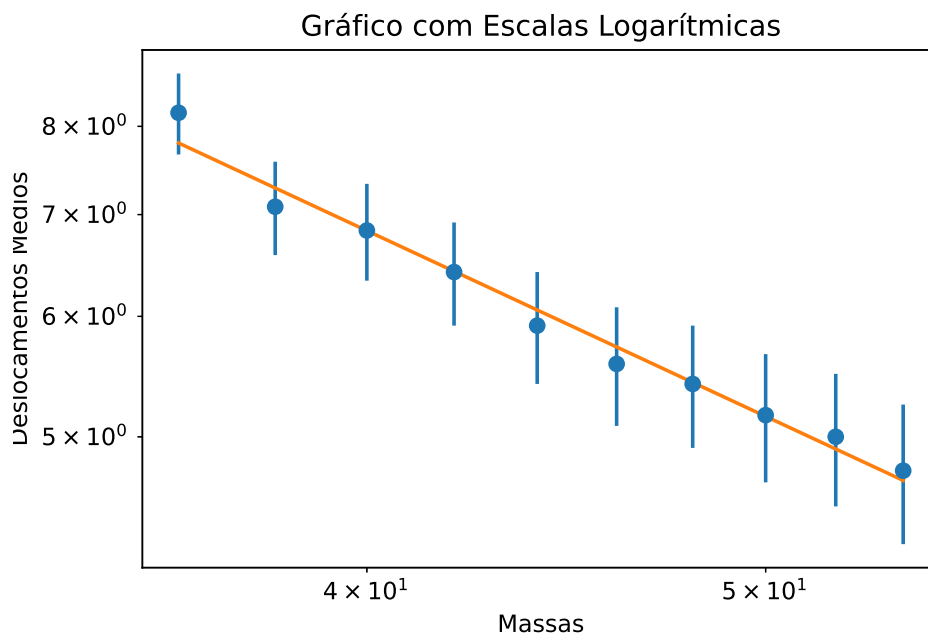


Figura 9: Tabela de desvios das medidas de deslocamento.

**Ajuste Exponencial:**  $D(m) = 712.843 e^{-1.2599 m}$

**Critérios de avaliação:**

- +0.5 pontos – por eixos, nomenclatura adequada dos eixos, unidades e legenda.
- +1.0 ponto – linearização ou uso do papel dilog
- +0.5 pontos – determinação de coeficientes

**Fontes de penalidades:**

- Escolha inadequada do gráfico;
- Uso de área muito reduzida do gráfico (<40%);
- Linearização inadequada.

A intensidade da força resultante sobre o bloco de madeira pode ser estimada a partir do resultado anterior.

**A.3** Forneça uma expressão aproximada para a força resultante média em função da massa do bloco enquanto este se encontra em movimento. Deixe sua resposta em termos de  $m_e$ ,  $g$ ,  $h$  e da distância  $D(m_b)$ , sendo  $m_e$  a massa da esfera e  $m_b$  a massa do bloco. 1,0pt

**Solução Q2-A.3:**

Relacionando o trabalho com a energia potencial total temos:

$$W = Fd \cos \theta \approx \langle F \rangle d \approx m_e g h$$
$$\langle F \rangle = \frac{m_e g h}{d} = \frac{m_e g h}{D(m_b)}$$

Critérios de avaliação:

+0.50 – pela relação do trabalho com a energia

+0.50 – Por expressão final correta

Raciocínios envolvendo ideias como:

- Conservação de momento linear;
- Análise da colisão entre bloco e esfera;

podem receber pontuação parcial ou até total desde que a solução apresente considerações físicas razoáveis. Tais ideias podem resultar em pequenas modificações de fatores numéricos ou introdução de massa do bloco.

**Parte B - OMG: Oh My Gauss! (10 pontos)**

Nesta parte vamos explorar um dispositivo conhecido como “Rifle de Gauss”. Partindo da construção anterior (veja Figura 5), insira um ímã encostando-o no bloco de madeira, de modo que o ímã seja inserido entre o bloco de madeira e a esfera que parte do repouso desde o ponto mais alto do trilho. Uma representação dessa montagem está apresentada no esboço à esquerda da Figura 10. Nesta montagem manteremos fixa a massa do bloco de madeira, isto é, sem a adição de esferas em seus furos.

Para entendimento do fenômeno de interesse, serão adicionadas gradualmente esferas metálicas entre o ímã e o bloco de madeira, conforme poderá ser verificado nos itens seguintes. A altura do regulador deve ser a mesma adotada na parte anterior.

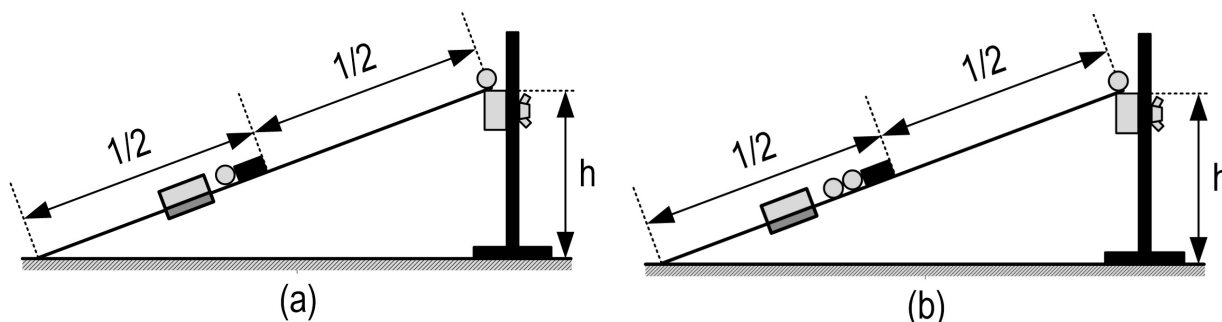


Figura 10: **Esquema de montagem do aparato experimental para a Q2 – parte B.** (a) Colocação de um ímã entre a esfera que parte do repouso (ponto mais alto do trilho) e o bloco, com uma esfera inserida à esquerda do ímã. Na sequência, em (b) é indicado o procedimento de introdução de uma nova esfera metálica entre o ímã e o bloco de madeira. A adição de um número maior de esferas deve seguir o mesmo procedimento.

Assuma que serão inseridas de 1 a 6 esferas metálicas entre o ímã e o bloco de madeira. Para os seguintes itens desconsidere as energias perdidas pelas colisões e devido à fricção.

**B.1** Construa uma tabela com os valores dos deslocamentos do bloco de madeira em função do número de esferas. Ao final, apresente os valores médios de deslocamento para cada número de esferas. 3,0pt

**Solução Q2-B.1:**

```
bolas1=np.asarray([3.15,2.75,2.7,2.9,2.9])##cm
bolas2=np.asarray([3.5,3.5,3.5,3.3,3.45])
bolas3=np.asarray([4.85,5.6,5.3,5.15,5.45])
bolas4=np.asarray([5.8,6.4,6.9,6.8,6.65])
bolas5=np.asarray([6.75,7.1,7.9,7.6,7.2])
bolas6=np.asarray([8.55,9.35,8.4,9.4,9.3])
```

```
1 bolasMedias=[bolas1.mean(),bolas2.mean(),bolas3.mean(),bolas4.mean(),bolas5.mean(),bolas6.mean()]
2 bolasMedias
```

```
[2.8800000000000003, 3.45, 5.27, 6.510000000000001, 7.310000000000005, 9.0]
```

**Critérios de avaliação:**

- +2,0 – Pelo menos 5 medidas para cada número de bolas
- +1,0 – Cálculo correto de médias

**B.2** Escreva uma expressão para a velocidade final ( $V_f$ ) da esfera metálica ejetada em função de energias potenciais magnéticas ( $U_i$  e  $U_f$ ), parâmetros geométricos e velocidade ( $V_i$ ) imediatamente antes da colisão com o ímã. 2,0pt

**Solução Q2-B.2:**

A variação da energia cinética deve ser dada por:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = (U_i - U_f)$$

onde  $U_f$  e  $U_i$  são referentes a energia potencial magnética após e antes da colisão com o ímã, respectivamente, e o último termo da expressão a contribuição da energia potencial gravitacional aproximadamente no meio do trilho.

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = (U_i - U_f)$$

$$v_f = \sqrt{2 \left( \frac{U_i - U_f}{m} \right) + v_i^2}$$

Caminho árduo para calcular as velocidades finais.

Critérios de avaliação:

+1,0 – Conservação de energia

+1,0 – Resposta final correta

Obs: A energia cinética de rotação não consegue ser transferida pelo processo de colisão.

A consideração dessa parcela de energia implica em penalidades.

O uso da expressão deduzida no último item demanda o conhecimento de como a energia potencial magnética ( $U_i$  e  $U_f$ ) varia com o número de esferas. Todavia,  $V_f$  pode ser experimentalmente determinada com maior facilidade de outro modo sem o conhecimento dessas quantidades.

Por simplicidade, considere que toda a energia da bolinha metálica é transferida para o bloco, cujo movimento subsequente à colisão cessa devido à ação da força de atrito dinâmico com o trilho.

**B.3** Utilizando as medidas realizadas no item **B.1.** e o resultado obtido no item **A.3.**, calcule a velocidade de ejeção ( $V_f$ ) do “rifle de Gauss” com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 esferas metálicas. 3,0pt

### Resolução Q2-B.3:

No item anterior o participante deve ter verificado que a aplicação da definição obtida provê um caminho “árduo” para a resolução desse item.

Uma alternativa consiste em empregar a relação entre Energia Cinética da esfera metálica ejetada e trabalho realizado no bloco:

$$W = \Delta K = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

Podemos então considerar o trabalho realizado pela força de atrito para frear o bloco, empregando a força de atrito média ( $\langle F_{at} \rangle$ ) calculada previamente na Q3-A.3:

$$\langle F_{at} \rangle \Delta d = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

**Nota1:** Note que, caso o participante tenha calculado a velocidade inicial ( $v_i$ ) teoricamente, aqui ele precisa obrigatoriamente do deslocamento para a variação do trabalho, via experimentação.

Assim com,

$$v_f^2 = \frac{2}{m_e} \langle F_{at} \rangle \Delta d + v_i^2$$

Critérios de avaliação:

- +0.5 – pela expressão da velocidade inicial
- +1.0 – pela equação utilizando a força de atrito média
- +0.25 – por velocidade apresentada por método razoável

Mais do que valores exatos, avaliamos a consistência geral dos resultados apresentados. A velocidade  $V_f$  deve ser crescente com o número de esferas.

**B.4** Apresente uma tabela com os valores de variação de energia magnética  $\Delta U = U_f - U_i$  2,0pt para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  e 6 esferas metálicas.

A diferença de energias potenciais pode ser estimada mediante o aumento de energia cinética da esfera avaliada a partir dos dados experimentais coletados:

$$(U_i - U_f) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

Critérios de avaliação:

+0.33 – por cada valor de  $U_i$  apresentado.

Mais do que valores exatos, avaliamos a consistência geral dos resultados apresentados.

O valor absoluto de  $\Delta U$  deve ser crescente com o número de esferas.



### Parte C - “Troca” (5,0 pontos)

Na parte anterior foi avaliado o efeito gerado pela adição de um ímã cilíndrico no trilho, entre a esfera e bloco de madeira, e inserções de esferas à esquerda do ímã tomando como referência a Figura 10. Aqui, a fim de limitar o número de variáveis, serão mantidas 2 esferas à esquerda do ímã, e serão adicionadas gradativamente esferas metálicas à direita do ímã.

O procedimento consistirá em adicionar de 0 a 3 esferas à direita do ímã, sem contar a esfera metálica que parte do repouso desde o ponto mais alto do trilho. Novamente, será mantida a altura selecionada anteriormente. Também, o bloco de madeira seguirá sem nenhuma esfera adicionada em seus furos.

<b>C.1</b>	Construa uma tabela dos deslocamentos médios, em função do número de esferas metálicas adicionadas à direita.	3,0pt
------------	---	-------

#### Comentários Q2-C.1:

Aqui, é observado uma redução na velocidade de ejeção com o aumento de esferas à direita. Devido as várias possibilidades de altura será realizada uma avaliação qualitativa.

#### Critérios de avaliação:

- + 0.5 pelas unidades na tabela
- + 1.0 pelo número de medidas
- + 1.5 por identificar que o comportamento é decrescente

<b>C.2</b>	Como o efeito obtido nesta parte se compara aos comportamentos observados na parte A ou B? (Caso não tenha realizado as etapas anteriores mencionadas, descreva sucintamente sobre o efeito obtido.)	2,0pt
------------	---	-------

#### Comentários Q2-C.2:

Deve verificar que ao inserir esferas à direita a velocidade aumenta e que ao adicionar esferas à direita a velocidade de ejeção diminui.

#### Critérios de avaliação:

- + 2.0 pela constatação de comportamentos contrários em A e B.

### Parte D - Põe na *pendureta* porque somos *clientis*<sup>3</sup> (5,0 pontos)

Nas partes anteriores da questão foram avaliados os efeitos da inserção de esferas metálicas à direita e à esquerda de um único ímã cilíndrico, explorando seus efeitos no sistema. Assim, aproveitando o aparato já disponível, nesta seção será explorado o efeito da associação de ímãs.

Será mantido o plano inclinado, com o regulador na mesma altura da parte A, bloco de madeira sem esferas inseridas em seus furos, 2 esferas metálicas entre o ímã e o bloco de madeira (2 esferas à esquerda em relação ao esquema da Figura 10) e somente a esfera que partirá do repouso do ponto mais alto do trilho no caminho do ímã (sem esferas de espaçamento à direita).

Com a montagem proposta, varie o número de ímãs, fazendo associações de suas faces circulares atrativamente encostadas (contato) unitariamente por vez, de 0 a 4 ímãs, repetindo o procedimento de liberar a esfera do

<sup>3</sup>Homenagem ao artista Antônio Carlos Bernardes Gomes, o Mussum.

repouso (ponto mais alto) para cada uma das adições, e avaliando o deslocamento médio do bloco de madeira após as colisões.

**D.1** Apresente uma tabela dos deslocamentos do bloco de madeira em função do número de ímãs. 3,0pt

### Comentários Q2-D.1:

Aqui, deve ser observado que a adição de ímãs não contribuem para aumentar a velocidade de ejeção da esfera.

#### Critérios de avaliação:

+ 0.5 pelas unidades na tabela

+ 1.0 pelo número de medidas

+ 1.5 por identificar que o comportamento é decrescente

A fim de dirimir algumas interpretações, o último experimento será realizado sem o uso do trilho, regulador de altura e bloco de madeira.

Nesse experimento serão empregados de 1 a 4 ímãs e as esferas metálicas disponíveis no *kit* experimental, tomando cuidado para que as esferas não se espalhem pela ambiente da prova. Assim, recomenda-se que esse experimento seja realizado sobre a caixa do *kit* experimental, com sua tampa aberta para que, ao se desprenderem, as esferas caiam dentro da caixa.

O experimento consiste em tomar um ímã (ou uma associação), suspendê-lo e ligar sequencialmente esferas nele, de modo a “pendurar” o maior número de esferas possíveis e registrar esse valor. Um esquema desse procedimento está apresentado na Figura 11, logo abaixo:

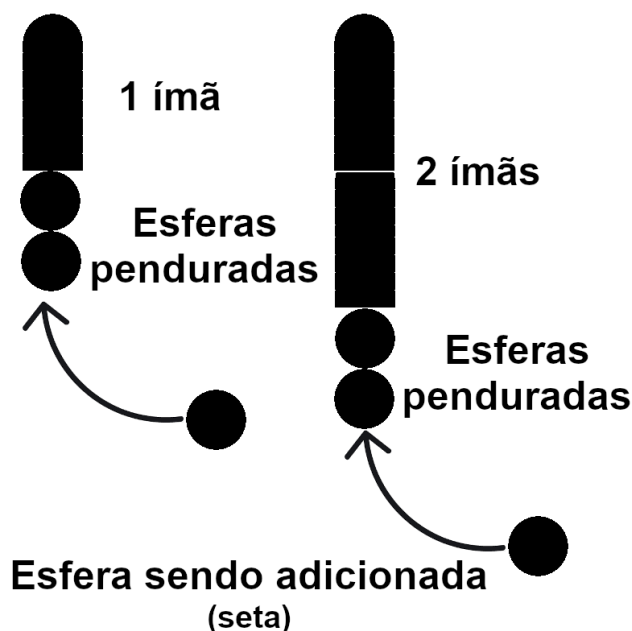


Figura 11: Esquema do procedimento para pendurar esferas metálicas no(s) ímã(s).

**D.2** Apresente uma tabela do máximo número de esferas possíveis de ficarem penduradas verticalmente em função de 1 a 4 ímãs associados atrativamente. 1,0pt

**Solução Q2-D.2:**

N de ímãs	N esferas penduradas
1	10
2	11
3	12
4	13

Critérios de avaliação:  
+0.25 por associação de ímãs

**D.3** Quais são as possíveis conclusões considerando os itens D.1 e D.2? Qual o efeito da associação de ímãs no aparato e qual a explicação para esse efeito? Justifique a sua resposta com base nos resultados obtidos. 1,0pt

**Solução Q2-D.2:**

Como vimos na Prova Experimental da 3ª Fase da OBF 2022, a força de interação entre dois dipolos magnéticos interagentes em determinada região do espaço pode ajustada por

$$F = Ar^{-\alpha}.$$

O expoente  $\alpha = 3$  é um resultado bem conhecido usado com dipolos distantes. Mas em regiões próximas  $\alpha$  é mais próximo de 2.

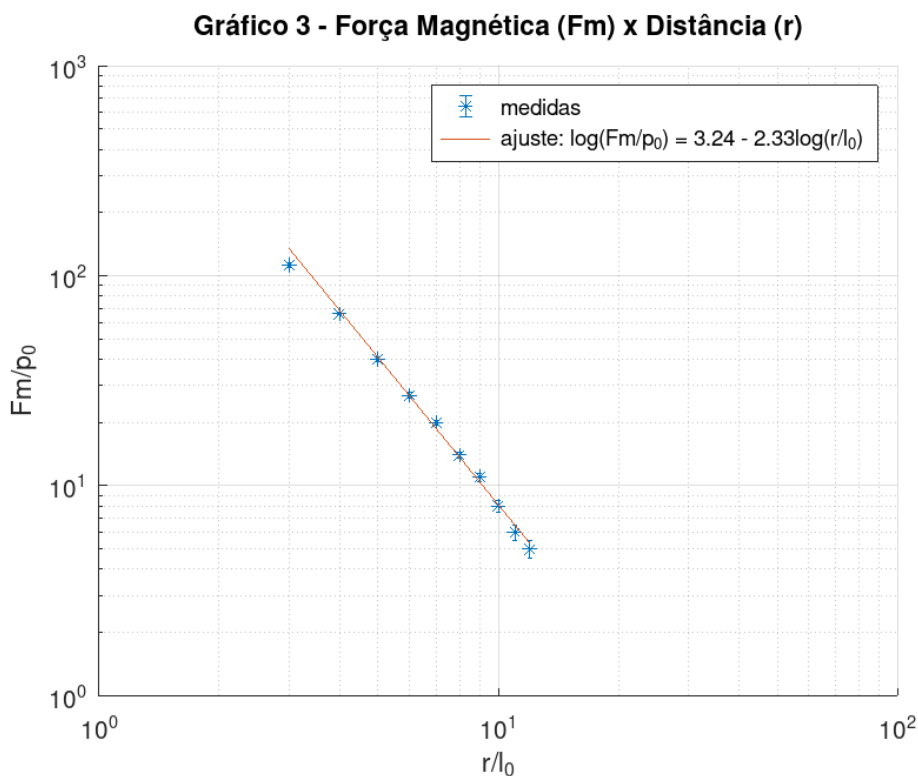


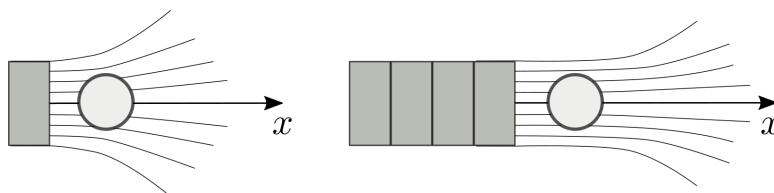
Figura 12: Resultado de calibração do gabarito OBF 2022, fonte: rsauer

O força magnética produzida por um dipolo sobre uma esfera paramagnética é dada por

$$F_m = m(B) \frac{\partial B}{\partial x}$$

onde  $m(B)$  é a magnetização da esfera (que é uma função crescente de  $B$ ).

A figuras abaixo mostram, qualitativamente, o efeito da associação de ímãs sobre o campo magnético nas proximidades do eixo  $x$ .



Em um ponto  $x_0$ , sobre o eixo  $x$ , à medida que o número de ímãs aumenta temos:

- $B(x_0)$  aumenta.
- $\frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x_0}$  diminui ( $\alpha$  se aproxima de 2).

**Efeito Pendura:** O aumento do número de ímãs favorece fracamente a capacidade de pendurar mais esferas. Explicação:

Nas proximidades do imã não há muita variação de  $\frac{\partial B}{\partial x}|_{x_0}$  com o acréscimo de imãs. No entanto o aumento de  $B$  aumenta ligeiramente a magnetização da esfera o que permite eventualmente suspender uma esfera a mais. O efeito é positivo, mas pequeno, pois  $B$  e/ou  $m(B)$  ( $\frac{\partial m}{\partial B} \approx 0$ ) variam pouco com o aumento do número de imãs.

**Efeito Canhão:** O aumento do número de imãs diminui significativamente o efeito canhão. Explicação:

O efeito canhão (aumento da energia cinética da esfera) é dado pelo trabalho da força magnética  $F_m$ . Na região de atuação desta força, quando  $m(B)$  passa a ser apreciável, o acréscimo de imãs diminui  $\frac{\partial B}{\partial x}|_{x_0}$  muito mais do que um eventual aumento de  $m(B)$ . O efeito é integralizado pela região de atuação de  $F_m$ .

---

Critérios de avaliação:

+1.0 atendimento completo

+0.5 atendimento parcial

---

Sucesso a todos!