

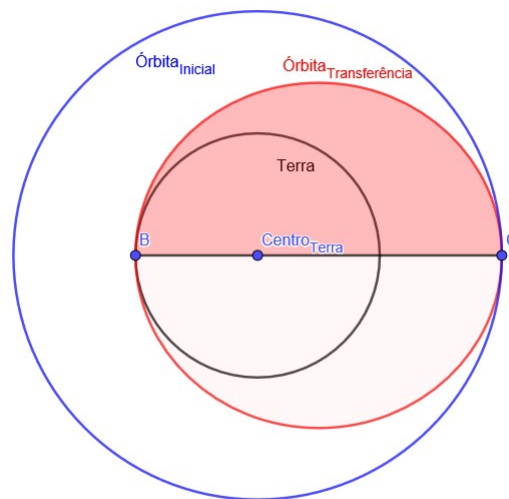
Prova Teórica 1 - Gabarito PROVISÓRIO

Treinamentos 2020

Data: 21/06/2020

1. **(A Grande Aposta - 10 pontos)** Juventino e Carrit estão, cada um em sua nave, em uma órbita circular em torno da Terra cujo raio é igual ao diâmetro do nosso planeta. Eles decidem então apostar uma corrida: quem chegar primeiro à superfície da Terra, vence. Carrit opta por uma transferência de Hohmann com perigeu na superfície do planeta. Juventino escolhe aplicar um impulso de modo que sua nave fique com velocidade nula em relação à Terra e caia em direção ao planeta. Calcule o tempo de viagem de cada um e conclua: quem venceu a corrida?

Solution: Primeiramente, calcularemos o tempo de viagem de Carrit usando a Segunda Lei de Kepler. Para tanto, ele percorre a área hachurada abaixo:



Notamos que o semi-eixo maior da órbita de transferência é $a = 3R/2$. Sendo b o semi-eixo menor da elipse e T o período, temos:

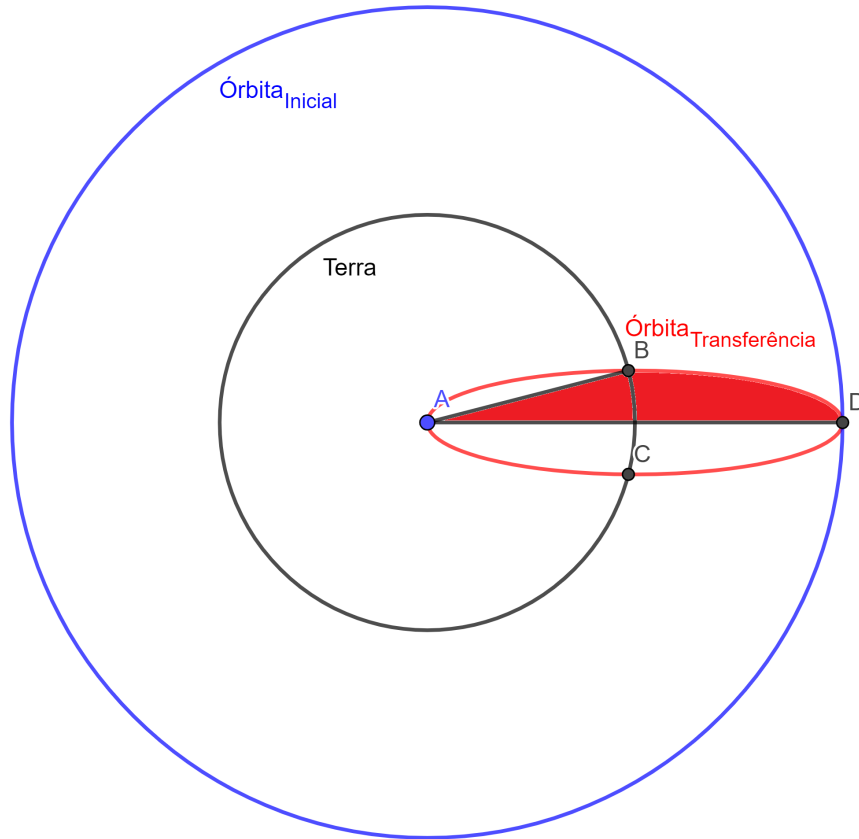
$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi ab/2}{\Delta t}$$

Ou seja, o tempo de viagem é metade do período da órbita. Da Terceira Lei de Kepler, em

que M é a massa da Terra:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \iff T = 2,60 \text{ horas}$$

No caso de Juventino, usaremos o conceito de elipse degenerada. O caminho de sua nave até a sua superfície pode ser considerado uma elipse com excentricidade tendendo a 1 (um segmento de reta pode ser interpretado como uma elipse de excentricidade tendendo a 1). Teríamos, então, uma elipse de semi-eixo maior $a = R$, como ilustra a figura.



Se a elipse é degenerada, $b \rightarrow 0$ e o arco compreendido pelos pontos B e C determina um segmento de reta. Além disso, o centro da Terra coincide com um dos focos da elipse. Assim, a área hachurada percorrida seria um quarto da elipse mais a área do triângulo retângulo.

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi ab/4 + ab/2}{\Delta t} \iff \Delta t = \frac{T(\pi + 2)}{4\pi}$$

Da Terceira Lei de Kepler, analogamente:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \iff T = 1,41 \text{ horas}$$

Temos, por fim:

$$\begin{cases} \Delta t_{Carrit} = 1,30 \text{ hora} \\ \Delta t_{Juventino} = 0,58 \text{ hora} \end{cases}$$

Juventino vence a corrida!

2. **(Temperatura de Cor Linear - 10 pontos)** O astrocurioso Nathan quer saber a temperatura de uma estrela conhecida como 3, porém precisa trabalhar um pouco com alguns dados. Ele sabe que a estrela 1 tem índice de cor intrínseco $(B - V)_{0,1} = 0,4$ mag e temperatura $T_1 = 6880$ K e a estrela 2 tem $(B - V)_{0,2} = 0,8$ mag e $T_2 = 5280$ K, respectivamente. Também, tinha que para sua estrela 3 $(B - V)_3 = 0,66$ mag e a distância era $d_3 = 314$ pc. Qual foi a temperatura encontrada por Nathan? Considere que para a posição do corpo luminoso no céu, $a_V = 1,00$ mag/kpc, $\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0$ e a relação entre o índice de cor intrínseco e a temperatura é linear para $0,4 \leq (B - V)_0 \leq 0,8$.

Solution:

Para encontrarmos a temperatura da estrela 3, precisa-se antes saber seu índice de cor intrínseco $(B - V)_{0,3}$ e o conseguimos com o excesso de cor:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0$$

$$\frac{A_{V,3}}{E_{B-V,3}} = 3,0 \Rightarrow \frac{A_{V,3}}{3} = E_{B-V,3} = (B - V)_3 - (B - V)_{0,3}$$

$$(B - V)_{0,3} = (B - V)_3 - \frac{A_{V,3}}{3}$$

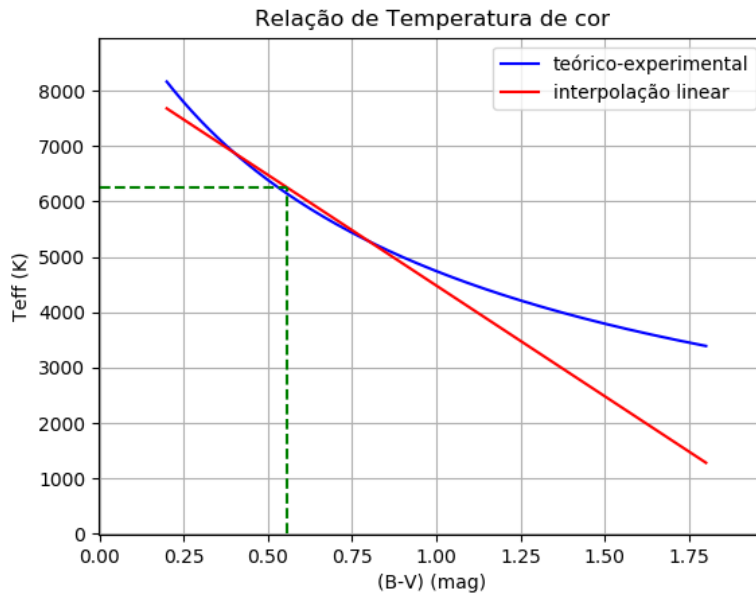
Para obter $A_{V,3}$ utilizamos a absorção por unidade de distância:

$$A_{V,3} = a_V \cdot d_3$$

Substituindo os dados do enunciado nas expressões acima ($d_3 = 314$ pc; $a_V = 1$ mag/kpc; $(B - V)_3 = 0,66$ mag):

$$(B - V)_{0,3} = 0,55533 \text{ mag}$$

Para encontrarmos a temperatura utilizamos a relação linear comentada no enunciado. O gráfico comparativo a seguir justifica a consideração da linearidade:



A relação linear descrita será:

$$\frac{T - 6880}{(B - V)_0 - 0,4} = \frac{5280 - 6880}{0,8 - 0,4} \Rightarrow T = -4000 \cdot ((B - V)_0 - 0,4) + 6880$$

Além disso, o índice de cor intrínseco da estrela 3 atende às condições impostas no enunciado para uso da expressão linear, então, usando-a encontramos:

$$T_3 = 6258,667 \text{ K}$$

$$T_3 = 6260 \text{ K}$$

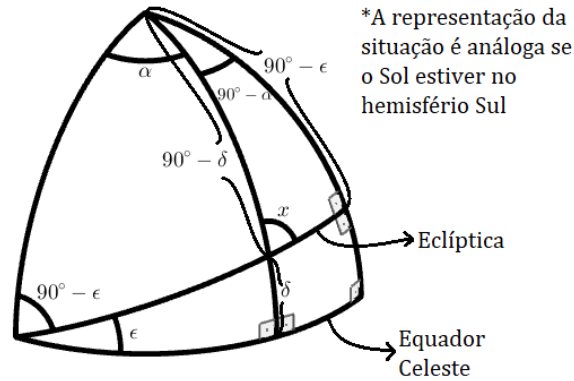
3. **(Sol Verdadeiro - 15 pontos)** Desconsiderando a excentricidade da órbita da Terra, calcule os valores de declinação do Sol verdadeiro nos quais a velocidade angular em ascensão reta do Sol verdadeiro é igual à velocidade angular em ascensão reta do Sol médio. Quantas vezes essas velocidades igualam-se ao longo de um ano trópico?

A velocidade angular em ascensão reta instantânea é definida como a taxa de variação da ascensão reta em relação ao tempo.

Solution:

Primeiramente, é necessário desenhar a seguinte figura:

- $\delta \rightarrow$ Declinação do Sol
- $\alpha \rightarrow$ Ascensão reta do Sol
- $\epsilon \rightarrow$ Obliquidade da Eclíptica
- $\omega \rightarrow$ Velocidade angular total do Sol (verdadeiro ou médio)
- $\omega_\alpha \rightarrow$ Velocidade angular do Sol verdadeiro em ascensão reta



Utilizando a lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(90^\circ - \epsilon)} = \frac{\text{sen}(90^\circ)}{\text{sen}(90^\circ - \delta)}$$

$$\text{sen}(x) = \frac{\text{cos}(\epsilon)}{\text{cos}(\delta)}$$

É possível decompor a velocidade angular do Sol verdadeiro em dois componentes utilizando o ângulo x . Um desses componentes é a velocidade angular em declinação. Já o outro componente deve ser dividido pelo cosseno da declinação para obter a velocidade angular em ascensão reta. Portanto:

$$\omega_\alpha = \frac{\omega * \text{sen}(x)}{\text{cos}(\delta)}$$

Substituindo a expressão para o seno de x nessa fórmula:

$$\omega_\alpha = \frac{\omega * \text{cos}(\epsilon)}{\text{cos}^2(\delta)}$$

Considerando que nos pontos em questão a velocidade angular em ascensão reta do Sol verdadeiro é igual à velocidade angular do Sol médio, que é igual à velocidade angular total:

$$\omega_\alpha = \frac{\omega * \text{cos}(\epsilon)}{\text{cos}^2(\delta)}$$

$$\omega = \frac{\omega * \text{cos}(\epsilon)}{\text{cos}^2(\delta)}$$

$$\text{cos}^2(\delta) = \text{cos}(\epsilon)$$

$$\text{cos}(\delta) = \pm \sqrt{\text{cos}(\epsilon)}$$

Como $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$, apenas a raiz positiva é relevante nesse caso:

$$\cos(\delta) = \sqrt{\cos(23^\circ 27')}$$

$$\delta = \arccos(0,9578)$$

$$\delta = \pm 16,70^\circ$$

Dessa forma, a velocidade angular do Sol verdadeiro em ascensão reta é igual à do Sol médio quatro vezes ao longo do ano. Em duas delas a declinação do Sol verdadeiro é igual a $16,70^\circ$ e nas outras duas, a $-16,70^\circ$.

4. **(Lugar Geométrico - 15 pontos)** Um fato curioso é que é uma esfera o lugar geométrico dos pontos onde a força gravitacional da Terra tem mesmo módulo que a força gravitacional do Sol. Encontre o raio e o centro dessa esfera. Para tal, considere o seguinte sistema de referência em coordenadas retangulares:

- a origem dos eixos se encontra no centro da Terra;
- as coordenadas do centro do Sol são constantes e igual a $(a, 0, 0)$, em que a é igual à distância Terra-Sol;
- o eixo y aponta para o polo norte eclíptico e o eixo z aponta para o mesmo sentido de movimento da Terra ao redor do Sol.

Suas respostas devem ser algébricas e devem ficar em função de a , M_\odot (massa do Sol) e M_\oplus (massa da Terra). Despreze a atração gravitacional de outros corpos do Sistema Solar.

Solution:

Do enunciado, temos que o lugar geométrico satisfaz:

$$F_{Sol} = F_{Terra} \rightarrow \frac{GM_\odot}{d_\odot^2} = \frac{GM_\oplus}{d_\oplus^2}$$

Considerando um ponto (x, y, z) genérico no espaço, podemos encontrar o quadrado da distância desse ponto ao Sol e à Terra:

- Distância à Terra:

$$d_\oplus^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- Distância ao Sol:

$$d_\odot^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2$$

Substituindo na primeira equação, podemos escrever:

$$\frac{GM_\odot}{(x - a)^2 + y^2 + z^2} = \frac{GM_\oplus}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Com termos quadráticos, é perceptível que a equação acima é uma esfera. Agora, basta organizarmos os termos para descobrirmos tal lugar geométrico:

$$GM_\odot \cdot x^2 + GM_\odot \cdot y^2 + GM_\odot \cdot z^2 = GM_\oplus \cdot (x^2 - 2ax + a^2) + GM_\oplus \cdot y^2 + GM_\oplus \cdot z^2 \Leftrightarrow (GM_\odot - GM_\oplus) \cdot x^2 + 2GM_\oplus a \cdot x + (GM_\odot - GM_\oplus) \cdot y^2 + (GM_\odot - GM_\oplus) \cdot z^2 = GM_\oplus a^2$$

Dividindo a expressão por $(GM_{\odot} - GM_{\oplus})$, encontramos:

$$x^2 + \frac{2M_{\oplus}a}{M_{\odot} - M_{\oplus}} \cdot x + y^2 + z^2 = \frac{M_{\oplus}a^2}{M_{\odot} - M_{\oplus}}$$

Agora, completaremos quadrado para encontrar a equação da esfera:

$$x^2 + \frac{2M_{\oplus}a}{M_{\odot} - M_{\oplus}} \cdot x + \left(\frac{M_{\oplus}a}{M_{\odot} - M_{\oplus}}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{M_{\oplus}a^2}{M_{\odot} - M_{\oplus}} + \left(\frac{M_{\oplus}a}{M_{\odot} - M_{\oplus}}\right)^2$$

Portanto, teremos a seguinte equação:

$$\left(x + \frac{M_{\oplus}a}{M_{\odot} - M_{\oplus}}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{a}{M_{\odot} - M_{\oplus}} \sqrt{M_{\odot}M_{\oplus}}\right)^2$$

Por fim, teremos uma esfera com as seguintes características:

- **Centro:** $\left(\left(\frac{-M_{\oplus}a}{M_{\odot} - M_{\oplus}}\right), 0, 0\right)$
- **Raio:** $a \cdot \sqrt{\frac{M_{\oplus}M_{\odot}}{(M_{\odot} - M_{\oplus})^2}}$

5. **(Duas Estrelas - 20 pontos)** Considere um sistema binário composto pelas estrelas A e B. Para um observador na Terra, as magnitudes aparentes delas no filtro V são: $V_A = 6,45$ e $V_B = 7,21$. Considere que a estrela mais brilhante é uma estrela semelhante ao Sol. Além disso, assuma que a extinção interestelar equivale a $a_V = 1,00$ mag/kpc e que a profundidade óptica da atmosfera da Terra, no comprimento de onda do filtro V, é de $\tau = 0,480$. Caso necessário, considere que a correção bolométrica do Sol é nula.

- (a) **(6 pontos)** Calcule qual seria a magnitude aparente da estrela mais brilhante desconsiderando apenas a extinção atmosférica.
- (b) **(7 pontos)** Calcule qual seria a magnitude aparente da estrela mais brilhante desconsiderando a extinção atmosférica e a extinção interestelar.
- (c) **(3 pontos)** Calcule a distância do sistema binário à Terra.
- (d) **(4 pontos)** Calcule a magnitude absoluta da estrela menos brilhante

Solution:

- (a) É possível utilizar a Lei de Pogson para comparar a magnitude fora da atmosfera (V'_A) com a magnitude para um observador na superfície da Terra:

$$V_A - V'_A = 2,5 \cdot \log\left(\frac{F'_1}{F_1}\right)$$

$$V_A - V'_A = 2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1 \cdot e^{\tau}}{F_1}\right)$$

$$V'_A = V_A - 2,5 \cdot \tau \cdot \log(e)$$

$$V'_A = 6,45 - 2,5 \cdot 0,480 \cdot \log(e)$$

$$V'_A = 5,93$$

- (b) É possível utilizar a Lei de Pogson novamente para comparar a magnitude absoluta da estrela, que é igual à magnitude absoluta do Sol, com a magnitude calculada no item anterior. É importante levar a extinção interestelar em consideração:

$$V'_A - M_{\odot} = 5 \cdot \log(d) - 5 + a_V \cdot d$$

$$5 \cdot \log(d) - a_V \cdot d = V'_A - M_{\odot} + 5$$

$$5 \cdot \log(d) - 1,00 \cdot 10^{-3} \cdot d = 5,93 - 4,80 + 5$$

$$5 \cdot \log(d) - 1,00 \cdot 10^{-3} \cdot d = 6,13$$

Por tentativa e erro, é possível obter o valor da distância:

$$d = 16,7pc$$

Agora, é possível calcular a magnitude aparente da estrela desconsiderando tanto a extinção atmosférica quanto à extinção interestelar (V''_A):

$$V''_A = V'_A - a_V \cdot d$$

$$V''_A = 5,93 - 1,00 \cdot 10^{-3} \cdot 16,7$$

$$V''_A = 5,91$$

- (c) A distância já foi calculada no item anterior.

$$d = 16,7pc$$

- (d) A diferença entre as magnitudes aparentes é igual à diferença entre as magnitudes absolutas. Dessa forma, a magnitude absoluta da estrela B no filtro V (M_B) é a seguinte:

$$7,21 - 6,45 = M_B - 4,80$$

$$M_B = 5,56$$

6. **(Telescópios - 20 pontos)** Bruno, Katarine, Lais, Nathan e Shell observaram astros em uma certa noite, cada um com um telescópio. Cada astro só era possível de ser observado por um telescópio que tinha todos os parâmetros necessários para fazer a observação, ou seja, o telescópio de Bruno não poderia observar o astro que estava sendo observado por Shell, assim como o telescópio de Shell não poderia observar o astro que estava sendo observado por Bruno, nem por nenhum dos demais amigos.

(a) **(12 pontos)** A tabela a seguir apresenta dados de cada telescópio. Faça os cálculos necessários e complete a tabela.

Todos os telescópios eram equipados por um CCD de matriz quadrada, de 1024x1024 pixels, com 20mm de lado

Observador	D(mm)	F(mm)	λ (nm)	θ_R (")	θ_p (")	m_{lim}
Bruno	200	1000	700	0,88		
Katarine		1500	630	0,79	2,69	13,6
Lais	500	1300		0,28	3,10	15,6
Nathan	500		450	0,23	2,37	15,6
Shell	800	2000	400		2,01	16,6

Sendo D o diâmetro do telescópio, F a distância focal, λ o comprimento de onda observado, θ_R o poder de resolução, θ_p a escala de placa e m_{lim} a magnitude limite do telescópio

(b) **(8 pontos)** A tabela a seguir traz informações sobre três astros. Faça os cálculos necessários e indique quais foram as três pessoas que observaram esses astros (associe cada uma das três pessoas a um dos astros).

Astro	Descrição
1	Grupo com 30 estrelas, sendo que cada uma delas possui magnitude aparente igual a 18 e ocupa uma região no céu de 45'. Considere todas as estrelas iguais.
2	Sistema binário eclipsante, no qual a separação angular das estrelas é de 0,25" e a magnitude aparente do sistema é igual a 16
3	Estrela dupla, na qual a separação angular entre elas é de 1.3" e essa distância corresponde a $9,5 \cdot 10^{-3} mm$ no sensor da câmera CCD .

Leve em consideração que um telescópio seria considerado apropriado para realizar a observação de um astro se o astro pudesse ser completamente visto no campo angular da matriz e se sua magnitude aparente não ultrapassasse a magnitude limite do telescópio.

Solution:

(a) Dados faltantes do telescópio utilizado por Bruno:

Cálculo da escala de placa: O tamanho do lado de um pixel (L_p) é dado dividindo o tamanho do lado da matriz CCD pela quantidade de pixels naquele lado, ou seja,

$$L_p = \frac{20mm}{1024pixels} = 0,02mm$$

$$\theta_{pBruno} = \frac{L_p}{F_{Bruno}} = \frac{0,02}{1000} = 2,0 \cdot 10^{-5} rad = 4,13'' \Rightarrow \boxed{\theta_{pBruno} = 4,13''} \quad (1)$$

Cálculo da magnitude limite do telescópio:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \cdot \log \left(\frac{D_{olho}}{D_{Bruno}} \right) \Rightarrow m_{lim} = 2,1 + 5 \cdot \log (D_{Bruno}) = 13,6 \quad (2)$$

$$m_{lim} = 13,6 \quad (3)$$

Foram utilizados os dados da magnitude limite do olho humano ($m_{olho} = 6$) e do diâmetro da pupila humana ($D_{olho} = 6mm$), fornecidos na tabela de constantes

Dado faltante do telescópio utilizado por Katarine:

Para o cálculo do diâmetro do telescópio ($D_{Katarine}$), utilizaremos o poder de resolução. É importante ressaltar que o diâmetro sairá na unidade que for inserido o comprimento de onda e que o poder de resolução deve ser colocado em radianos.

$$\begin{aligned} \theta_{R_{Katarine}} &= 1,22 \cdot \frac{\lambda_{Katarine}}{D_{Katarine}} \\ \Rightarrow D_{Katarine} &= \frac{1,22 \cdot \lambda_{Katarine}}{\theta_{R_{Katarine}}} = \frac{1,22 \cdot 630 \cdot 10^{-6}}{3,83 \cdot 10^{-6}} = 200mm \\ &\Rightarrow \boxed{D_{Katarine} = 200mm} \end{aligned}$$

Dado faltante do telescópio utilizado por Lais:

Para calcular o comprimento de onda observado (λ_{Lais}), utilizaremos novamente a expressão para o poder de resolução do telescópio

$$\begin{aligned} \theta_{R_{Lais}} &= 1,22 \cdot \frac{\lambda_{Lais}}{D_{Lais}} \\ \Rightarrow \lambda_{Lais} &= \frac{\theta_{p_{Lais}} \cdot D_{Lais}}{1,22} = \frac{1,36 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 10^{-3}}{1,22} = 5,57 \cdot 10^{-7}m = 557nm \\ &\boxed{\lambda_{Lais} = 557nm} \quad (4) \end{aligned}$$

Note que $\theta_{p_{Lais}} = 0,28'' = 1,36 \cdot 10^{-6}rad$

Dado faltante do telescópio utilizado por Nathan:

Para calcular a distância focal do telescópio (D_{Nathan}), utilizaremos a escala de placa ($\theta_{p_{Nathan}}$). Note que $L_p = 0,02mm$ já foi calculado anteriormente e que $\theta_{p_{Nathan}} = 2,37'' = 1,15 \cdot 10^{-5}rad$

$$\theta_{p_{Nathan}} = \frac{L_p}{F_{Nathan}} \Rightarrow F_{Nathan} = \frac{L_p}{\theta_{p_{Nathan}}} = \frac{0,02}{1,15 \cdot 10^{-5}} = 1740mm \quad (5)$$

$$\boxed{F_{Nathan} = 1740mm} \quad (6)$$

Dado faltante do telescópio utilizado por Shell:

$$\theta_{R_{Shell}} = 1,22 \cdot \frac{\lambda_{Shell}}{D_{Shell}} = 1,22 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-9}}{800 \cdot 10^{-3}} = 6,1 \cdot 10^{-7}rad = 0,13'' \Rightarrow \boxed{\theta_{R_{Shell}} = 0,13''} \quad (7)$$

(b) Astro 1:

Sabemos que F_{total} será a soma dos fluxos de todas as estrelas do aglomerado, portanto $F_{total} = 30 \cdot F_{individual}$

$$\begin{aligned} m_{individual} - m_{total} &= -2,5 \log \left(\frac{F_{individual}}{F_{total}} \right) = \\ &= -2,5 \log \left(\frac{F_{individual}}{30 \cdot F_{individual}} \right) = -2,5 \cdot \log \left(\frac{1}{30} \right) = 3,69 \end{aligned}$$

Substituindo os valores

$$m_{individual} - m_{total} = 3,69 \Rightarrow m_{total} = m_{individual} - 3,69 = 14,3 \quad (8)$$

Com esse resultado, podemos excluir como opções os telescópios do Bruno e da Katerine, pois estes possuem magnitude limite de 13,6, sobrando então os telescópios da Lais, do Nathan e do Shell. Para verificar qual deles fez a observação desse aglomerado, iremos utilizar a segunda informação do enunciado, que diz que ocupa uma região do céu de 45', portanto, o campo angular da CCD deve ser maior ou igual a 45'. O campo da CCD é calculado como sendo $C = \theta_p \cdot n$, sendo n o número de pixels em um lado.

Telescópio Lais: $C = 3,10 \cdot 1024 = 286,7'' = 53'$. Esse campo é maior do que o tamanho angular do aglomerado, portanto é possível de ser observado nesse telescópio. Observe que a escala de placa dos telescópios de Nathan e de Shell são menores do que de Lais, conseqüentemente o campo da CCD será menor e resultará em um valor menor do que o campo do aglomerado.

Portanto, o Astro 1 foi observado por Lais

Astro 2:

O enunciado diz que o sistema binário possui magnitude aparente igual a 16. O único telescópio capaz de fazer essa observação era o telescópio de Shell porque os demais possui magnitude limite menor do que a magnitude do astro.

Portanto, o Astro 2 foi observado por Shell

Astro 3:

Pelo tamanho da imagem na CCD, podemos encontrar a distância focal do telescópio pela relação:

$$(\text{tamanho angular do objeto}) \cdot (\text{distância focal}) = \text{tamanho da imagem na CCD}$$

Sabendo que $1,3'' = 6,30 \cdot 10^{-6} \text{rad}$, temos que

$$6,30 \cdot 10^{-6} \cdot F = 9,5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow F \approx 1500 \text{mm} \quad (9)$$

Retornando para a tabela com os dados dos telescópios, vemos que apenas um dos telescópios possui essa distância focal, que é o telescópio de Katarine

Portanto, o Astro 3 foi observado por Katarine

7. **(Latitude da Torre - 30 pontos)** A imagem abaixo é uma fotografia via satélite feita de uma torre no Hemisfério Norte. Sabe-se que a imagem foi tirada no dia 08 de outubro de 2019 às 10h 18min no horário solar local (desconsidere fuso-horários). A altura da torre é de 150 m (sem se levar em consideração a antena no topo). Sabendo que a linha rosa possui 25 m na escala da figura, e que a razão entre o tamanho da linha vermelha (sombra da torre) e o da amarela é

de 8,52, calcule:



- (a) **(10 pontos)** A declinação do Sol no dia em que a imagem foi retirada. Considere que o Equinócio de Outono se deu no dia 23 de setembro e que o Sol se move com velocidade angular constante no decorrer da Eclíptica.
- (b) **(20 pontos)** A latitude do local da torre.

Solution:

- (a) Ângulo percorrido pelo Sol na eclíptica:

$$\theta = \frac{360}{365,24} \cdot 15 \text{ dias} = 14,78^\circ$$

Portanto, pela lei dos senos para triângulos esféricos:

$$\frac{\sin(\delta_\odot)}{\sin(\epsilon)} = \frac{\sin(\theta)}{\sin(90^\circ)}$$

$$\sin(\delta_\odot) = \sin(\epsilon) \cdot \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\delta_\odot) = \sin(23,45^\circ) \cdot \sin(14,78^\circ)$$

$$\delta_\odot = -5,8^\circ$$

(b) Primeiro, vamos calcular a distância zenital do Sol:

Fazendo as devidas conversões de escala para encontrarmos o tamanho da sombra:

$$8,52 = \frac{h_{sombra}}{25} \rightarrow h_{sombra} = 213 \text{ m}$$

Agora, podemos calcular a altura e a distância zenital do Sol no momento da imagem:

$$h_{\odot} = \arctan\left(\frac{150}{213}\right) \rightarrow h_{\odot} = 35,15^{\circ} \text{ e } z_{\odot} = 54,85^{\circ}$$

Agora calcularemos o Ângulo Horário do Sol no momento da fotografia:

$$H_{\odot} = 10 \text{ h } 18 \text{ min} - 12 \text{ h} = -1 \text{ h } 42 \text{ min} = -25,5^{\circ}$$

Portanto, com a Lei dos Cossenos:

$$\begin{aligned} \cos(z_{\odot}) &= \sin(90 - \delta_{\odot}) \cdot \sin(90 - \phi) \cdot \cos(H_{\odot}) + \cos(90 - \delta_{\odot}) \cdot \cos(90 - \phi) \\ \cos(54,85) &= \cos(\phi) \cdot \sin(95,83) \cdot \cos(25,5) + \sin(\phi) \cdot \cos(95,83) \\ [\cos(54,85) - \sin(\phi) \cdot \cos(95,83)]^2 &= [1 - \sin^2(\phi)] \cdot \sin^2(95,83) \cdot \cos^2(25,5) \end{aligned}$$

Fazendo $x = \sin(\phi)$ e expandindo a equação, encontramos:

$$0,8166x^2 + 0,1170x - 0,4748 = 0 \rightarrow x = 0,6942 \text{ ou } x = -0,8375$$

Como o local se encontra no Hemisfério Norte, $\sin(\phi) > 0$. Logo, $\sin(\phi) = 0,6942$.

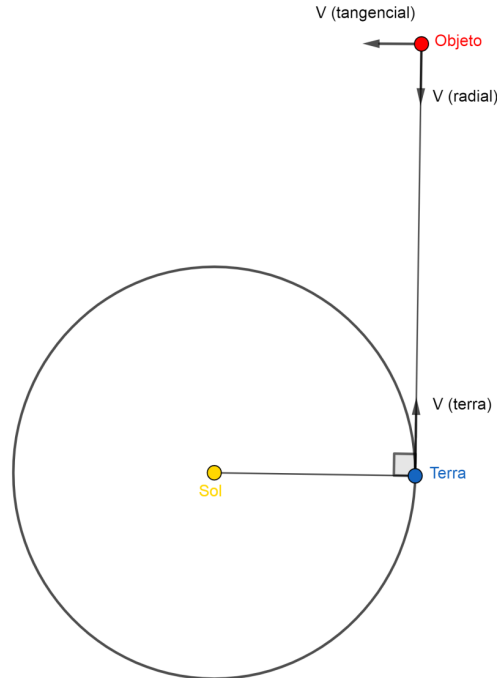
Desse modo, teremos que:

$$\boxed{\phi \approx +44^{\circ}}$$

OBS:

- O item (b) seria mais imediato com o uso de outras ferramentas da Trigonometria Esférica tais como a fórmula do seno-cosseno ou fórmulas de Bessel, por exemplo.

8. **(Corpo Luminoso - 30 pontos)** Um estranho corpo luminoso foi detectado no céu noturno terrestre! Foi descoberto que este estava a uma distância de $2,40 \text{ UA}$ da Terra e que sua trajetória pertencia ao plano da Eclíptica. Soube-se, também, que havia um blueshift de $0,0650 \text{ nm}$ do corpo quando se observava sua emissão em um comprimento de onda de laboratório igual a 524 nm . Sabendo que, no momento da observação, o movimento aparente do corpo no céu terrestre era de $35,0 \text{ ''/hora}$ e que a distância angular entre o corpo e o Sol (visto da Terra) era de $90,0^{\circ}$, calcule:



- (a) **(5 pontos)** A velocidade do corpo no referencial do Sol em km/s no momento da observação. Considere, para fins de aproximação, que o corpo se encontrava no zênite do observador.
- (b) **(10 pontos)** A distância periélica do corpo em UA . Qual o formato da órbita? Desconsidere a atração gravitacional de qualquer planeta sobre o corpo.
- (c) **(15 pontos)** O intervalo de tempo decorrido (em *anos*) para o corpo ir da posição em que estava quando foi observado até a posição de seu periélio. Explique qualquer aproximação utilizada.

Solution:

- (a) Pelo Efeito Doppler, podemos escrever:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{-0,0650}{524} = \frac{-(V_{Terra} + V_{radial})}{c}$$

$$V_{Terra} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}}$$

Como o objeto está no zênite do observador, a velocidade de rotação da Terra não é importante para o cálculo da velocidade radial do corpo.

Substituindo V_{Terra} na equação do efeito Doppler, obtemos: $V_{radial} = 7,40 \text{ km/s}$

Para a velocidade tangencial, teremos que:

$$V_{tangencial} = \frac{d\theta}{dt} \cdot r$$

Temos que r é a distância do objeto à Terra e $\frac{d\theta}{dt}$ é o movimento próprio do corpo como visto da Terra. Fazendo as devidas conversões, obtemos: $V_{tangencial} = 16,9 \text{ km/s}$

Com isso, podemos obter a velocidade do corpo em relação ao Sol:

$$V = \sqrt{V_{radial}^2 + V_{tangencial}^2} = 18,5 \text{ km/s}$$

(b) Distância do corpo ao Sol:

$$d^2 = 1,00^2 + 2,40^2 \rightarrow d = 2,60 \text{ UA}$$

Equacionando a energia do sistema, temos:

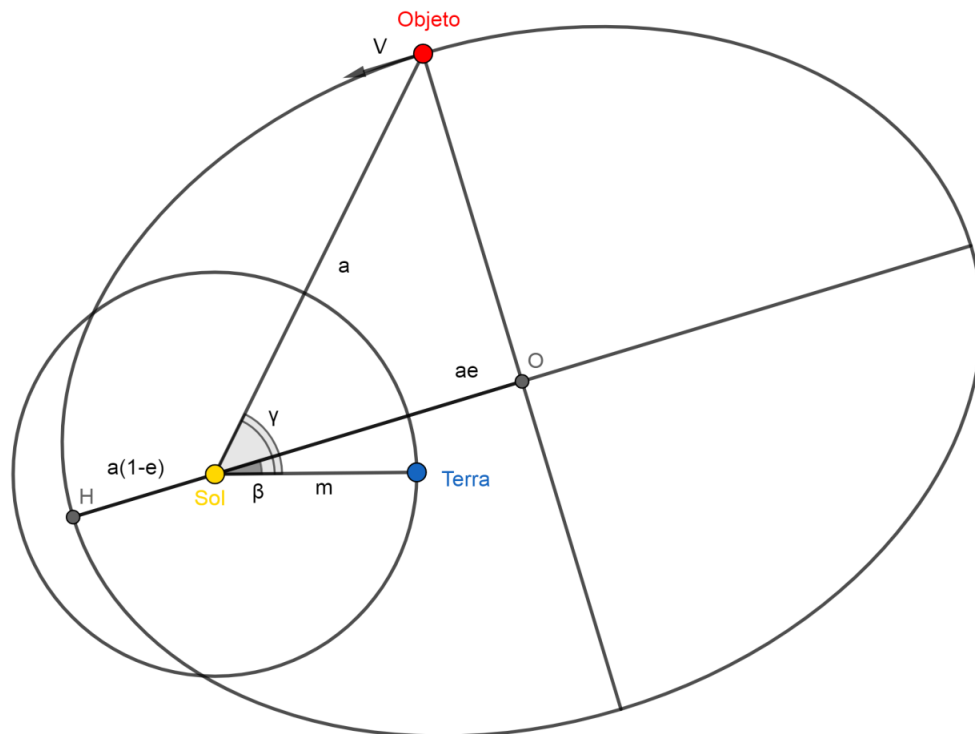
$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{d} < 0$$

Logo, a órbita é **ELÍPTICA**

Desse modo, podemos igualar a soma da energia cinética e potencial com a energia total da órbita:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{d} = \frac{-GM}{2a} \rightarrow a = 3,89 \times 10^{11} \text{ m} \approx 2,60 \text{ UA}$$

Perceba que $d \approx a$. Portanto, podemos montar a seguinte figura:



Perceba que:

$$\tan \beta = \frac{V_{radial}}{V_{tangencial}} = \frac{7,40}{16,9} \rightarrow \beta = 23,6^\circ$$

$$\tan \gamma = \frac{2,4}{1,0} \rightarrow \gamma = 67,4^\circ$$

Assim, a partir da figura, podemos escrever:

$$\cos(\gamma - \beta) = e \rightarrow e = \cos(43,8) \rightarrow e = 0,722$$

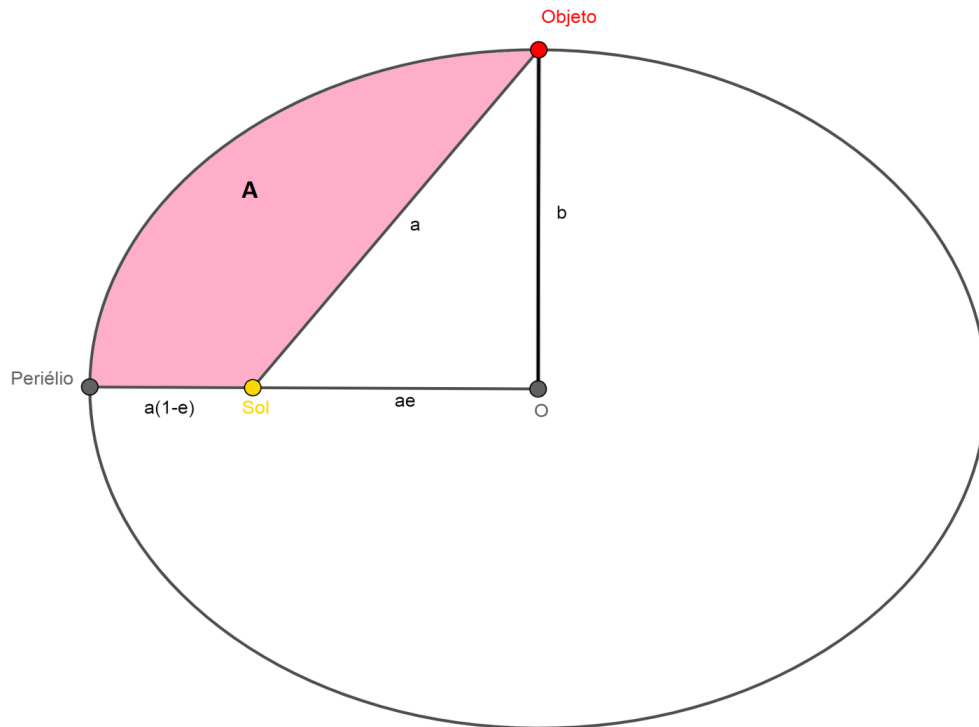
Desse modo, a menor distância será:

$$d_{perielio} = a(1 - e) = 0,723 \text{ UA}$$

(c) Pela Terceira Lei de Kepler, podemos encontrar o período da órbita do objeto:

$$\frac{a^3 \text{ (em UA)}}{T^2 \text{ (em anos)}} = 1 \rightarrow T = 4,19 \text{ anos}$$

Da Lei das Áreas (ou Segunda Lei de Kepler):



$$\frac{A}{A_{elipse}} = \frac{t}{T}$$

Portanto, teremos:

$$A_{elipse} = \pi ab \text{ e } A = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ae \cdot b}{2} \text{ sendo que } b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Desse modo, podemos escrever:

$$t = \frac{\frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{4} - \frac{a^2 e \sqrt{1-e^2}}{2}}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot T = \frac{\pi - 2e}{4\pi} \cdot T$$

Substituindo os valores, encontramos:

$$t = 0,566 \text{ anos}$$

9. **(Juventauro - 70 pontos)** Juvelino é um amante da astrofotografia que passa noites a fio observando o céu. Ele possui um telescópio refletor de diâmetro 40 cm e razão focal $f/9,0$. No jornal astronômico, saiu a notícia que um novo cometa foi descoberto, o qual foi apelidado de Juventauro pelo astrônomo amador. Juventauro possui uma órbita elíptica, praticamente no plano da eclíptica, com *latus rectum* $l = 2,48 \text{ UA}$ e excentricidade $e = 0,71$. Ele também se move no mesmo sentido de translação da Terra. Considere que esse cometa possui albedo 1 e é um corpo esférico.

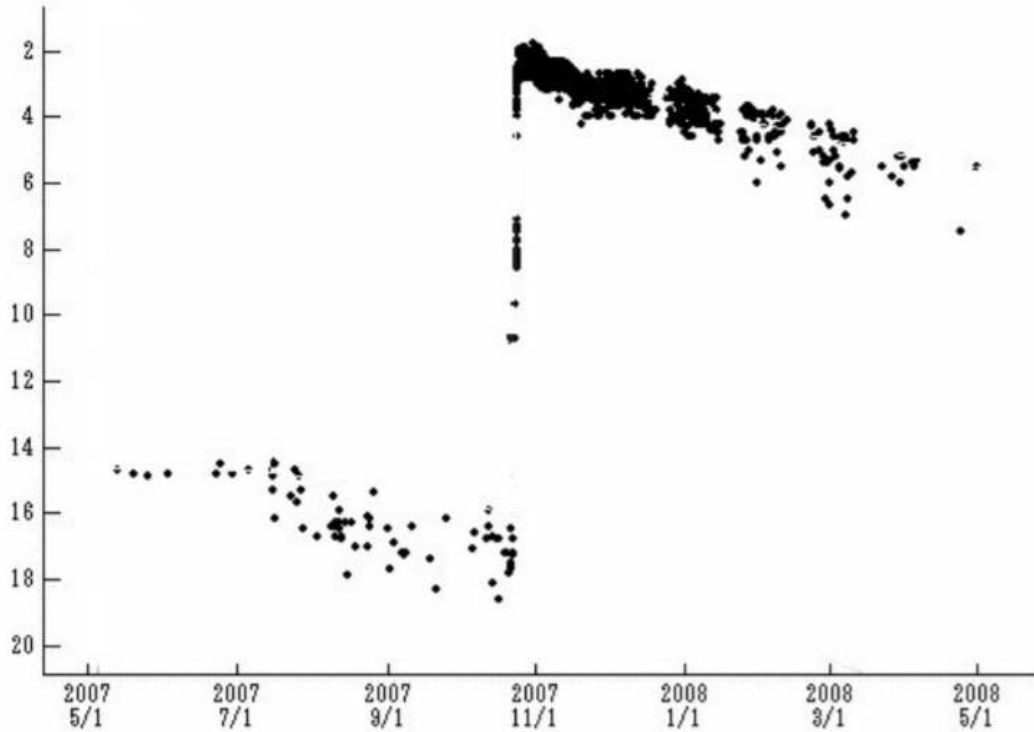
- (a) **(15 pontos)** Quando o cometa se encontra na sua configuração de menor distância possível em relação à Terra, sua magnitude tem valor 7 mag. Sendo assim, calcule a menor magnitude possível do cometa quando o mesmo se encontra no afélio, por favor.
- (b) **(7 pontos)** É possível que Juvelino consiga ver Juventauro quando ele se encontra no afélio? Justifique.

Para conseguir identificar melhor o cometa, Juvelino instalou uma câmera CCD de $2048 \times 2048 \text{ pixels}$, sendo cada pixel um quadrado de lado $9 \mu\text{m}$. O tempo mínimo de detecção da câmera é de 250 s para um objeto com magnitude 19 mag no filtro V.

- (c) **(8 pontos)** O astrônomo conseguiu calibrar perfeitamente o sistema para que o telescópio acompanhe Juventauro no afélio. Na configuração do *item a*, qual o tempo mínimo de exposição necessário para que Juvelino identifique o cometa?
- (d) **(8 pontos)** Na verdade, Juvelino percebeu que o objeto demorou mais do que esperado para ser identificado pelo CCD. Foram exatos 300 s de exposição. Ele já conhecia o tempo teoricamente ideal (calculado no *item c*), porém não sabia o valor da profundidade óptica da atmosfera. Sabendo que o Juventauro se encontra no zênite, ajude-o e calcule esse valor.

Subitamente, quando o cometa se encontra no afélio, sofre uma explosão isotrópica, formando uma grande nuvem de partículas que reflete toda a radiação incidente. O gráfico abaixo foi feito por Juvelino e identifica a mudança de magnitude do cometa, em detrimento da explosão, em função do tempo. Ele já possui correção de extinção atmosférica.

Magnitude do cometa Juventauro em função do tempo



- (e) **(16 pontos)** Sabendo que, no momento da explosão, Juventauro se encontra em oposição, estime a densidade de partículas no dia 1/11/2007. O diâmetro angular da nuvem é $1,83''$. Considere que, nesse caso, a magnitude é proporcional à área de reflexão, a densidade é pequena o suficiente para que as partículas não se sobreponham, e a distribuição de partículas na nuvem é isotrópica.

Aconteceu algo bem interessante. Algumas partículas, após a explosão, ficaram estáticas em relação ao Sol. Para o item posterior, assuma que a radiação é totalmente absorvida por essas partículas estáticas, que elas são esféricas e possuem densidade $\rho = 5,75 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$ e que o Sol emite monocromaticamente em $\lambda = 500 \text{ nm}$. Despreze a atração gravitacional da própria nuvem e de planetas.

- (f) **(16 pontos)** Calcule o diâmetro delas. Se esse diâmetro fosse duplicado, o que aconteceria?

Solution:

(a) Vamos achar os principais elementos da órbita usando a equação polar da elipse. No *latus rectum*:

$$l = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(90^\circ)} \rightarrow a = 5 \text{ UA} \rightarrow r_p = 1,45 \text{ UA} \rightarrow r_a = 8,55 \text{ UA}$$

O fluxo recebido pelo observador proveniente do cometa é proporcional a:

$$F \sim \frac{\sigma}{d_{\odot-\text{cometa}}^2 d_{\oplus-\text{cometa}}^2}$$

Onde σ é a área de seção transversal do cometa, $d_{\odot-cometa}$ a distância do sol ao cometa, e $d_{\oplus-cometa}$ a distância do observador ao cometa. Portanto, utilizando a fórmula de Pogson, temos:

$$m_{min} - 7 = -2,5 \log \frac{(r_p - 1)^2 r_p^2}{(r_a - 1)^2 r_a^2} \rightarrow \boxed{m_{min} = 17,0}$$

(b) Como o diâmetro da lente objetiva do telescópio é maior que o diâmetro da pupila, a magnitude limite observada pelo telescópio é maior que a magnitude limite observada pelo olho humano, que tem valor 6. Então:

$$m_{lim} - 6 = 2,5 \log \frac{D_{objetiva}^2}{D_{pupila}^2} \rightarrow \boxed{m_{lim} = 15,1}$$

Portanto, como $m_{lim} < m_{min}$, Juvelino não consegue observar Juventauro nessas condições.

(c) Para o objeto ser identificado pelo CCD, é necessário que uma energia mínima chegue ao pixel. Essa energia é proporcional a:

$$Energia \sim F t$$

Onde F é o fluxo recebido pelo objeto e t é o tempo de exposição. Daí, como na configuração do item a a magnitude é 17:

- Utilizando Pogson:

$$17 - 19 = -2,5 \log \frac{F_{17}}{F_{19}} \rightarrow \frac{F_{17}}{F_{19}} = 6,31$$

- Utilizando a proporção:

$$F_{17} t_{min} = F_{19} 300 s \rightarrow \boxed{t_{min} = 39,6 s}$$

(d) Utilizando a mesma proporção do item anterior e chamando τ de profundidade óptica, temos:

$$\frac{F_{recebido}}{F_{17}} = \frac{39,6 s}{300 s} = e^{-\tau} \rightarrow \boxed{\tau = 2,02}$$

(e) Para esse item, vamos assumir que o cometa, quando explodiu, foi dividido em N partículas de mesmo tamanho. Sendo r o raio de cada partícula e R o raio do cometa antes da explosão, temos que, por conservação de massa:

$$\frac{4 \pi r^3 N}{3} = \frac{4 \pi R^3}{3} \rightarrow \frac{r}{R} = N^{-1/3}$$

Pelo gráfico, depreende-se que a magnitude após a explosão é aproximadamente 2. Portanto, utilizando a mesma relação de proporção do item a para relacionar a área total refletora e a área do cometa, temos:

$$2 - 17 = -2,5 \log \frac{N\pi r^2}{\pi R^2} \rightarrow \frac{N\pi r^2}{\pi R^2} = 10^6 \rightarrow N^{1/3} = 10^6 \rightarrow N = 10^{18}$$

Ou seja, o cometa foi dividido em 10^{18} partículas. Como o diâmetro angular da nuvem é de $1,83''$, o raio da nuvem é:

$$R_{nuvem} = \sin \frac{1,83''}{2} 7,55 \text{ UA} \rightarrow R_{nuvem} = 5,01 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Por fim, a densidade de partículas é:

$$n = \frac{N}{\frac{4\pi R_{nuvem}^3}{3}} \rightarrow n = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{partículas}}{\text{m}^3}$$

(f) Nesse item, vamos equilibrar a força exercida pelos fótons que são absorvidos pela partícula e a força gravitacional exercida pelo Sol.

- Força gravitacional:

$$F_{grav} = \frac{GM_{\odot} \rho \frac{4\pi r^3}{3}}{d^2}$$

- Força exercida pela radiação:

$$F_{rad} = \frac{dN_{fóton}}{dt} p_{fóton}$$

Precisamos então calcular $\frac{dN_{fóton}}{dt}$, que é o número de fótons que colidem com a partícula por tempo, e $p_{fóton}$, que é o momento de cada fóton. Como foi considerado que o Sol é monocromático:

$$\frac{dN_{fóton}}{dt} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \frac{\pi r^2}{E_{fóton}} \rightarrow F_{rad} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \frac{\pi r^2}{E_{fóton}} p_{fóton} = \frac{L_{\odot} r^2}{4d^2 c}$$

Fazendo a igualdade:

$$F_{grav} = F_{rad} \rightarrow r = \frac{L_{\odot}}{4c} \frac{3}{4\pi \rho G M_{\odot}} = 9,98 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ou seja, a partícula tem diâmetro de aproximadamente $2 \mu\text{m}$. Com o dobro do diâmetro, como a força gravitacional é proporcional a r^3 e a força de radiação é proporcional a r^2 , a força gravitacional fica superior e, conseqüentemente, a partícula caminha em direção ao Sol.

10. **(Desaparecimento de Polaris - 80 pontos)** Polaris ($\alpha \text{ UMi}$) subitamente desapareceu! Nathan, Katarine e Lais, astrônomos de ponta, começam um intenso debate: qual o melhor método para determinar a posição do Polo Celeste Norte? Cada um propõe um procedimento distinto.

- (a) **(5 pontos)** Ao aplicar qualquer método, obtemos a posição de um Polo Imaginário. A distância angular entre esse Polo Imaginário e o Polo Celeste real determina o erro atrelado

ao método. Sendo assim, calcule o erro do método utilizado antes de Polaris desaparecer. Para tanto, considere que o procedimento mais consagrado era simplesmente tomar Polaris como o Polo Imaginário.

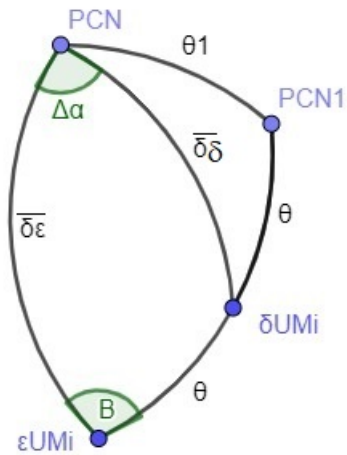
- (b) **(10 pontos)** Nathan sugere um método semelhante ao que utilizamos no hemisfério sul: prolongar a distância entre Circitores (εUMi) e Yildun (δUMi) 1 vez no sentido norte, partindo de Yildun. Obtemos, assim, o ponto PCN1. Calcule o erro do método de Nathan.
- (c) **(10 pontos)** Katarine tem uma ideia parecida: prolongar a distância entre Merak (βUMa) e Dubhe (αUMa) 5 vezes em direção ao norte, partindo de Dubhe. Obtemos, assim, o ponto PCN2. Determine o erro associado ao método de Katarine.
- (d) **(30 pontos)** Lais foi mais audaciosa: prolongar a distância entre Merak (βUMa) e Dubhe (αUMa) e também a distância entre Circitores (εUMi) e Yildun (δUMi). O ponto de intersecção entre os dois prolongamentos seria o PCN3. Novamente, determine o erro associado a este método.
- (e) **(5 pontos)** Qual o método fornece um Polo Imaginário mais próximo ao real após o desaparecimento de Polaris?
- (f) **(30 pontos)** Carrit, um pesquisador muito atento, estava observando Polaris em seu observatório particular em South Bend ($\phi = 41,67^\circ$) no momento do "desaparecimento" do astro. Ele notou que no exato instante da culminação inferior da estrela, ela se despreendeu da esfera celeste e continuou seu movimento com velocidade tangencial (constante) perpetuamente. Após um ano, quais as coordenadas de altura e azimute (medido a partir do norte) de Polaris que Carrit medirá em seu observatório? Determine também essas coordenadas após um tempo extremamente longo. Assuma que a esfera celeste rotaciona e a Terra permanece parada.

Dados:

Estrela	Ascensão Reta	Declinação
αUMa	11h05m00s	+61°38'24"
βUMa	11h03m05s	+56°16'15"
αUMi	2h58m15s	+89°21'05"
δUMi	17h25m38s	+86°34'16"
εUMi	16h43m55s	+82°00'00"

Solution:

- (a) Para o método atual, seja θ_A a distância angular entre o Polo Celeste Norte e o Polo Imaginário. Nessa primeira situação, o erro é simplesmente a distância angular entre o Polo e Polaris: $\theta_A = 90^\circ - \delta_p = 90^\circ - 89^\circ 21' 05'' \iff \theta_A = 38' 55''$.
- (b) Faremos uma representação esquemática:



$$\begin{cases} \theta_1 = \text{erro angular do método} \\ \theta = \text{distância angular } \delta UMi - \varepsilon UMi \end{cases}$$

Para qualquer ângulo β , usaremos a notação de ângulo complementar: $\bar{\beta} = 90^\circ - \beta$.

Definimos: $\Delta\alpha = \alpha_\delta - \alpha_\varepsilon = 41m43s = 10,429167^\circ$

(i) Determinando θ por lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \delta_\varepsilon \sin \delta_\delta + \cos \delta_\varepsilon \cos \delta_\delta \cos \Delta\alpha \\ \iff \theta &= 4,668930^\circ \end{aligned}$$

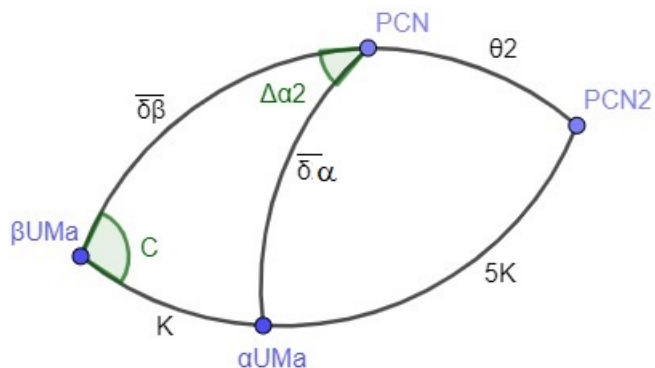
(ii) Determinar B por lei dos senos:

$$\frac{\sin B}{\cos \delta_\delta} = \frac{\sin \Delta\alpha}{\sin \theta} \iff B = 7,643552^\circ$$

(iii) Calcular θ_1 a partir do triângulo $\varepsilon - PCN1 - PCN$:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \sin \delta_\varepsilon \cos 2\theta + \cos \delta_\varepsilon \sin 2\theta \cos B \\ \iff \theta_1 &= 1^\circ 45' 46'' \end{aligned}$$

(c) O método de resolução será bem semelhante: $\Delta\alpha_2 = 1min55s = 0,479167^\circ$.



κ = distância angular entre α UMa e β UMa

(i)

$$\cos\kappa = \sin\delta_\beta\sin\delta_\alpha + \cos\delta_\beta\cos\delta_\alpha\cos\Delta\alpha_2$$

(ii)

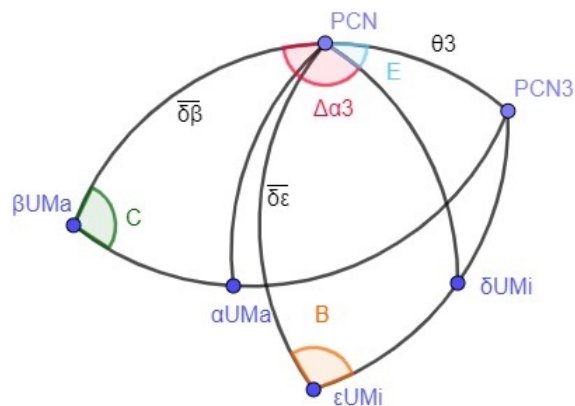
$$\frac{\sin C}{\cos\delta_\alpha} = \frac{\sin\Delta\alpha_2}{\sin\kappa} \Leftrightarrow C = 2,430587^\circ$$

(iii)

$$\cos\theta_2 = \sin\delta_\beta\cos\delta_\alpha\cos C + \cos\delta_\beta\sin\delta_\alpha\sin C \Leftrightarrow \boxed{\theta_2 = 1^\circ 59' 07''}$$

Obs: Katarine é uma astrônoma de ponta. Nem pense em dizer que $\Delta\alpha_2 \approx 0$ e calcular apenas a diferença de declinações! Isso levaria a um valor de $\theta_2 = 1^\circ 30' 51''$ (suficiente para ultrapassar o método de Nathan).

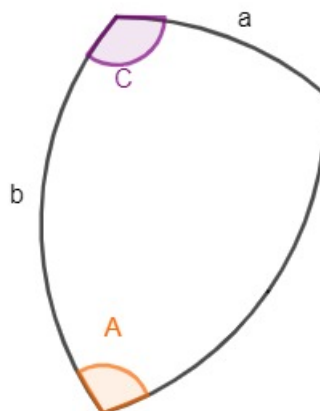
(d) Para resolvermos esse problema, usaremos a lei dos 4 elementos. Além disso, os resultados intermediários dos itens (b) e (c) serão úteis.



$$\Delta\alpha_3 = \alpha_{\delta UMa} - \alpha_{\beta UMa} = 6h22min33s = 95,637500^\circ$$

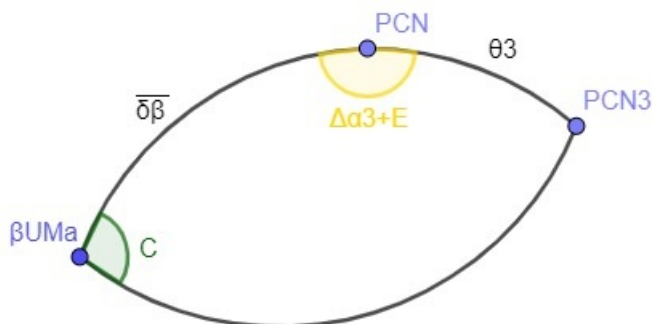
No item (c) vimos que o prolongamento $\beta - \alpha$ UMa passa bem próximo ao PCN, isto é, acima de ε e δ UMi.

Usaremos 2 vezes a lei dos 4 elementos:



$$\cos b \cos C = \cot a \sin b - \cot A \sin C$$

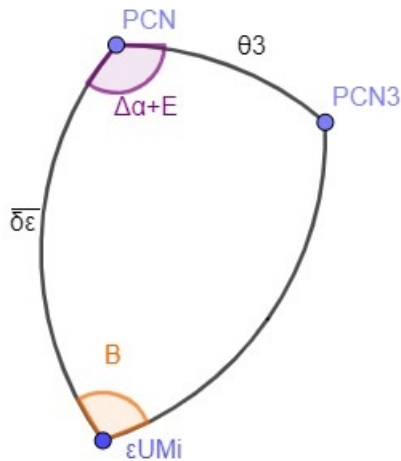
(i) Do primeiro triângulo:



$$\sin \delta_\beta \cos(\Delta\alpha_3 + E) = \cot \theta_3 \cos \delta_\beta - \cot C \sin(\Delta\alpha_3 + E)$$

Há duas incógnitas (E e θ_3 - C foi calculado anteriormente).

(ii) Para o outro triângulo esférico:



$$\sin \delta_{\varepsilon} \cos(\Delta \alpha + E) = \cot \theta_3 \cos \delta_E - \cot B \sin(\Delta \alpha + E)$$

Há as mesmas duas incógnitas da equação anterior.

Sistema obtido:

$$\begin{cases} \sin \delta_{\beta} \cos(\Delta \alpha_3 + E) + \cot C \sin(\Delta \alpha_3 + E) = \cot \theta_3 \cos \delta_{\beta} \\ \sin \delta_{\varepsilon} \cos(\Delta \alpha + E) + \cot B \sin(\Delta \alpha + E) = \cot \theta_3 \cos \delta_{\varepsilon} \end{cases}$$

Essa equação é facilmente resolvida usando-se as identidades trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases}$$

Desenvolvendo-se a expressão e rearranjando-a ($\cos E$ à esquerda):

$$\begin{aligned} \cos E \left[\tan \delta_{\beta} \cos \Delta \alpha_3 + \frac{\cot C \sin \Delta \alpha_3}{\cos \delta_{\beta}} - \tan \delta_{\varepsilon} \cos \Delta \alpha + \frac{\cot B \sin \Delta \alpha}{\cos \delta_{\varepsilon}} \right] = \\ = \sin E \left[\tan \delta_{\beta} \sin \Delta \alpha_3 - \frac{\cot C \cos \Delta \alpha_3}{\cos \delta_{\beta}} - \tan \delta_{\varepsilon} \sin \Delta \alpha + \frac{\cot B \cos \Delta \alpha}{\cos \delta_{\varepsilon}} \right] \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores numéricos:

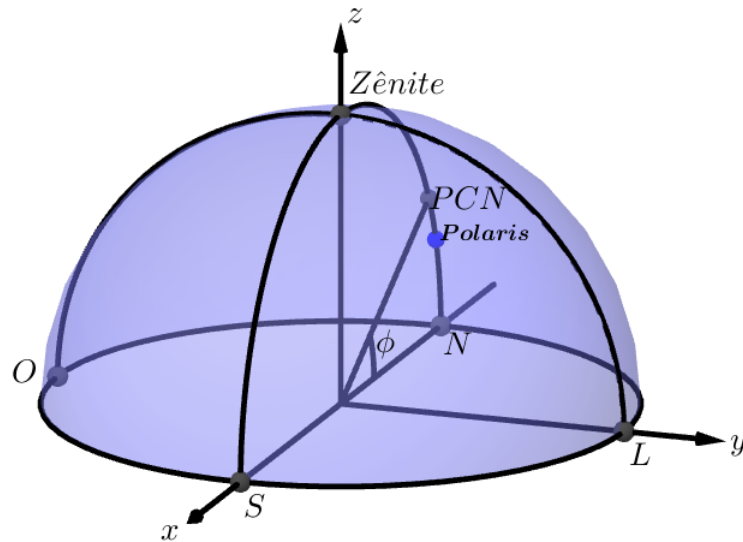
$$\tan E = \frac{25,385472}{57,026651} \iff E = 23,996286^{\circ}$$

Retomando-se uma das expressões do sistema, calcula-se:

$$\theta_3 = 1^{\circ}35'06''$$

(e) Apesar de mais complexo, o método proposto por Lais possui o menor erro.

(f) A esfera celeste e o eixo de coordenadas serão:



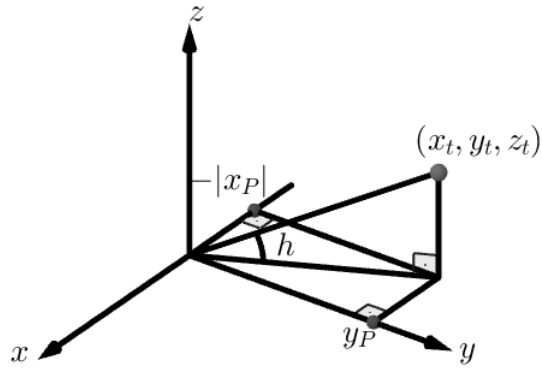
No exato instante da culminação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \text{velocidade angular da esfera celeste} \\ R = \text{raio da esfera celeste} \\ \vec{V}_p = \omega R \cos \delta \hat{j} \rightarrow \text{a velocidade de Polaris apenas altera a coordenada } y \\ h_p = \Phi - (90^\circ - \delta) = \delta + \Phi - 90^\circ \\ A_p = 0^\circ \\ |x_p| = R \cosh_p \\ y_p = 0 \\ z_p = R \sinh_p \end{array} \right.$$

Substituindo-se alguns valores numéricos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{T_s} \rightarrow \text{Sendo } T_s \text{ o período sidereal} \\ t = 1 \text{ ano} \\ \delta = 89^\circ 21' 05'' \\ h_p = 41,02^\circ \end{array} \right.$$

Após Polaris se deslocar:



$$\begin{cases} x_t = x_p \\ y_t = 0 + y_p t = \omega R \cos \delta t \rightarrow t \text{ é o tempo decorrido desde o desprendimento da estrela} \\ z_t = z_p \end{cases}$$

Temos, assim, após 1 ano:

$$\tan h = \frac{z_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} = \frac{R \sin h_p}{\sqrt{(R \cos h_p)^2 + (\omega R \cos \delta t)^2}}$$

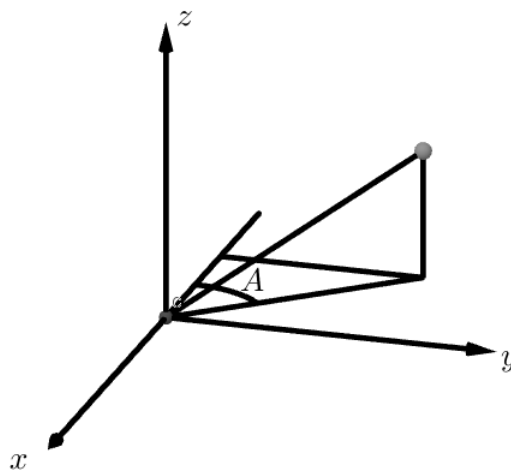
$$\Leftrightarrow \boxed{h = 1,44^\circ}$$

Após um tempo muito longo, y tende a infinito e $\tan h_f$ tende a zero:

$$\tan h_f = \frac{R \sin h_p}{\sqrt{(R \cos h_p)^2 + (\omega R \cos \delta t)^2}} \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h_f = 0^\circ}$$

Para o azimute:



$$\cos A = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} = \frac{\cos h_p}{\sqrt{(\cos h_p)^2 + (\omega \cos \delta t)^2}}$$

Após 1 ano: $A = 88,34^\circ$

Se t for muito grande, a fração tende a 0 e, portanto:

$$\cos A_f = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} \rightarrow 0$$
$$\iff A_f = 90^\circ$$