PROVA TEÓRICA 1 - GABARITO

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2021

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - P1". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - P1";
3. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
4. No canto superior esquerdo de TODAS as páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e meia e o tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **5 questões**, sendo 1 valendo 5 pontos, 3 valendo 10 pontos e 1 valendo 15 pontos.
   - Questões Médias - **3 questões**, sendo 2 valendo 30 pontos e 1 valendo 40 pontos.
   - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 70 pontos e a outra valendo 80 pontos.
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

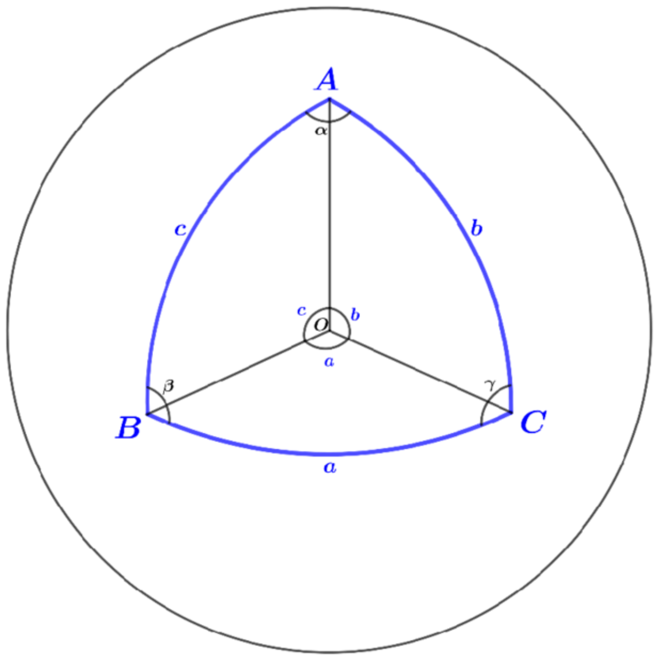
1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom;
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova;
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções;
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente "Pulei a questão anterior".

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\, s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938,27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{sen(a)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(b)}{sen(\beta)} = \frac{sen(c)}{sen(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(\alpha)$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Pressão de radiação (reflexão perfeita e ângulo de incidência nulo):

$$P = \frac{2F}{c}$$

sendo F o fluxo de radiação e c a velocidade da luz

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Derivada da função arco-tangente:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Derivada da função tangente:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$$

Questões Curtas

1. **(5 pontos)** Um estranho objeto parecido com uma bola de beisebol está rapidamente em queda livre em rota de colisão com a cabeça do nosso cosmonauta favorito: Bismarck. Ele admira desatento a paisagem do planeta sem atmosfera Jamn-19b sem notar o objeto não identificado. Seu amigo Bruno Pizza, atento, olha para cima e percebe o corpo estranho. Então, prontamente, alerta Bismarck da ameaça e ambos dão alguns passos e se safam.

   Considere que o diâmetro de uma bola de beisebol é $7,4$ cm, que no momento descrito a abertura da pupila de Bruno era de 6 mm, que ele enxerga apenas em 550 nm e que sua visão é saudável. Qual foi a distância entre os olhos de Bruno e a bola no momento em que ela tornou-se visível como um corpo extenso?

Solução: Seja λ o comprimento de onda da visão de Bruno, D a abertura da sua pupila, d o diâmetro da bola e S a distância requisitada a ser encontrada.
Vamos encontrar a resolucação angular do olho de Bruno:

$$\theta_{min,Bruno}(\text{rad}) = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Para a bola de beisebol começar a ser vista por Bruno, seu tamanho angular deve ser θ_{min}, assim:

$$\tan\left(\frac{d}{S}\right) = \theta_{min} \Rightarrow S \approx \frac{d}{\theta_{min}}$$

Portanto:

$$S = \frac{Dd}{1,22\lambda}$$

Por fim, substituindo os valores dados, obtemos:

$$\boxed{S = 660 \text{ m}}$$

2. **(10 pontos)** Considere um sistema binário a 20,0 pc da Terra em que as duas estrelas possuem órbitas circulares com diâmetros angulares aparentes de 1,50” e 0,500”. Devido ao deslocamento Doppler, para um observador no plano orbital do sistema binário o comprimento de onda central da linha H_α da estrela de menor massa atinge um valor máximo de 656,330 nm. Considere que o comprimento de onda da linha H_α equivale a 656,281 nm quando medido em laboratório. Calcule o período orbital do sistema, em anos.

Solução:

O aumento no comprimento de onda ocorre por conta do Efeito Doppler. Dessa forma, é possível calcular a velocidade que causou a variação por meio da seguinte expressão:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$\frac{v}{3 * 10^8} = \frac{656.330 - 656.281}{656.281}$$

$$v = \frac{0.049 * 3 * 10^8}{656.281}$$

$$v = 2,24 * 10^4 \, m/s$$

Considerando que a estrela de menor massa deve ter o maior raio orbital:

$$r = \theta * d$$

$$r = 0,750 * 20$$

$$r = 15 \, UA$$

$$r = 2,244 * 10^{12} \, m$$

Com base na velocidade e no raio orbital, é possível determinar o período do sistema:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi * 2,244 * 10^{12}}{2,24 * 10^4}$$

$$T = 6,3 * 10^8 \, s$$

$$T = 20 \, anos$$

3. **(10 pontos)** A galáxia RG - 118, quando vista por nós da Terra, aparenta ter um formato elíptico com semieixo maior de 18" e $\frac{b}{a} = 0,71$. Essa galáxia tem brilho superficial de 20,2 $mag \cdot arcsec^{-2}$ e magnitude absoluta M_g = - 19.

   (a) **(7 pontos)** Calcule a distância, em Mpc, até a galáxia.

(b) **(3 pontos)** A galáxia na verdade tem formato de disco, mas nós a vemos com formato elíptico devido a uma inclinação dela com relação à nossa linha de visada. Calcule o ângulo, em graus, entre o vetor normal à superfície de RG - 118 e a nossa linha de visada.

Solução:

(a) A área da elipse é $A = \pi ab$. Então:

$$A = \pi \cdot 0,71 \cdot 18^2 = 722,7\ arcsec^2$$

Seja o $\mu = 20,2 mag \cdot arcsec^{-2}$ o brilho superficial:

$$m_g - \mu = -2,5\log(\frac{A}{1})$$

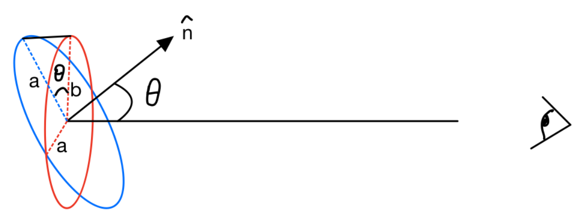
$$m_g = -2,5\log(A) + \mu = 13,1$$

Pelo módulo da distância:

$$m_g - M_g = 5\log(D) - 5$$

$$13,1 - 19 = 5\log(D) - 5$$

$$\boxed{D \approx 25,7\ Mpc}$$



(b) Do esquema acima, pode-se concluir que:

$$cos\theta = \frac{b}{a} = 0,71 \Rightarrow \boxed{\theta \approx 45^\circ}$$

4. **(10 pontos)** O exoplaneta C410 orbita a curiosa estrela 4LC1D75 em uma trajetória elíptica com parâmetro $\lambda = 3 - 2\sqrt{2}$, em que λ é a razão entre o periélio e o afélio desta órbita. No momento em que a anomalia verdadeira é $\theta_o = 45^o$, a velocidade do exoplaneta é v_o. Com base no texto acima, resolva os itens a seguir.

(a) **(4 pontos)** Qual a velocidade v_1 de C410 quando esse passar pelo semi-eixo menor de sua órbita, em função de v_o?

A partir de estudos mais cuidadosos, percebeu-se que o vetor posição que liga a estrela ao exoplaneta percorre um ângulo $\Delta\theta_o$ em um intervalo de tempo Δt quando C410 está na posição θ_o. A fim de saber qual ângulo α o vetor velocidade fazia com o vetor posição nesta configuração, o movimento de C410 foi também estudado no momento em que ele estava passando pelo eixo menor de sua órbita, descrito pela anomalia verdadeira θ_1.

(b) **(6 pontos)** Sabendo que o vetor posição de C410 percorreu um ângulo $\Delta\theta_1$ na posição θ_1 em um mesmo intervalo de tempo Δt, determine α.

Dados: $\Delta\theta_0 = 1'21,567''$ e $\Delta\theta_1 = 0'9,0526''$.

Solução:

(a) Usaremos, primeiro, o fator λ que a questão fornece. Da equação polar da elipse, obtemos:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecos\theta} \Rightarrow \begin{cases} r_p = a(1-e) \\ r_a = a(1+e) \end{cases} \tag{1}$$

Segundo a questão, $\lambda = \frac{r_p}{r_a}$, portanto, temos:

$$\frac{a(1-e)}{a(1+e)} = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} \overset{racionalizando}{\rightarrow} e = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

Novamente, fazendo-se uso da equação polar, vem

$$r_o = \frac{a[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2]}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}cos45} \Rightarrow r_o = \frac{a}{3} \tag{3}$$

Da equação da energia da órbita elíptica, podemos escrever a velocidade da maneira abaixo. Para v_o, substituímos o valor de r_o encontrado acima; para a velocidade no semi-eixo menor, iremos usar $r = a$.

$$v = \sqrt{2GM(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})} \Rightarrow \begin{cases} v_o = \sqrt{2GM(\frac{3}{a} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{5GM}{a}} \\ v_1 = \sqrt{2GM(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \end{cases} \tag{4}$$

Finalmente, chegamos a $\boxed{v_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}v_o}$.

(b) Esquema proposto no item (b):

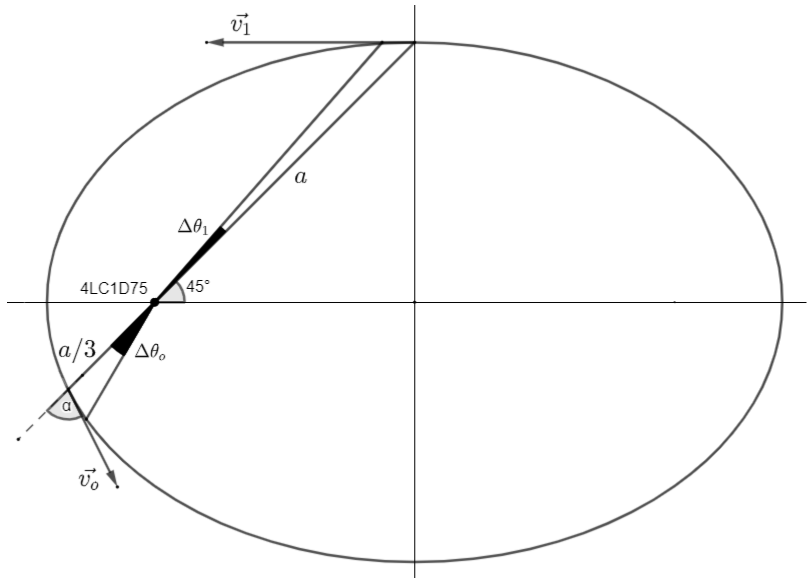


Figura 1: Situação do problema

Como o planeta percorre setores em tempos iguais, podemos dizer, pela Segunda Lei de Kepler, que as áreas varridas pelo vetor posição são iguais. Para pequenos ângulos percorridos, temos:

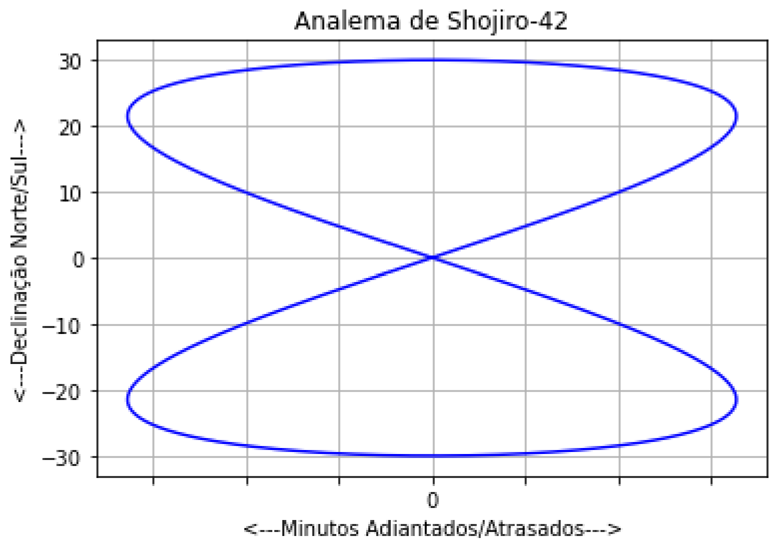
$$\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{L}{2m} = \frac{vrsen\beta}{2} \therefore \Delta t = \frac{r\Delta\theta}{vsen\beta} \tag{5}$$

Em que β é o ângulo entre vetor velocidade e vetor posição. Dessa forma, como $sen(\beta_1) = sen45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vide figura) e temos os valores de $r_1 = a$, $r_o = a/3$ e $v_o = \sqrt{5}v_1$, vem:

$$\frac{r_1\Delta\theta_1}{v_1 sen45^\circ} = \frac{r_o\Delta\theta_o}{v_o sen\alpha} \Rightarrow sen\alpha = (\frac{\Delta\theta_o}{\Delta\theta_1})(\frac{r_o}{r_1})(\frac{v_1}{v_o})sen45^\circ \tag{6}$$

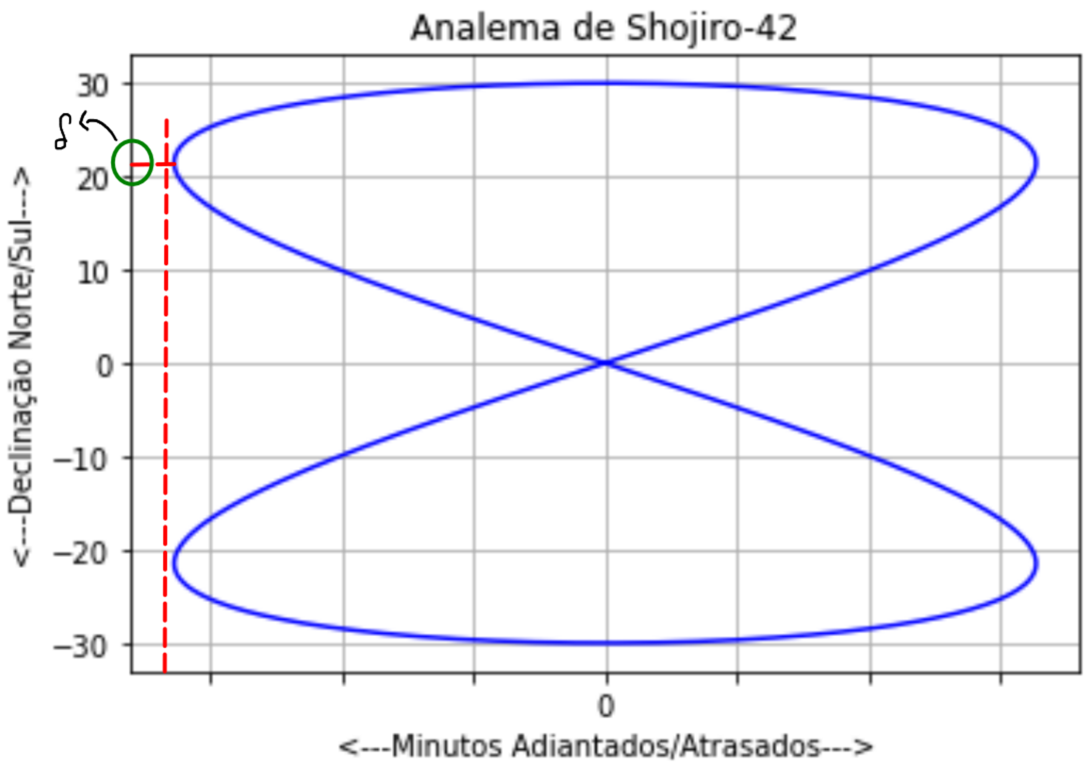
Substituindo os valores fornecidos, obtemos $\boxed{\alpha = 71^\circ 45,813''}$.

5. **(15 pontos)** Bruno habita um planeta que orbita a estrela Shojiro-42. Ele, sempre muito curioso, decidiu plotar o analema de sua estrela, obtendo a seguinte imagem:



Bruno, contudo, se esqueceu de adotar uma escala para a abcissa de seu gráfico, responsável por representar a equação do tempo. Assim, ajude-o nessa tarefa e encontre o módulo do maior valor possível da equação do tempo, em minutos, no planeta de Bruno.
Considere que um dia estelar no planeta de Bruno possui 24h e note que a excentricidade de sua órbita é nula.

Solução: Pelo gráfico, é possível saber a obliquidade da órbita $\epsilon = 30°$ e a declinação da estrela no momento de maior módulo da equação do tempo (o gráfico é simétrico - a órbita é circular) $\delta \approx 21°$.



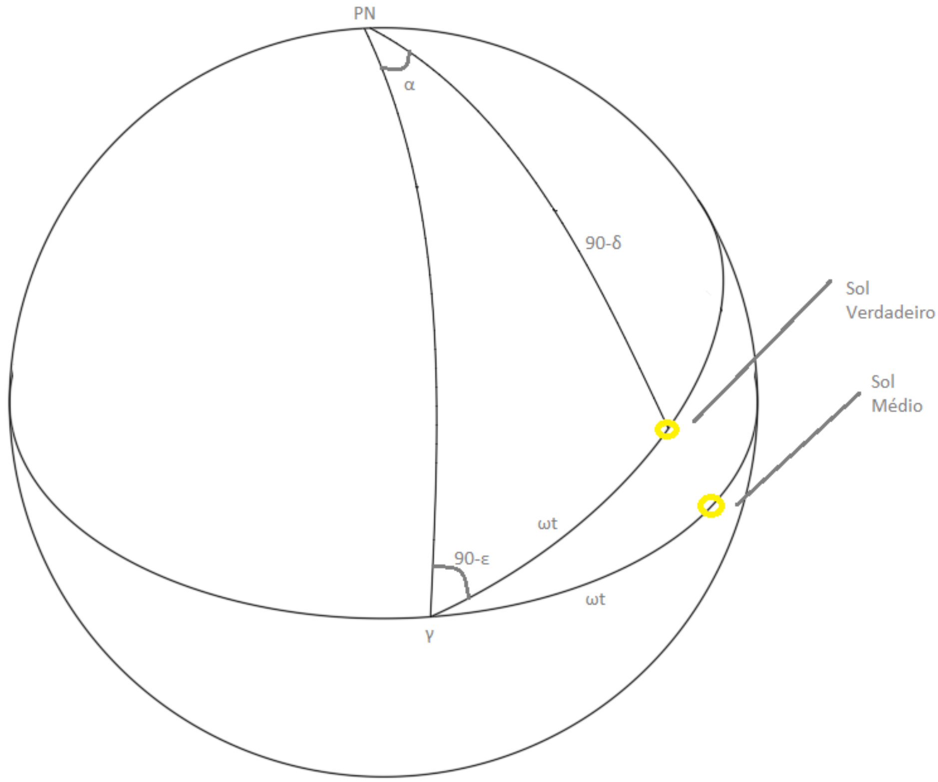
Sabemos que:

$$ET = (\text{Ascensão reta do Sol Médio}) - (\text{Ascensão reta do Sol Verdadeiro})$$

Sendo α a ascensão reta do Sol Verdadeiro e ωt a ascensão reta do Sol Médio:

$$ET = \omega * \Delta t - \alpha$$

Podemos então desenhar o seguinte triângulo esférico sabendo que a velocidade angular do Sol Verdadeiro na Eclíptica é igual à velocidade do Sol Médio no Equador:



Pela lei dos senos e lei dos cossenos:

$$\frac{sen(\omega * \Delta t)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(90-\delta)}{sen(90-\epsilon)} = \frac{cos(\delta)}{cos(\epsilon)}$$

$$cos(\omega * \Delta t) = cos(\delta) * cos(\alpha)$$

$$sen(\delta) = sen(\omega t) * sen(\epsilon)$$

A partir das equações acima, podemos chegar em:

$$sen(\omega t) = \frac{sen(\delta)}{sen(\epsilon)}$$

$$sen(\alpha) = \frac{tan(\delta)}{tan(\epsilon)}$$

Substituindo na equação do tempo:

$$ET = arcsen\left(\frac{sen(\delta)}{sen(\epsilon)}\right) - arcsen\left(\frac{tan(\delta)}{tan(\epsilon)}\right)$$

Substituindo e convertendo para minutos, teremos:

$$\boxed{ET \approx 16,5\ min}$$

Esse problema poderia ser realizado sem a extração da informação da declinação no gráfico seguindo as seguintes possíveis alternativas de solução:

Método sem cálculo

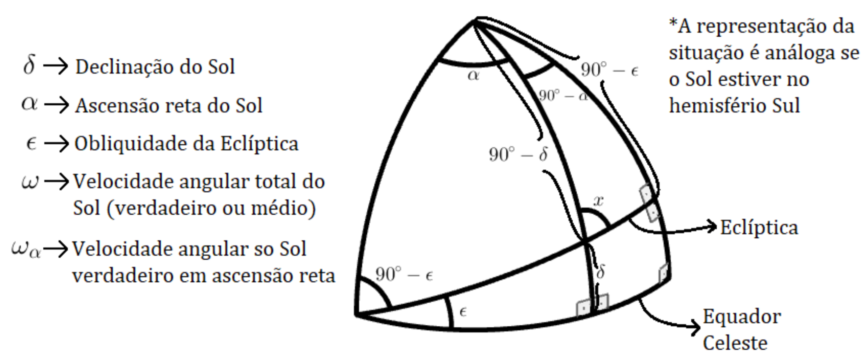
Primeiro, é importante notar, a partir do gráfico, que o módulo da máxima declinação é 30°, o que implica que a obliquidade do planeta será $\epsilon = 30°$. Ainda, a equação do tempo é zero nos pontos de declinação nula e máxima (ou mínima), o que implica que o sol médio e verdadeiro possuem ascensão reta coincidentes nesses pontos, como é de se esperar de uma órbita circular.

Assim, o sol médio - que se move com velocidade constante sob o equador do planeta - possui o mesmo módulo de velocidade angular que o sol verdadeiro - que se move com velocidade constante no plano da eclíptica. Sabemos que a equação do tempo é dada pela diferença entre a ascensão reta do Sol Médio e o Sol Verdadeiro. Assim, partindo do ponto de declinação nula (momento em que ambos são coincidentes), a velocidade angular em ascensão reta do Sol Médio começa maior que a do Sol Verdadeiro, aumentando o valor da equação do tempo. Contudo, a partir de um ponto, a velocidade em ascensão reta do Sol Verdadeiro se torna maior, causando uma diminuição do valor da equação do tempo, até que ela se torne zero novamente no ponto de declinação máxima.

Concluímos, então, que o pontos onde ocorre o maior módulo da equação do tempo, teremos uma velocidade em ascensão reta do Sol Médio igual a do Sol Verdadeiro.

Vamos, então, calcular a declinação do Sol Verdadeiro nos pontos em que esse fenômeno ocorre

Primeiramente, é necessário desenhar a seguinte figura:



Utilizando a lei dos senos:

$$\frac{sen(x)}{sen(90^o - \varepsilon)} = \frac{sen(90^o)}{sen(90^o - \delta)}$$

$$sen(x) = \frac{cos(\varepsilon)}{cos(\delta)}$$

É possível decompor a velocidade angular do Sol verdadeiro em dois componentes utilizando o ângulo x. Um desses componentes é a velocidade angular em declinação. Já o outro componente deve ser dividido pelo cosseno da declinação para obter a velocidade angular em ascensão reta. Portanto:

$$\omega_\alpha = \frac{\omega * sen(x)}{cos(\delta)}$$

Substituindo a expressão para o seno de x nessa fórmula:

$$\omega_\alpha = \frac{\omega * cos(\varepsilon)}{cos^2(\delta)}$$

Considerando que nos pontos em questão a velocidade angular em ascensão reta do Sol verdadeiro é igual à velocidade angular do Sol médio, que é igual à velocidade angular total:

$$\omega_\alpha = \frac{\omega * cos(\varepsilon)}{cos^2(\delta)}$$

$$\omega = \frac{\omega * cos(\varepsilon)}{cos^2(\delta)}$$

$$cos^2(\delta) = cos(\varepsilon)$$

$$cos(\delta) = \pm\sqrt{cos(\varepsilon)}$$

Portanto, teremos que para $\delta > 0$, $cos(\delta) = \sqrt{cos(\epsilon)}$. Agora, precisamos calcular a equação do tempo para esse ponto:

$$ET = (\text{Ascensão reta do Sol Médio}) - (\text{Ascensão reta do Sol Verdadeiro})$$

$$ET = \omega * \Delta t - \alpha$$

Utilizando Lei dos Senos e Lei dos Cossenos:

$$\frac{sen(\omega * \Delta t)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(90 - \delta)}{sen(90 - \epsilon)} = \frac{cos(\delta)}{cos(\epsilon)}$$
$$cos(\omega * \Delta t) = cos(\delta) * cos(\alpha)$$

Das equações acima: $tan(\omega * \Delta t) = \frac{tan(\alpha)}{cos(\epsilon)}$ Assim:

$$ET = arctan\left(\frac{tan(\alpha)}{cos(\epsilon)}\right) - \alpha$$

Das Lei dos Cossenos novamente:

$$sen(\delta) = \sqrt{1 - cos(\epsilon)} = sen(\omega * \Delta t) * sen(\epsilon)$$

$$sen(\omega * \Delta t) = \frac{\sqrt{1 - cos(\epsilon)}}{sen(\epsilon)}$$

Com algumas operações trigonométricas, descobrimos que $tan(\omega * \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{cos(\epsilon)}}$ e, portanto $tan(\alpha) = \sqrt{cos(\epsilon)}$. Por fim:

$$ET_{max} = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{cos(\epsilon)}}\right) - arctan(\sqrt{cos(\epsilon)})$$

Substituindo $\epsilon = 30^\circ$ e convertendo para minutos:

$$\boxed{ET_{max} = 16,5\ min}$$

Método com cálculo

A solução do problema é imediata ao analisar o máximo da função que nos dá a equação do tempo:

$$ET = arctan\left(\frac{tan(\alpha)}{cos(\epsilon)}\right) - \alpha$$

$$ET'(\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{tan^2(\alpha)}{cos^2(\epsilon)}} \cdot \frac{sec^2(\alpha)}{cos(\epsilon)} - 1 = 0$$

A equação acima nos dá que $tan(\alpha) = \sqrt{cos(\epsilon)}$ para a condição de máximo. Assim, basta substituir esse valor na equação do tempo.

Obs: Por abuso de linguagem, adotamos o seguinte na solução acima:

Eclíptica → Plano de órbita do planeta

Sol → Shojiro-42

Questões Médias

6. **(30 pontos)** O método mais comum para localizar o polo celeste Sul é prolongar o eixo maior do Cruzeiro do Sul (*Crux*) 4,5 vezes a partir de Gacrux (γ Cru).

   (a) **(15 pontos)** Para determinar a precisão desse método, calcule o ângulo entre o polo celeste Sul verdadeiro e o polo celeste determinado pelo Cruzeiro do Sul.

   (b) **(10 pontos)** O número 4,5 é uma aproximação que funciona suficientemente bem para determinar o polo celeste Sul. Contudo, essa não é a melhor aproximação possível. Calcule o valor pelo qual o eixo maior do Cruzeiro do Sul deve ser prolongado para obter a posição mais próxima do polo celeste Sul.

   (c) **(5 pontos)** Qual é o ângulo entre o polo celeste Sul verdadeiro e o polo celeste determinado pelo Cruzeiro do Sul para o valor obtido no item anterior?

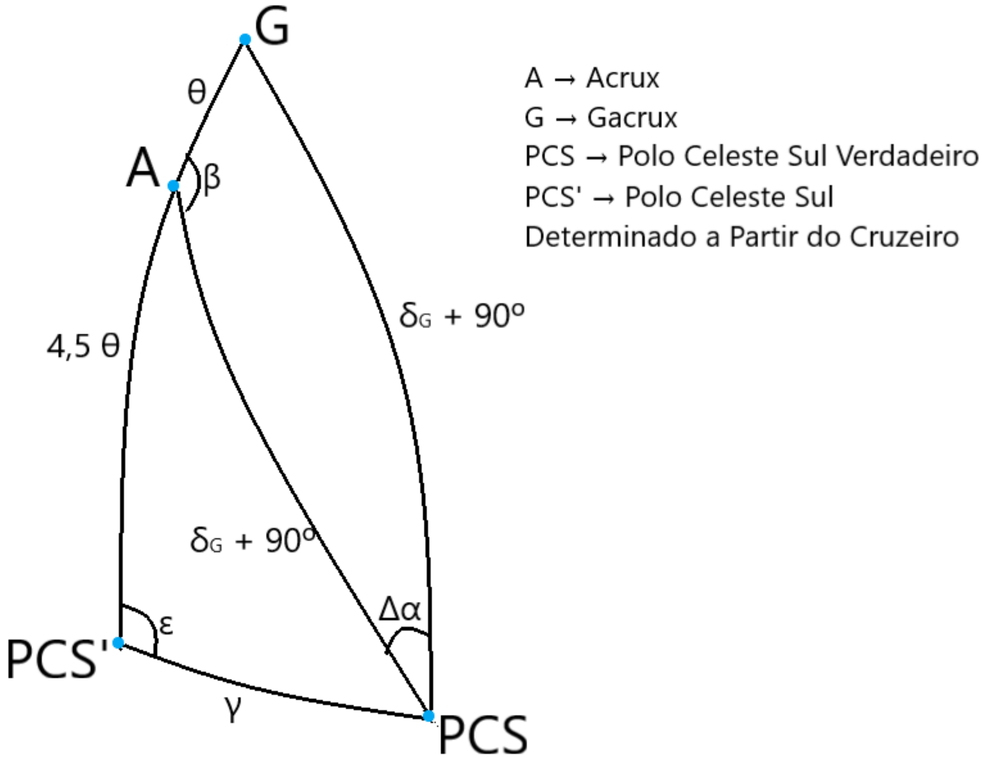
Dados:

Acrux (α Cru): $\delta = -63^o13'$, $\alpha = 12h27min48s$

Gacrux (γ Cru): $\delta = -57^o14'$, $\alpha = 12h32min21s$

Solução:

(a) Primeiramente, é importante desenhar os seguintes triângulos esféricos:



Com a lei dos cossenos, é possível calcular o valor de θ:

$$cos(\theta) = cos(90^o + \delta_A) * cos(90^o + \delta_G) + sin(90^o + \delta_A) * sin(90^o + \delta_G) * cos(\Delta\alpha)$$

$$cos(\theta) = sin(\delta_A) * sin(\delta_G) + cos(\delta_A) * cos(\delta_G) * cos(\Delta\alpha)$$

$$cos(\theta) = sin(-63^o13') * sin(-57^o14') + cos(-63^o13') * cos(-57^o14') * cos(1.1375^o)$$

$$cos(\theta) = 0.9945$$

$$\theta = arccos(0.9945)$$

$$\theta = 6^o01'$$

Utilizando novamente a lei dos cossenos, é possível calcular o valor de β:

$$cos(90^o + \delta_G) = cos(90^o + \delta_A) * cos(\theta) + sin(90^o + \delta_A) * sin(\theta) * cos(\beta)$$

$$-sin(\delta_G) = -sin(\delta_A) * cos(\theta) + cos(\delta_A) * sin(\theta) * cos(\beta)$$

$$cos(\beta) = \frac{-sin(\delta_G) + sin(\delta_A) * cos(\theta)}{cos(\delta_A) * sin(\theta)}$$

$$cos(\beta) = \frac{-sin(-57^o14') + sin(-63^o13') * cos(6^o01')}{cos(-63^o13') * sin(6^o01')}$$

$$cos(\beta) = -0,9947$$

$$\beta = arccos(-0,9947)$$

$$\beta = 174^o07'$$

Vale ressaltar que utilizar a lei dos senos para calcular o valor de β geraria uma ambiguidade, pois seria impossível determinar se o ângulo estaria no primeiro quadrante ou no segundo quadrante.

Por último, a lei dos cossenos também pode ser usada para calcular o valor de γ:

$$cos(\gamma) = cos(4,5 * \theta) * cos(\delta_A + 90^o) + sin(4,5 * \theta) * sin(\delta_G + 90^o) * cos(180^o - \beta)$$

$$cos(\gamma) = -cos(4,5 * \theta) * sin(\delta_A) - sin(4,5 * \theta) * cos(\delta_G) * cos(\beta)$$

$$cos(\gamma) = -cos(4,5*6^o01')*sin(-63^o13') - sin(4,5*6^o01')*cos(-63^o13')*cos(174^o07')$$

$$cos(\gamma) = 0.9989$$

$$\gamma = arccos(0.9989)$$

$$\gamma = 2^o41'$$

$\therefore$ O ângulo entre o polo real e o polo determinado com base no Cruzeiro do Sul equivale a $2^o41'$

(b) Nesse caso, o ângulo ε deve ser igual a 90^o. Portanto, utilizando a fórmula das quatro partes, é possível determinar o valor do novo ângulo entre A e PCS', que será chamado de ϕ:

$$cos(\phi) * cos(180^o - \beta) = sin(\phi) * cot(\delta_A + 90^o) - sin(180^o - \beta) * cot(\epsilon)$$

$$-cos(\phi) * cos(\beta) = sin(\phi) * cot(\delta_A + 90^o) - sin(\beta) * cot(90^o)$$

$$tan(\phi) = -cos(\beta) * tan\delta_A + 90^o)$$

$$tan(\phi) = -cos(\beta) * tan\delta_A + 90^o)$$

$$tan(\phi) = 0.5021$$

$$\phi = arctan(0.5021)$$

$$\phi = 26^o41'$$

A última etapa desse item é calcular a razão entre ϕ e θ:

$$r = \frac{\phi}{\theta}$$

$$r = \frac{26^o41'}{6^o01'}$$

$$r = 4,44$$

$\therefore$ O valor ideal para o prolongamento seria 4,44.

(c) Utilizando a lei dos senos é possível determinar o novo valor de γ:

$$\frac{sin(\delta_A + 90^o)}{sin(90^o)} = \frac{sin(\gamma)}{sin(180^o - \beta)}$$

$$sin(\gamma) = cos(\delta_A) * sin(\beta)$$

$$sin(\gamma) = cos(-63^o13') * sin(174^o07')$$

$$sin(\gamma) = 0,04624$$

$$\gamma = arcsin(0,04624)$$

$$\gamma = 2^o39'$$

$\therefore$ O novo ângulo entre o polo real e o polo determinado com base no Cruzeiro do Sul equivale a $2^o39'$

7. **(30 pontos)** O gráfico abaixo mostra a frequência de rotação do Pulsar da Vela (PSR J0835-4510) ao longo do tempo. Considere que esse comportamento é válido para todos os pulsares do Universo e que a taxa de variação de período se mantém constante após o Dia Juliano 59200 e é igual a variação média de período entre as datas 58600 e 59200.

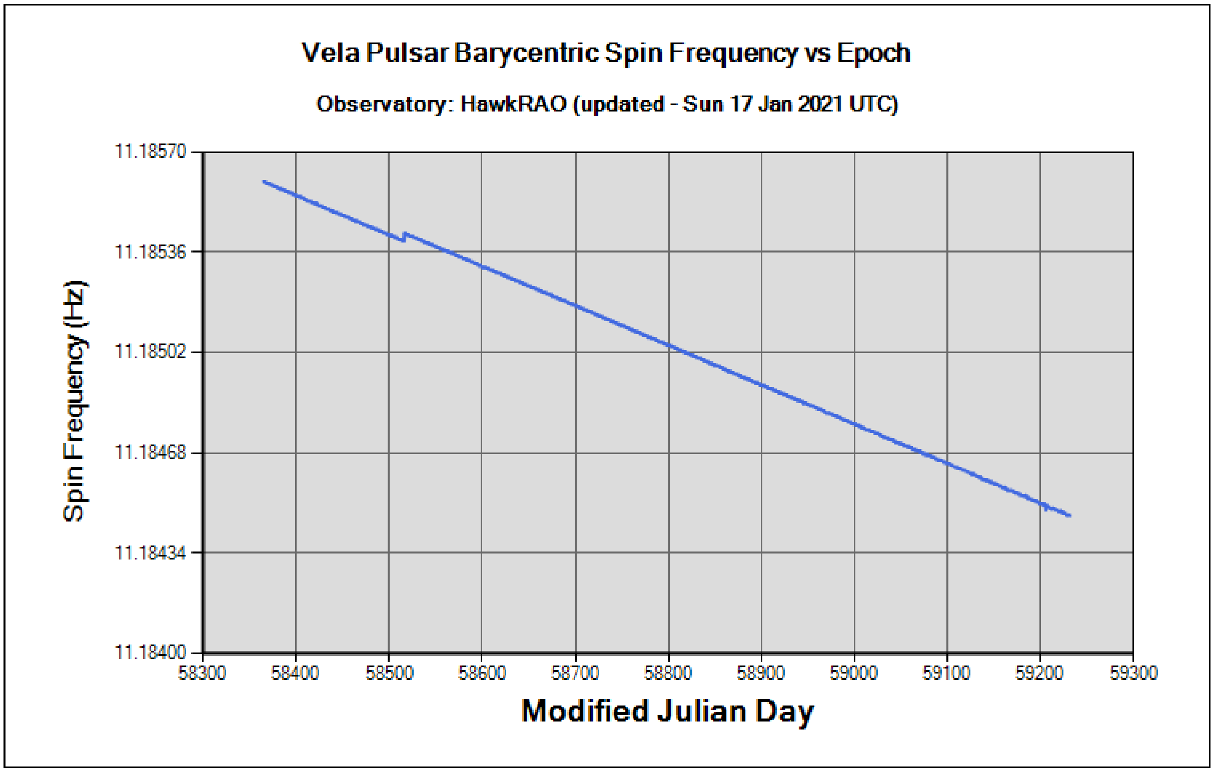


Figura 2: Mudanças na frequência de rotação do Pulsar da Vela em função do tempo. Fonte: Science Results. Hawkesbury Radio Astronomy Observatory - Vela Pulsar Observations. Disponível em: <http://hawkrao.joataman.net/pulsar/science/index.html>. Acesso em: 17/01/2021.

Com base nos seus conhecimentos sobre pulsares e da análise do gráfico acima, julgue as afirmações abaixo. **Justifique cada afirmativa e apresente os cálculos realizados**. Cada item vale $3,75$ pontos.

	Verdadeiro	Falso
1. O gráfico sugere que as estrelas mais rápidas são as mais novas.	☐	☐
2. A taxa de variação média de período do pulsar no tempo entre 58600 e 59200 é aproximadamente $0,20\ s/ano$, em módulo.	☐	☐
3. A taxa de variação de frequência de rotação do pulsar no tempo é aproximadamente $4,87 \cdot 10^{-4}$ Hz/ano, em módulo.	☐	☐
4. O aumento no período de rotação está diretamente ligado a perda de energia cinética via radiação síncrotron.	☐	☐
5. A causa da regularidade dos pulsos de energia de um pulsar é o movimento orbital dele.	☐	☐
6. As variações de período de um Pulsar costumam ser regulares. Mas, no gráfico é possível notar uma irregularidade, conhecida, também, pelo nome "glitch".	☐	☐
7. Após 59200, o pulsar ainda terá $1,15 \cdot 10^{4}$ anos de vida.	☐	☐

8. Considerando que o momento angular é conservado durante as contrações, na data 59200 o raio da estrela é capaz de variar $1,10\ cm$ caso haja uma mudança no período de $1,95 \times 10^{-6}\ s$

Dados: Massa do pulsar: $M = 1,90 M_{\odot}$. Raio do pulsar: $R = 10\ km$. Momento de Inércia de uma esfera sólida: $I = \frac{2}{5} M R^2$. Duração de um ano: $365\ dias = 3 \cdot 10^7 s$.

Dica: A aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$ pode ser útil.

Observação$_1$: As respostas só serão aceitas com a justificativa e os cálculos necessários para chegar às conclusões.

Observação$_2$: Para as afirmações numéricas, considere válido o intervalo da valores 10% acima ou abaixo do valor fornecido.

Solução:

Para solucionar essa questão, iremos analisar cada item separadamente.

1. **Verdadeiro.**

O gráfico sugere que, conforme o tempo passa, menor a frequência de rotação de uma estrela - portanto, mais lenta ela é. Assim, é esperado que estrelas com maior velocidade de rotação sejam mais novas.

2. **Falso.**

Analisando o gráfico, podemos determinar a frequência e o período de rotação para os dois anos estabelecidos. A imagem abaixo será utilizada para a solução do item (2) e (3).

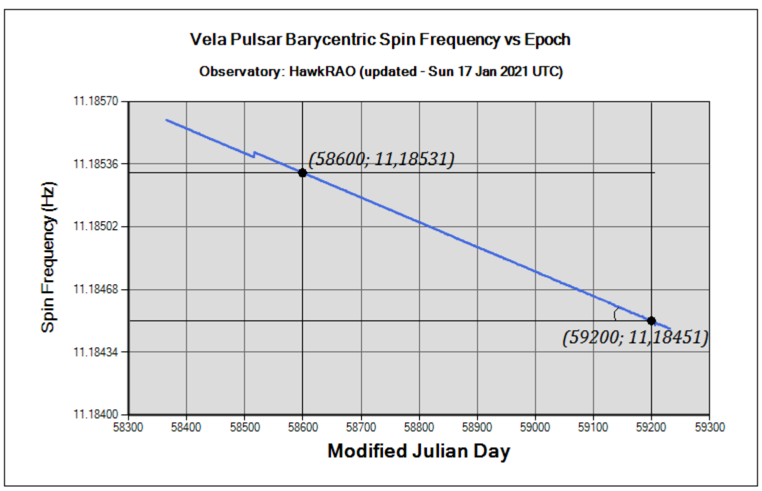


Figura 3: A coordenada exata de cada ponto foi determinada com o auxílio de um programa de computador - como o aluno possui apenas réguas em mãos, uma margem de erro de 5% nos valores fornecidos será aceita.

Com isso, obtemos a variação média do período do pulsar entre as datas 58600 e 59200:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{[(\frac{1}{11,18451}) - (\frac{1}{11,18531})]}{59200 - 58600} \cdot 365 \frac{dias}{ano} = +3,89 \cdot 10^{-6} s/ano \tag{7}$$

3. **Verdadeiro.**

Utilizando os dados da figura, obtemos:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = -\frac{8 \cdot 10^{-4}}{600} = -4,87 \cdot 10^{-4} Hz/ano \tag{8}$$

Note que, conforme previsto em teoria, a frequência de rotação tende a diminuir, visto que a estrela de nêutrons perde energia ao longo do tempo. Por consequência, a variação de frequência é negativa, enquanto a de período é positiva.

4. **Verdadeiro**

Segundo um trecho da Wikipedia,

"Pulsares são estrelas de nêutrons que, em virtude de seu intenso campo magnético (da ordem de 10^8 T), transformam a energia rotacional em energia eletromagnética. A medida que o pulsar gira, seu intenso campo magnético induz um enorme campo elétrico na sua superfície. Este campo elétrico é suficiente para arrancar partículas carregadas da superfície, na sua maioria elétrons, que por sua vez fluem para a magnetosfera onde são acelerados. Estes elétrons acelerados emitem radiação síncrotron em um feixe estreito ao longo das linhas do campo magnético." - fonte: Pulsar. Wikipedia. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pulsar>. Acesso em: 17/01/2021.

Esse trecho, baseado no livro Astronomy and Astrophysics, Stephen A. Gregory; Michael Zeilik (1998), é mais que suficiente para a compreensão do porquê o item ser verdadeiro.

5. **Falso**

Primeira Argumentação: Assuma que a regularidade dos pulsos de energia seja por causa do movimento orbital da estrela. Sendo assim, a equação da órbita elíptica deveria ser válida:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \tag{9}$$

Perceba que, conforme a energia é dissipada via radiação síncrotron, o valor de a deve diminuir, visto que G, M e m são constantes, pois E tende a ficar mais negativo. No entanto, pela Terceira Lei de Kepler, $T^2 = ka^3$ - sendo assim, T também deve diminuir. Note, porém, que, segundo o gráfico da questão, o período aumenta.

Dessa forma, conclui-se que a regularidade das pulsações não é devido ao movimento orbital da estrela.

Segunda Argumentação: Pelas informaçoes disponíveis em literatura, é possível afirmar que a principal causa da regularidade de pulsos é a rotação das estrelas de nêutrons.

No item 4 há uma possível explicação do mecanismo por trás dessa forma de perda de energia. Para essa argumentação, seria necessário explicar também o mecanismo, para que fosse clarificado o porquê dele ser mais influente do que o efeito do movimento orbital.

6. **Verdadeiro.**

Embora variações de período em pulsares sejam regulares, um glitch pode ser observado no 58515 Dia Juliano Modificado no Pulsar da Vela.

7. **Verdadeiro.**

Começaremos a solução desse item diferenciando a equação da energia cinética rotacional no tempo.

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{10}$$

$$\frac{dE}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} \tag{11}$$

Podemos isolar o valor de $I\omega$ em (4) e substituir em (5). Obtemos, assim:

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = \frac{2}{\omega}\frac{d\omega}{dt} \tag{12}$$

Nesse ponto, podemos proceder de duas formas, que serão exploradas separadamente. Utilizaremos a expressão de ω para analisar como sua variação no tempo se relaciona com a mudança de período e frequência.

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi f \tag{13}$$

Primeira forma: Análise pela mudança de período. A questão diz que podemos considerar a taxa dP/dt praticamente constante no tempo, então iremos usar desse fato inicialmente:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\pi}{P^2}\frac{dP}{dt} = -\frac{\omega}{P}\frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \tag{14}$$

Dessa forma, vem que:

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{P}\frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{E}{(\frac{dE}{dt})} = \Delta t = \frac{P}{2(\frac{dP}{dt})} = \frac{8,94 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \tag{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,15 \cdot 10^4 \ anos} \tag{16}$$

Segunda Forma: Análise pela mudança de frequência.

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 2\pi \frac{df}{dt} = \frac{\omega}{f}\frac{df}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{f}\frac{df}{dt} \tag{17}$$

Podemos escrever, então:

$$\frac{E}{\frac{dE}{dt}} = \Delta t = \frac{f}{2(\frac{df}{dt})} = \frac{11,18451}{2 \cdot 4,87 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \tag{18}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,15 \cdot 10^4 \ anos} \tag{19}$$

Veja que as duas respostas nos fornecem o mesmo resultado - de fato, a taxa de variação de período no tempo é praticamente constante.

8. **Falso.**

Considerando que o momento angular é conservado, vem

$$I\omega_o = I'\omega_f \Rightarrow \frac{2}{5}MR^2\frac{2\pi}{P_o} = \frac{2}{5}MR_f^2\frac{2\pi}{P_f} \Rightarrow \frac{R_o^2}{P_o} = \frac{(R_o + \Delta R)^2}{P_o + \Delta P_o} \tag{20}$$

Usando que $(1 + \Delta x/x)^n \approx (1 + n\Delta x/x)$ para $x = \{R; P\}$, vem:

$$1 + \frac{\Delta P}{P_o} = 1 + 2\frac{\Delta R}{R_o} \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{P_o}R = \frac{1}{2}\frac{1,95 \times 10^{-6}}{8,94 \times 10^{-2}} \cdot 10 \times 10^5 \Rightarrow \tag{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta R = 11,0\ cm} \tag{22}$$

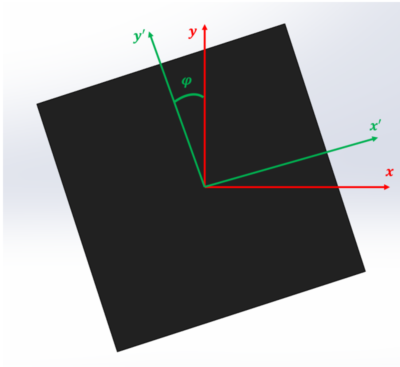
Fazendo com que a afirmativa 8 esteja falsa.

8. **(40 pontos)** Uma categoria relativamente recente no âmbito aeroespacial é a de *CubeSats*, satélites em formato de cubo, cujas dimensões são da ordem de alguns centímetros. Ao planejar a missão de um *CubeSat*, um dos fatores essenciais é determinar a energia solar que pode ser coletada ao longo de uma órbita, sendo dois parâmetros importantes: o período de tempo em que o satélite está exposto à radiação solar (chamado de período iluminado) e a orientação dos painéis fotovoltaicos em relação aos raios solares. Para fins de aproximação, considere que, ao entrar na região de umbra da Terra, o *CubeSat* não coleta potência solar. Despreze os efeitos da atmosfera terrestre em seus cálculos.

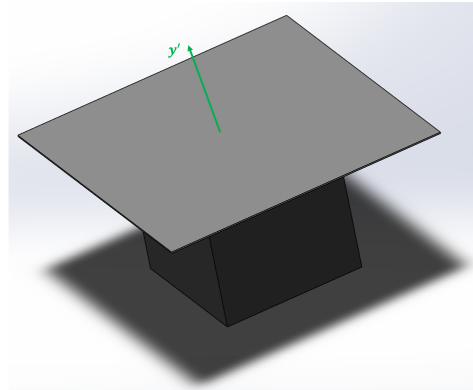
   a) **(8 pontos)** Para um projeto de sua universidade, Katarine lançou um *CubeSat* em uma órbita circular de baixa altitude, a apenas $h = 500\ km$ acima da superfície de nosso planeta. Sabendo que a órbita possui inclinação nula em relação ao plano da Eclíptica, determine o período iluminado desse satélite, em minutos.

   b) **(18 pontos)** Giovanna também lançará um *CubeSat*, com parâmetros orbitais semelhantes aos daquele projetado por Katarine, exceto pela inclinação orbital de $\varepsilon = 60°$ em relação ao plano da Eclíptica. Sabe-se também que a linha dos nodos dessa órbita é sempre perpendicular à direção Sol-Terra e que, ao passar pelo nodo ascendente, o satélite está se afastando do Sol. Assim, determine o período iluminado para tal configuração, em minutos.

Para os projetos de ambas as universitárias, o satélite manterá sua orientação constante em relação ao Sol, definida pelo ângulo φ, conforme as imagens abaixo. O eixo x indica a direção de incidência dos raios solares, a qual não varia ao longo do tempo.



(a) Orientação do satélite



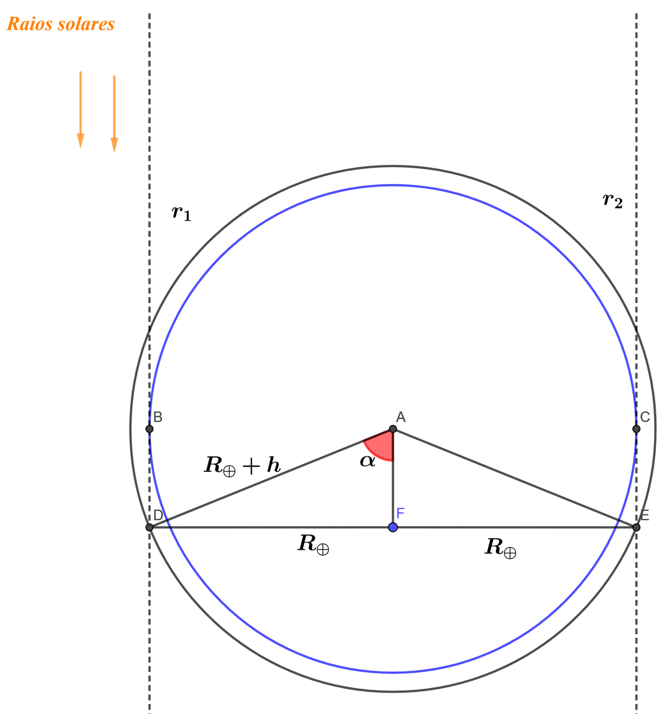
(b) Painel fotovoltaico

c) **(9 pontos)** Obtenha a expressão para a energia E coletada pelo painel solar ao longo de uma órbita em função do fluxo solar $F_{\odot}$, do ângulo φ, da área da placa fotovoltaica A e de sua eficiência η; e do período iluminado Δt.

d) **(5 pontos)** Calcule o valor de E, em kJ, para as situações dos itens b) e c). Considere $A = 0,1\ m^2$ e $\eta = 16\%$ para ambos os *CubeSats*, mas $\varphi_K = 45°$ para o de Katarine e $\varphi_G = 50°$ para o de Giovanna.

Solução:

a) Para determinar o período iluminado, basta encontrar o intervalo de tempo em que o satélite não está na região de umbra. No caso da primeira órbita, conforme o esquema abaixo, a região de umbra é delimitada pelas retas r_1 e r_2.



Desse modo, ao percorrer $360° - 2\alpha$, o satélite estará em seu período iluminado. Assim, calcula-se:

$$\sin\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{6,38\cdot 10^6}{6,38\cdot 10^6 + 500\cdot 10^3} \iff \alpha = 68,02^\circ$$

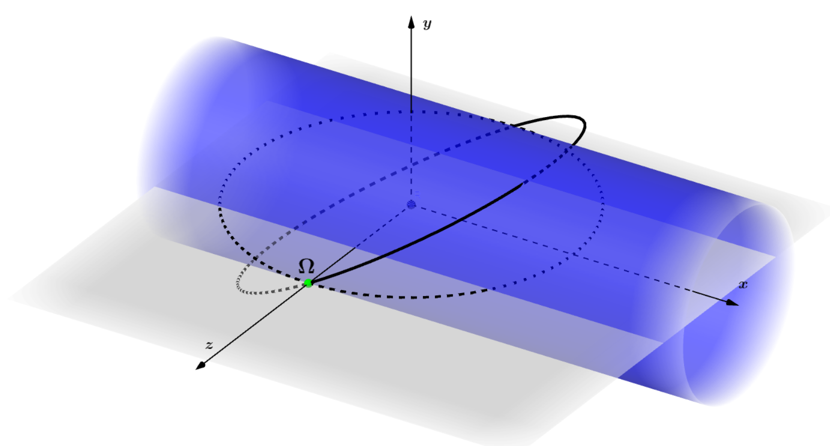
O período da órbita é determinado pela Terceira Lei de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_\oplus + h)^3}{GM_\oplus}} = 5677,39\ s = 1,577\ horas$$

Por fim, o período iluminado Δt_i será:

$$\frac{\Delta t_i}{360^\circ - 2\alpha} = \frac{T}{360^\circ} \iff \boxed{\Delta t_i = 0,981\ hora = 58,9\ minutos}$$

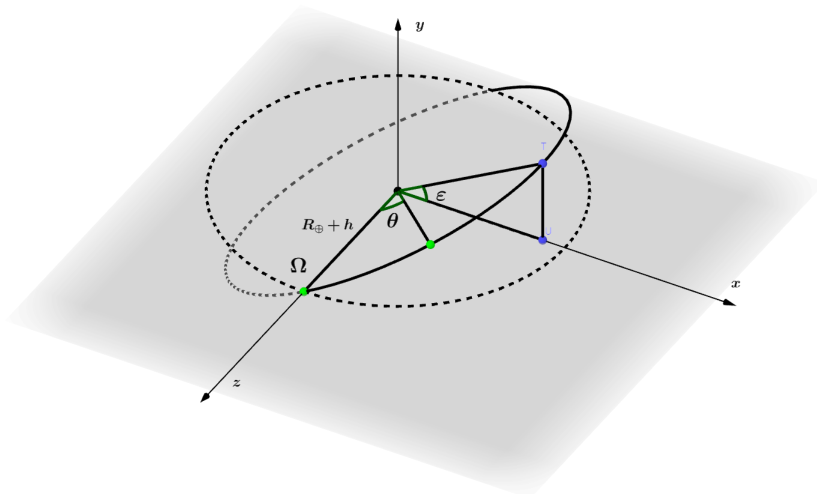
b) Para o caso da órbita inclinada, deve-se levar em conta o fato de a umbra ser um cilindro. Assim, esquematiza-se, sendo o centro do sistema de coordenadas fixo na Terra e a direção x sempre paralela aos raios solares. A região interior ao cilindro é a zona de umbra.



Assim, enquanto o *CubeSat* estiver dentro do cilindro de umbra, não estará em seu período iluminado. Antes de se iniciar os cálculos, deve-se verificar se, de fato, o satélite adentra a região de umbra. Para tanto, toma-se o ponto de maior altitude, H, em relação à Eclíptica:

$$H = (R_\oplus + h)\sin\varepsilon = 5,96\cdot 10^6\ m < R_\oplus$$

Logo, a condição é atendida. Esquematicamente,



as coordenadas do satélite em um ponto qualquer de sua órbita são definidas como abaixo. Por praticidade, usa-se $r = R_\oplus + h$.

$$(x_s, y_s, z_s) = (r\sin\theta\cos\varepsilon, r\sin\theta\sin\varepsilon, r\cos\theta)$$

Para estar dentro do cilindro de umbra, a condição é

$$y_s^2 + z_s^2 \leqslant R_\oplus^2$$

Em termos dos ângulos θ e ε:

$$(r\sin\theta\sin\varepsilon)^2 + (r\cos\theta)^2 \leqslant R_\oplus^2$$

Dada a simetria do problema e a garantia de que o ponto de maior altitude em relação à Eclíptica encontra-se dentro da umbra, pode-se encontrar apenas o ângulo limite θ:

$$(r\sin\theta\sin\varepsilon)^2 + (r\cos\theta)^2 = R_\oplus^2$$

Usando a relação fundamental $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, tem-se

$$(r\sin\theta\sin\varepsilon)^2 + r^2(1 - \sin^2\theta) = R_\oplus^2 \iff$$

$$\sin\theta = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2 - R_\oplus^2}{1 - \sin^2\varepsilon}} = 0,7485 \iff \theta = 48,46^\circ$$

Por fim, o período iluminado $\Delta t_i'$ será:

$$\frac{\Delta t_i'}{180^\circ + 2\theta} = \frac{T}{360^\circ} \iff \boxed{\Delta t_i' = 1,213\ hora = 72,8\ minutos}$$

c) Primeiramente, é necessário obter a área projetada da placa na direção dos raios solares. Assim, da figura do enunciado,

$$A_P = A\sin\varphi$$

é a área efetiva de coleta de radiação solar. Desprezando-se a variação do Fluxo Solar ao longo de uma órbita, tem-se:

$$\boxed{E = \eta F_{\odot} A \sin\varphi \Delta t}$$

d) A constante solar é, dos valores da Tabela de Constantes,

$$F_{\odot} = \frac{3,83 \cdot 10^{26}}{4\pi(1,496 \cdot 10^{11})^2} = 1355\ W/m^2$$

Agora, basta substituir os valores:

$$E_K = 0,16 \cdot 1355 \cdot 0,1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 58,9 \cdot 60 = \boxed{54,2\ kJ}$$

e, para o de Giovanna,

$$E_G = 0,16 \cdot 1355 \cdot 0,1 \cdot \sin 50^\circ \cdot 72,8 \cdot 60 = \boxed{72,5\ kJ}$$

Questões Longas

9. **(70 pontos)** A galáxia M63 ou NGC 5055, chamada de galáxia do girassol, é do tipo espiral Sa. Vamos encontrar algumas medidas de parâmetros físicos desta galáxia vista pelo nosso querido povo do planeta Kafsh.

A astrônoma do planeta, Giulia, estudando o objeto luminoso, faz uma medida espectroscópica na largura máxima da galáxia, isto é, ao longo do eixo maior da imagem, e descobre o gráfico que está ao final da questão - já corrigido em decorrência de efeitos cosmológicos. Conforme observa-se pontos da galáxia a diferentes distâncias angulares ao centro, eixo y, o desvio da linha de H_α de comprimento de onda de laboratório $\lambda_0 = 6563$ Å é registrado no eixo horizontal.

Sabe-se também que a galáxia de formato aproximadamente circular possui magnitude absoluta bolométrica de $M_{\text{bol}} = -20,43$, que a extinção interestelar média por unidade de distância ao longo do caminho até a galáxia é $a_{bol} = 1,7 \cdot 10^{-4}$ mag/kpc e que a inclinação da galáxia com o plano do céu é $i = 71,8^\circ$.

(a) **(8 pontos)** Dado que a magnitude bolométrica aparente observada é $m_{\text{bol}} = 10,82$, encontre a distância até M63 em Mpc. Desconsidere efeitos de extinção atmosférica.

(b) **(6 pontos)** Sabendo que a largura angular visível máxima do disco é $2\alpha = 460$ arcsec e que sua magnitude superficial média no infravermelho é $I' = 21,648$ mag $\cdot$ arcsec^{-2}, calcule a magnitude aparente observada da galáxia nessa banda.

(c) **(20 pontos)** A relação de Tully-Fisher afirma que a luminosidade de galáxias espirais é proporcional a sua velocidade máxima (a velocidade constante com a distância ao centro) elevada à quarta potência. Isto é, $L = CV_{max}^4$. Obtenha a relação de Tully-Fisher assumindo que a luminosidade é diretamente proporcional à massa da galáxia e a luminosidade por unidade de área no centro da galáxia é constante. Considere também que a luminosidade do núcleo é diretamente proporcional a luminosidade total da galáxia e o raio do núcleo é diretamente proporcional ao raio galáctico.

(d) **(15 pontos)** Considere os seguinte ajustes para o método de Tully-Fisher, em que M_I é a magnitude absoluta da galáxia na banda do infravermelho:

- Para galáxias espirais do tipo Sa: $M_I = -9,95 \log (V_{max}(\text{km/s})) + 3,04$
- Para galáxias espirais do tipo Sb: $M_I = -10,2 \log (V_{max}(\text{km/s})) + 2,71$

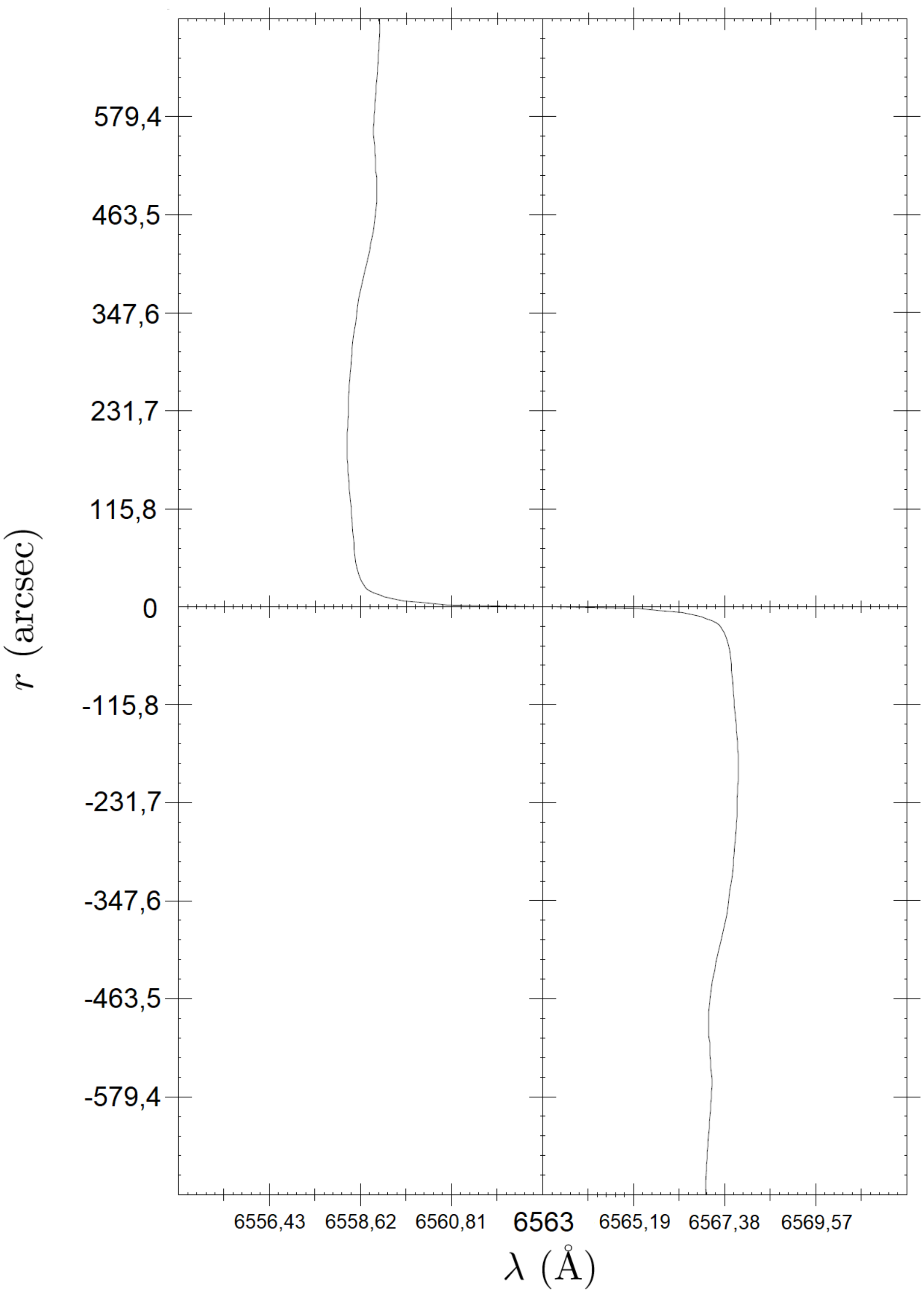
- Para galáxias espirais do tipo Sc: $M_I = -11,0 \log(V_{max}(\text{km/s})) + 3,31$

Encontre a distância, em Mpc, até a galáxia NGC 5055 utilizando esse método.

(e) **(11 pontos)** A partir do gráfico ao final da questão, calcule a massa da galáxia ($M_{G,T}$), em massas solares. Considere que o raio limite da galáxia é em $r = 872$ arcsec.

(f) **(6 pontos)** Considerando que toda a luminosidade da galáxia seja proveniente de estrelas de luminosidade $0,56L_\odot$ e massa $5,0M_\odot$, calcule a massa luminosa da galáxia.

(g) **(4 pontos)** Calcule a razão entre a massa $M_{G,T}$ e a massa luminosa. Explique o fato da razão ser diferente de 1.



Solução: OBS: um importante conceito de cosmologia é o de distância própria e distância-luminosidade, a própria trata-se do afastamento real entre os corpos para um certo instante t, já a de luminosidade é a calculada pela simples expressão $d_L = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi F}}$. Desde o momento em que a luz é emitida até incidir no observador, a expansão do universo alonga o seu comprimento de onda, o que altera as medidas fotométricas da galáxia, logo d_L carrega um certo erro que deve ser corrigido para que se obtenha a distância real, a própria. Nos itens (a) e (d) calculamos distâncias-luminosidade, no entanto descartamos esse efeito, já que não é tão apreciável para este caso, pois o redshift da galáxia é pequeno para os valores tratados.

(a)

Quando há poeira e/ou gás interestelar entre o observador e o objeto luminoso, o seu brilho é diminuído. Neste caso, sua magnitude é aumentada da seguinte maneira, seja d a distância até M63:

$$m_{bol(ext)} = m_{bol} + a_{bol} \cdot d$$

Usando a equação de Pogson

$$m_{bol} - M_{bol} = 5 \log \left(\frac{d(\text{pc})}{10} \right)$$

Juntando as equações e substituindo os valores do enunciado, para d em pc:

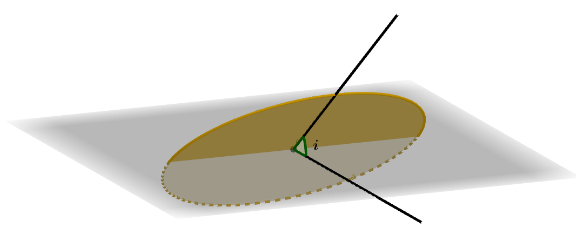
$$10,82 - (-20,43) = 5(\log d - 1) + 1,7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot d$$

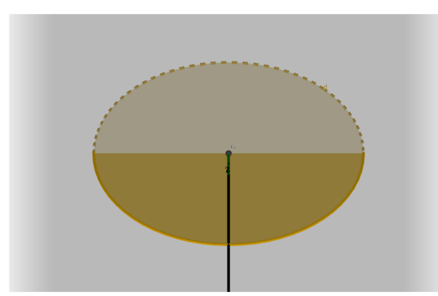
Resolvendo a equação transcendental acima usando iteração, encontramos:

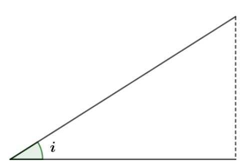
$$\boxed{d = 8,9 \text{ Mpc}}$$

(b)

Um círculo observado a partir de um ângulo i entre o seu plano e uma direção ortogonal à visada é visto como uma elipse cujo semi-eixo menor é igual a $\beta = \alpha \cdot \cos i$. Na imagem a seguir ilustramos essa ideia:







Seja F o fluxo de um objeto celeste luminoso, m a magnitude aparente do objeto e A a área angular (ângulo sólido) compreendida por ele no céu, $f = F/A$ é o fluxo desse objeto para uma unidade de ângulo sólido. A magnitude superficial S é definida como sendo a magnitude correspondente ao fluxo f e em um abuso de notação é denotada por mag/arcsec^2 ou mag/rad^2, portanto:

$$S - m = -2,5 \cdot \log\left(\frac{f}{F}\right)$$

$$S = m + 2,5\log(A)$$

Conhecendo a área da elipse, $A = \pi\alpha\beta$, e com base no anterior, calculamos a magnitude da galáxia na banda I:

$$m_I = 21,648 - 2,5\log\left(\pi \cdot 230 \cdot (230 \cdot \cos(71,8^\circ))\right)$$

$$\boxed{m_I = 9,86}$$

(c)

Pelo enunciado, temos as seguintes constatações:

- A luminosidade é diretamente proporcional à massa:

$$L = C_1 M$$

- A luminosidade por unidade de área no centro da galáxia é constante:
  Seja l a luminosidade no centro e r o raio do centro, então:

$$\frac{l}{r^2} = C_2$$

- A luminosidade central é proporcional a total:

$$l = C_4 L$$

- O raio central é proporcional ao raio galáctico:

$$r = C_5 R$$

Juntando as três últimas expressões acima:

$$\frac{l}{r^2} = C_2 \Rightarrow \frac{C_4 L}{C_5 R} = C_2 \Rightarrow \frac{L}{R^2} = C_6$$

À uma distância R do centro, já na periferia da galáxia, igualando força centrípeta com gravitacional para uma massa qualquer m, podemos considerar que a velocidade orbital é igual a da região assintótica, ou seja, que é constante e igual a V_{max}:

$$\frac{mV_{max}^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \;\Rightarrow\; M = \frac{RV_{max}^2}{G}$$

Unindo com a primeira expressão:

$$L = C_1\frac{RV_{max}^2}{G} = C_7 R V_{max}^2 \Rightarrow L^2 = C_7^2 R^2 V_{max}^4$$

Finalmente:

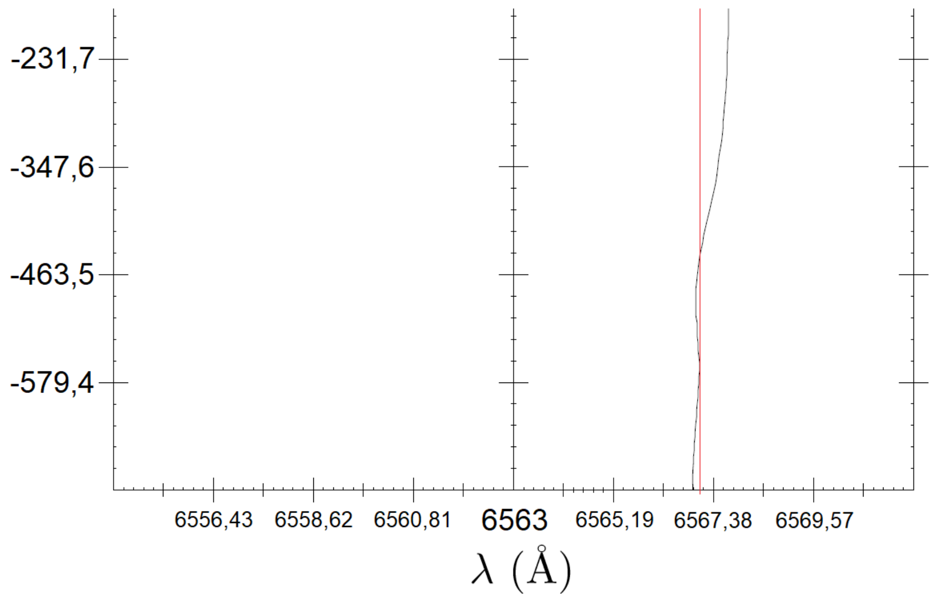
$$L^2 = C_7^2 \left(\frac{L}{C_6}\right) V_{max}^4 \Rightarrow L = (C_7^2/C_6)V_{max}^4$$

$$\boxed{L = CV_{max}^4}$$

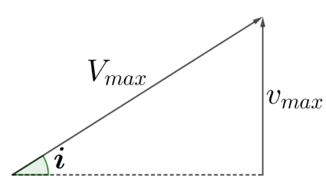
(d)

A nossa M63 é do tipo Sa, então utilizamos o primeiro ajuste do método de Tully-Fisher.

Inspecionando o gráfico da questão, verificamos que o comprimento de onda de H_α referente a velocidade já na região assintótica está um pouco antes de $\lambda = 6567,38$ Å, o valor é aproximadamente $\lambda = 6567,161$ Å, que corresponde a $\frac{v_{max}}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \Rightarrow v_{max} = 190,071$ km/s.



Além disso, sabemos que a galáxia está inclinada em relação ao plano do céu, portanto sua velocidade é diminuída por um fator $\sin i$, como notamos com a imagem abaixo, assim: $V_{max} = \frac{v_{max}}{\sin i} = \frac{190{,}071}{\sin(71{,}8°)} \Rightarrow V_{max} = 200,0807$ km/s



Substituindo a velocidade encontrada na relação de Tully-Fisher, encontramos a magnitude absoluta na banda I:

$$M_I = -9,95 \cdot \log(200,0807) + 3,04 \Rightarrow M_I = -19,857$$

Agora, fazemos o módulo de distância com a magnitude aparente na banda I encontrada no item b), $m_I = 9,86$, e por fim encontramos a distância até a galáxia:

$$m_I - M_I = 5(log(d(\text{pc})) - 1) \Rightarrow d(\text{pc}) = 10^{\frac{m_I - M_I}{5} + 1}$$

$$d(\text{pc}) = 10^{1+\frac{9,86+19,857}{5}} \Rightarrow d = 8,77809 \cdot 10^6 \text{ pc}$$

$$\boxed{d = 8,8 \text{ Mpc}}$$

(e)

Igualando força centrípeta e gravitacional para uma massa m orbitando a galáxia a uma distância R, a uma velocidade V_R e sofrendo influência de uma massa M_R:

$$\frac{mV_R^2}{R} = \frac{GM_R m}{R^2} \;\Rightarrow\; M_R = \frac{RV_R^2}{G}$$

No limite da galáxia, temos toda a sua massa, $M_{G,T}$, à distância R tal que $r = 872$ arcsec e a velocidade correspondente já é da região assintótica, ou seja, $V = V_{max}$, então:

$$M_{G,T} = \frac{RV_{max}^2}{G}$$

Com a distância d, temos: $R = d \cdot r = (8,9 \text{ Mpc}) \cdot (872 \text{ arcsec}) = 37,62542$ kpc.

A velocidade V_{max} já foi encontrada no item anterior, vale $200,0807$ km/s.

Substituindo os valores na expressão, temos a massa da galáxia:

$$\boxed{M_{G,T} = 3,5 \cdot 10^{11}\ M_\odot}$$

(f)

OBS: Uma estrela de 5 massas solares e 0,56 luminosidade solar é impossível, esta foi meramente uma "estrela-média", para que pudessemos produzir a resposta final coerente com os dados experimentais corretos da galáxia. Além disso, tais valores não impedem a solução do item (f), que apresentaremos a seguir.

Vamos calcular o número de estrelas a partir da luminosidade da galáxia e multiplicar pela massa de cada uma para obter a massa luminosa total da galáxia. Seja N o número de estrelas na galáxia, da equação de Pogson:

$$M_{bol} - M_{bol,\odot} = -2,5\log\left(L_G/L_\odot\right) \Rightarrow L_G = 10^{\frac{M_{bol,\odot} - M_{bol}}{2,5}} L_\odot$$

$$N = \frac{L_G}{L_*} = \frac{10^{\frac{M_{bol,\odot} - M_{bol}}{2,5}} L_\odot}{0,56 L_\odot} = 0,56^{-1} \cdot 10^{\frac{4,8+20,43}{2,5}}$$

Onde $M_\odot$ é a magnitude absoluta bolométrica do Sol, igual a $4,8$.

Juntando as equações e substituindo os valores, obtemos $N = 2,207 \cdot 10^{10}$ estrelas.

Cada uma dessas estrelas contribui com uma massa de $5,0$ massas solares, então a massa luminosa da galáxia M_L será:

$$M_L = 5 \cdot N$$

$$\boxed{M_L = 1,1 \cdot 10^{11}\ M_\odot}$$

(g)

Fazendo a razão entre as massas calculadas nos itens (d) e (e):

$$m = \frac{M_{G,T}}{M_L} \Rightarrow \boxed{m = 3,18}$$

A razão é diferente de 1, mais precisamente é maior do que 1, devido à presença da matéria escura, um tipo de matéria que não interage com a luz e portanto não é contada na massa luminosa, porém influencia gravitacionalmente e é contada na massa gravitacional calculada.

10. **(80 pontos)** O uso de velas solares tem grande relevância em modelos teóricos de propulsão. Em meados da década de 1990 foi proposto um método que permite que uma espaçonave equipada com velas solares atinja velocidades de cruzeiro capazes de escapar do sistema solar a velocidades muito maiores do que as atingidas por outros métodos de propulsão avançados, como propulsão nuclear. Nesse problema, analisaremos alguns modelos de propulsão com o objetivo final de escapar do sistema solar. Para isso, considere que em todas as situações de lançamento - a partir da Terra - é dia de solstício e que tais lançamentos ocorrem à meia noite.

   (a) **(5 pontos)** Qual a mínima velocidade, em km/s, de que uma espaçonave precisa (em relação à superfície do ponto de lançamento) para que se adquira uma órbita final heliocêntrica, lançada:

      i. do polo Norte?

      ii. da linha do Equador?

   Desconsidere qualquer força exercida pela atmosfera na espaçonave.

   (b) **(10 pontos)** Calcule a velocidade mínima necessária, em km/s, que um satélite deve ter (em relação à superfície do ponto de lançamento) para que escape do campo gravitacional solar, sendo lançado a partir da linha do Equador.

   (c) **(10 pontos)** Uma espaçonave é lançada da Terra a partir do Equador de modo que adquira uma órbita heliocêntrica aproximadamente circular de raio $R = 1\ UA$. A partir do momento em que passa por sua posição de periélio, o satélite gera um impulso responsável por aumentar sua velocidade em 10%, realizando isso a cada revolução. Após quantas dessas propulsões no periélio o satélite escapará do campo gravitacional solar e adquirirá uma órbita aberta?

   (d) **(10 pontos)** Calcule a razão q ($0 < q < 1$) entre a eficiência dos dois métodos acima (do item b e do item c). Considere que a eficiência é definida como sendo o somatório dos impulsos Δv (variação de velocidade a cada propulsão) utilizados desde o lançamento da Terra até que se atinja o objetivo final - escapar do campo gravitacional solar.

Agora, analisaremos um modelo de propulsão fazendo uso de uma vela solar. Considere que uma espaçonave foi lançada em uma órbita solar quase circular com um raio de $1\ UA$. Uma vela solar perfeitamente refletora foi implantada nela, de modo que ficasse constantemente voltada para o Sol, reduzindo a força central inicialmente exercida na espaçonave em 2%.

   (e) **(10 pontos)** Considerando o exposto acima e sabendo que a massa da superfície refletora corresponde a 5% da massa total do sistema que compõe a espaçonave, calcule a densidade superficial (em g/m^2) da vela.

No curso de seu movimento, esta vela se fechou instantaneamente assim que o aparelho atingiu o afélio de sua órbita, sendo reaberta no periélio, repetindo esse ciclo a cada revolução.

   (f) **(30 pontos)** Quantas revoluções completas ao redor do Sol - a partir do momento em que a vela foi fechada pela primeira vez - essa espaçonave fará antes que sua excentricidade fique maior ou igual a 1 e essa saia do sistema solar em uma órbita aberta? A interação do aparelho com todos os corpos, exceto o Sol e seus fótons, deve ser desprezada. Não é necessário considerar o efeito de Poynting-Robertson - isto é, desconsidere o torque exercido pela força da radiação.

(g) **(5 pontos)** Calcule a distância da espaçonave até o centro do Sol (em UA) no momento da última vez em que a vela é reaberta.

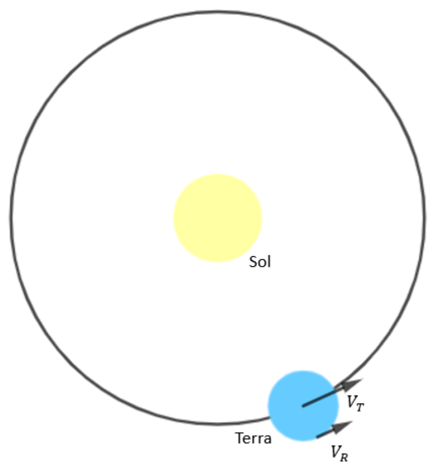
Solução:

(a) Para que a espaçonave orbite o Sol ela deve ser capaz de escapar da atração gravitacional da Terra, possuindo velocidade mínima relativa à Terra igual à velocidade de escape para um corpo na superfície terrestre.

$$V_{esc\oplus} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Assim, a velocidade para o primeiro caso é $\boxed{11,2km/s}$.

Para o caso do Equador é necessário considerar a rotação da Terra, que fornecerá um incremento de velocidade à espaçonave. Como a Terra está em uma situação de solstício, à meia noite sua velocidade de rotação no Equador será paralela à sua velocidade de translação, conforme mostrado no esquema abaixo:



A velocidade será então, nesta situação, a velocidade do primeiro caso menos a velocidade de rotação da Terra (V_R)

$$V_R = \frac{2\pi}{T_\oplus} R_\oplus = 0,47\ km/s$$

Onde $T_\oplus$ é o período de rotação da Terra.
Assim, a velocidade mínima deste caso é igual a $10,7\ km/s$

(b) A velocidade de escape para uma órbita heliocêntrica de raio 1 UA é simplesmente:

$$V_{esc\odot} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a_\odot}} = \sqrt{2} \cdot V_{Terra} = 42,1\ km/s$$

Primeiramente, a nave precisa escapar do campo gravitacional terrestre, de modo que:

$$\frac{V_f^2}{2} = \frac{V_i^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}$$

Em relação ao Sol, a velocidade do satélite deve ser $\sqrt{2} \cdot V_{Terra}$. Assim, em relação à Terra, teremos que $V_f = (\sqrt{2}-1) \cdot V_{Terra}$. Substituindo na equação acima, encontramos que $V_1 = 16,7\ km/s$. Ainda, como o objeto é lançado no equador, precisamos entrar no referencial do ponto de lançamento, de modo que:

$$\boxed{V_{lancamento} = V_1 - V_R = 16,2\ km/s}$$

(c) A velocidade da órbita inicial é $v_0 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$.

Note que mesmo após os impulsos, o periélio se manterá constante em $R = 1$ UA.

A velocidade v_N após N impulsos é dada por:

$$v_N = 1,1^N v_0$$

Quando isso chegar na velocidade de escape do sistema Solar, $v_e = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R}}$, o satélite ficará com uma órbita aberta. Assim, nessa situação:

$$1,1^N \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R}}$$

Com isso, obtemos $N = 3,63$. Como N é inteiro, o resultado final é $\boxed{N = 4}$.

(d) Para a segunda situação, usaremos quatro impulsos, como calculado no item anterior. Cada variação de velocidade será dada por:

$$\Delta v_N = \left(1,1^N - 1,1^{N-1}\right) v_0$$

onde $N \in \{1, 2, 3, 4\}$. Precisamos também somar a velocidade de escape inicial da Terra, do item a, 10,7 km/s. Somando todas as variações de velocidade, vários termos serão cancelados, de forma que a variação total fica $\Delta v_2 = 10,7\ km/s + (1,1^4 - 1)v_0 = 24,5$ km/s.

A variação para o primeiro método, como calculado no item b, é $\Delta v_1 = 16,2$ km/s.

Com esses dois valores,

$$q = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}$$

$$\boxed{q = 0,661}$$

(e) Para uma placa totalmente refletora e que fica constantemente voltada para o Sol, teremos uma pressão de radiação dada por:

$$P_{rad} = \frac{2F_\odot}{c}$$

Assim, podemos escrever a seguinte equação para a força:

$$F_{rad} = \frac{2L_\odot}{4\pi r^2 c} \cdot A = 2\% \cdot \frac{GMm_{tot}}{r^2} = \frac{GM_\odot m_{tot}}{50r^2}$$

Temos que $m_{vela} = 5\% \cdot m_{tot} = m_{tot}/20$. Assim:

$$\frac{L_\odot}{2\pi r^2 c} \cdot A = \frac{2GM_\odot m_{vela}}{5r^2}$$

$$\sigma = \frac{m_{vela}}{A} = \frac{5L_\odot}{4\pi GM_\odot c}$$

Substituindo os valores acima, encontramos:

$$\boxed{\sigma = 3,8\ g/m^2}$$

(f) Vamos, nesse problema, encontrar as sequências que nos dão a excentricidade nos seguintes momentos:

- $e_n \longrightarrow$ excentricidade da órbita imediatamente após a n-ésima vez que a vela é fechada (no afélio)
- $E_n \longrightarrow$ excentricidade da órbita imediatamente após a n-ésima vez que a vela é aberta (no periélio)

Como a gravidade efetiva é reduzida de 2%, nos momentos que a vela está aberta, é como se a espaçonave estivesse sob ação gravitacional de um corpo de massa $\frac{49M}{50}$, onde M é a massa do Sol. Assim, vamos analisar dois momentos genéricos em que a espaçonave passa pelo periélio e pelo afélio logo em seguida:

i. **Momento de passagem pelo periélio:** Podemos escrever as seguintes equações para o momento imediatamente antes da vela se abrir:

$$r_n = a_n(1 - e_n)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{GM}{a_n} \cdot \frac{1 + e_n}{1 - e_n}} = \sqrt{\frac{GM}{r_n} \cdot (1 + e_n)}$$

Para o momento imediatamente após a vela se abrir, a espaçonave terá a mesma velocidade V_n e mesma distância periélica. Contudo, terá uma gravidade efetiva distinta:

$$r_n = A_n(1 - E_n)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{49GM}{50A_n} \cdot \frac{1 + E_n}{1 - E_n}} = \sqrt{\frac{49GM}{50r_n} \cdot (1 + E_n)}$$

Comparando as equações acima:

$$E_n = \frac{50e_n + 1}{49}$$

ii. **Momento de passagem pelo afélio:** Podemos escrever as seguintes equações para o momento imediatamente antes da vela se fechar:

$$R_{n+1} = A_n(1 + E_n)$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{49GM}{50A_n} \cdot \frac{1 - E_n}{1 + E_n}} = \sqrt{\frac{49GM}{50R_{n+1}} \cdot (1 - E_n)}$$

Para o momento imediatamente após a vela se fechar, a espaçonave terá a mesma velocidade v_{n+1} e mesma distância afélica. Contudo, terá uma gravidade efetiva distinta:

$$R_{n+1} = a_{n+1}(1 + e_{n+1})$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{GM}{a_{n+1}} \cdot \frac{1 - e_{n+1}}{1 + e_{n+1}}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{n+1}} \cdot (1 - e_{n+1})}$$

Comparando as equações obtidas:

$$e_{n+1} = \frac{49E_n + 1}{50} = e_n + \frac{1}{25} = e_n + 0,04$$

$$e_{n+1} - e_n = 0,04$$

Assim, a sequência e_n será uma progressão aritmética de razão $0,04$, de modo que:

$$e_n = \frac{n}{25}$$

Assim:

$$E_n = \frac{50e_n + 1}{49} \rightarrow E_n = \frac{2n + 1}{49}$$

A sequência que nos dará, então, a excentricidade para cada meia revolução será:

$$(e_1, E_1, e_2, E_2, e_3, E_3, e_4, E_4, \dots)$$

A sequência acima é válida até o primeiro valor em que teremos uma excentricidade maior ou igual a um. Perceba que para n=24, teremos $E_{24} = 1$. Assim, na 24^a passagem pelo periélio, a órbita se tornará aberta, e isso equivale a **23,5 revoluções** a partir do ponto em que a vela é fechada pela primeira vez.

(g) como as forças são centrais, podemos conservar o momento angular, de modo que:

$$v \cdot a = v_{perielio} \cdot r_{perielio}$$

$$\sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot a = \sqrt{\frac{GM}{r_{perielio}} \cdot (1 + e)} \cdot r_{perielio}$$

Assim

$$r_{perielio} = \frac{a}{1 + e}$$

No momento da última órbita antes de atingir excentricidade unitária, teremos que $n = 24$, e, portanto, $e = \frac{24}{25}$. Assim:

$$\boxed{r_{perielio} = 0,51\, UA}$$