Prova Teórica 2 - Gabarito PROVISÓRIO

Treinamentos 2020

Data: 14/08/2020

1. **(Massa de Aglomerados de Galáxias Observados em Raio-X - 12 pontos)** Na prova do ano passado, calculamos a massa do aglomerado de Coma usando o teorema do virial para galáxias do aglomerado. O teorema do virial relaciona a energia cinética à energia potencial gravitacional do aglomerado, assim o movimento das galáxias reflete a massa total do aglomerado. Como o astrofísico Fritz Zwicky percebeu, essa massa total é muito maior do que a massa medida através da luminosidade das galáxias que são membros do aglomerado, indicando que existe uma massa "invisível"ou faltante. Uma boa parte dessa massa faltante é, a agora famosa e exótica, matéria escura. Mas um outro bom bocado dessa massa faltante é feita de matéria bariônica, mas invisível à fotometria tradicional no óptico. Uma dessas componentes está em estrelas desgarradas que compõem a luz difusa ou luz intra-aglomerados, cujo brilho superficial é tão fraco – imagine um punhado de estrelas salpicado no volume de um aglomerado – que apenas mais recentemente começou a ser observada de forma corriqueira. A outra componente bariônica invisível é o gás quente dentro do aglomerado. Provavelmente produzido por explosões de supernovas nas galáxias e material ejetado pelo núcleos ativos de galáxias. Esse gás é tão quente que emite no raio-X. Da mesma forma que o movimento de galáxias "pesa"o aglomerado, o movimento dos elétrons no gás quente intra-aglomerado, sua energia cinética e brilho associado também pode "pesar"o aglomerado.

   Considerando que o aglomerado de galáxias de Coma é uma esfera de hidrogênio ionizado de raio 3 Mpc, temperatura $8,8 \cdot 10^7$ K, luminosidade de raio-X $L_X = 5 \cdot 10^{44}$ erg s^{-1} e dado que a densidade de luminosidade é dada por $L_{\text{vol}} = 1,42 \cdot 10^{-27} n_e^2 T^{1/2}$ erg s^{-1} cm^{-3}, onde n_e é a densidade numérica de elétrons livres e T é a temperatura do gás.

   (a) **(3 pontos)** Expresse a luminosidade de raio-X do gás em termos da densidade de luminosidade.

   (b) **(3 pontos)** Calcule a densidade de elétrons livre.

   (c) **(3 pontos)** Estime a massa do aglomerado em massas solares usando a massa do hidrogênio como referência ($m_H = 1,673534 \cdot 10^{-24}$ g; $M_{\text{Sol}} = 1,989 \cdot 10^{33}$ g; 1 pc $= 3,0857 \cdot 10^{18}$ cm).

   (d) **(3 pontos)** Compare a massa calculada acima com a massa estimada através da luminosidade das galáxias ($1,5 \cdot 10^{13}\ M_\odot$), ela é maior ou menor?

Solution:

(a)

Considerando o gás quente do aglomerado como uma esfera de hidrogênio ionizado podemos escrever que:

$$\boxed{L_X = \frac{4}{3}\pi R^3 L_{\text{vol}}}$$

(b)

Isolando n_e na expressão do item anterior e substituindo os valores:

$$n_e = \sqrt{\frac{3L_X}{4\pi R^3 \cdot 1,42 \cdot 10^{-27} \cdot T^{1/2}}}$$

$$\boxed{n_e = 1,06 \cdot 10^{-4}\text{cm}^{-3}}$$

(c)

Multiplicando a densidade numérica n_e pelo volume da esfera de gás e pela massa do átomo de Hidrogênio, já que para cada elétron no gás quente, existe um próton associado a ele, podemos calcular:

$$M_{\text{gás}} = \frac{4}{3}\pi R^3 n_e m_H$$

$$\boxed{M_{\text{gás}} = 2,96 \cdot 10^{14} M_\odot}$$

(d)

A massa do gás quente intra-aglomerado é bem maior que a massa estimada através da luz visível.

2. **(As Coordenadas - 12 pontos)** No dia 21 de março às 0:00 UTC Lais e Katarine decidiram fazer observações astronômicas na região do polo geográfico norte. Lais posicionou-se exatamente no polo e Katarine ficou em um local com latitude igual a $89^o N$ e longitude igual a 0^o. Uma estrela estava a uma altura de 89^o tanto para Katarine quanto para Lais nesse momento. Quais são as coordenadas equatoriais universais dessa estrela?

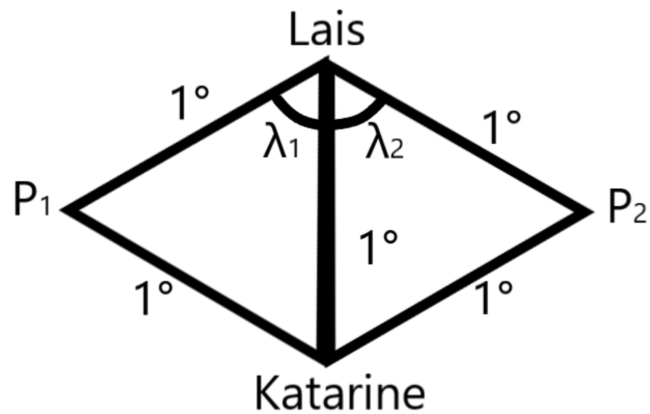
Importante: Existem duas respostas possíveis para essa questão. O aluno deve apresentar as duas respostas para obter a pontuação completa.

Solution:

Se a estrela está a 1^o do zênite tanto para Lais quanto para Katarine, ela deve estar exatamente no zênite para um observador que estiver a 1^o das duas astrônomas.

Como esse observador está a 1^o do polo norte, sua latitude é igual a $89^o N$.

É possível representar a situação da seguinte maneira para calcular a longitude desse observador:



Os pontos P_1 e P_2 são as possíveis localizações de um observador para o qual a estrela em questão estaria no zênite no instante dessa observação.

Como todos os lados do triângulo correspondem a arcos de 1^o, o triângulo é equilátero e seus ângulos internos são iguais a 60^o. É verdade que como o triângulo é esférico e não plano, os ângulos internos são um pouco maiores que 60^o. Contudo, o triângulo é suficientemente pequeno para ser considerado aproximadamente plano. O valor obtido para os ângulos internos com a lei dos cossenos para triângulos esféricos é 60.0025^o.

Dessa forma, os dois valores possíveis para a longitude do observador são $\lambda_1 = 60^o O$ e $\lambda_2 = 60^o L$. É conveniente converter esses valores para horas. Portanto, $\lambda_1 = -4h$ e $\lambda_2 = 4h$.

Agora, é possível encontrar as coordenadas equatoriais universais da estrela. Como ela está no zênite para um observador com latitude de $89^o N$, sua declinação é igual a $89^o N$.

Para obter a ascensão reta, é necessário considerar que em 21 de março, a ascensão reta do Sol é igual a $0h$. Como o Sol está no meridiano oposto ao meridiano local para um observador no Meridiano de Greenwich, a ascensão reta que corresponde a esse meridiano local é igual a $12h$.

Agora, é possível obter os dois valores possíveis para a ascensão reta:

$$\alpha_1 = 12h + \lambda_1 = 12h - 4h = 8h$$

$$\alpha_2 = 12h + \lambda_2 = 12h + 4h = 16h$$

Dessa forma, as possíveis coordenadas equatoriais universais da estrela são $\delta = 89^o N$ e $\alpha = 8h$ ou $\delta = 89^o N$ e $\alpha = 16h$.

3. **(Exoplaneta - 12 pontos)** Um exoplaneta foi descoberto orbitando uma estrela E, da sequência principal, que encontra-se a 310 anos-luz de distância da Terra. Estudos anteriores sobre essa estrela mostraram que sua temperatura efetiva era cerca de 7350K.

   O exoplaneta foi descoberto a partir do método de trânsito. Notou-se que o fluxo da estrela, que era de $3,76.10^{-8} W/m^2$ quando o exoplaneta não estava na frente, diminuía um centésimo durante o trânsito.

   Encontre o raio do planeta em km.

Solution:

Para determinar a relação entre os raios do planeta e da estrelas utilizaremos o decaimento do fluxo durante o trânsito.

Sabemos que o fluxo diminui cerca de um centésimo do fluxo total da estrela. Esse valor corresponde ao fluxo da área da estrela que foi ocultada pelo planeta, portanto possui o mesmo tamanho do planeta.

Sendo F_0 o fluxo total da estrela, d a distância da estrela à Terra, R_p o raio do exoplaneta, R_E o raio da estrela

$$\frac{1}{100}F_0 = \frac{4\pi R_p^2 \sigma T_{eff}^4}{4\pi d^2}$$

Sabendo que $F_0 = \frac{4\pi R_E^2 \sigma T_{eff}^4}{4\pi d^2}$, temos:

$$\frac{4\pi R_p^2 \sigma T_{eff}^4}{4\pi d^2} = \frac{1}{100}\frac{4\pi R_E^2 \sigma T_{eff}^4}{4\pi d^2} \Rightarrow R_p^2 = \frac{R_E^2}{100} \Rightarrow R_p = \frac{R_E}{10}$$

Encontramos a relação entre os raios, agora precisamos encontrar o valor de R_E para substituir na relação anterior.

Temos as informações do fluxo total da estrela que chega na Terra, a distância dela até nós e sua temperatura. Basta substituir na expressão para o fluxo e encontraremos o valor desejado.

$$F_0 = \frac{4\pi R_E^2 \sigma T_{eff}^4}{4\pi d^2} \Rightarrow R_E^2 = \frac{F_0 4\pi d^2}{4\pi \sigma T_{eff}^4} \Rightarrow R_E^2 = \frac{F_0 d^2}{\sigma T_{eff}^4} = \frac{3,76.10^{-8}.(2,93.10^{18})^2}{5,67.10^{-8}.(7350)^4} = 1,95.10^{21}$$

$$R_E = 4,42.10^7 km$$

Agora, substituindo na relação encontrada entre os raios:

$$R_p = \frac{R_E}{10} = \frac{4,42.10^7}{10} = \boxed{4,42.10^6 km}$$

4. **(Petstars - 12 pontos)** Carrit é um astrônomo com muita experiência em observação noturna. Ele conseguiu identificar um sistema formado por 3 estrelas, nomeando-as $Francis$, $Luke$ e $Hulk$. Sabendo que o mínimo fluxo possível proveniente do sistema é $1,41.10^{-5}\frac{W}{m^2}$, que as estrelas $Luke$ e $Hulk$ são iguais, e que o raio de $Francis$ é o dobro do raio de $Luke$, qual é a temperatura de $Hulk$?

   Dados:
   $T_{Francis} = 20000\ K$
   $R_{Luke} = 7,50.10^{10}\ m$
   Distância do sistema = 100 pc

   Solution:

Primeiramente, é válido observar que o caso em que o fluxo é mínimo acontece quando as estrelas *Luke* e *Hulk* estão eclipsando *Francis* ao mesmo tempo, e elas não eclipsam entre si. A seguir, segue a demonstração de que esse é o caso de fluxo mínimo:

Suponha que a temperatura de Luke e Hulk é maior que a temperatura de Francis. Então, o fluxo total é maior ou igual a:

$$F_{min} >= \frac{R_{Francis}^2}{d^2} \sigma \, T_{Francis}^4 = 2,14.10^{-5}$$

Absurdo! Portanto, a temperatura de Luke e Hulk é com certeza menor que 20000 K. Suponha agora que na situação de mínimo, Luke e Hulk eclipsam Francis e elas também eclipsam entre si. Definimos então a temperatura de Hulk e Francis. Agora, se as estrelas tiverem dispostas de maneira que elas eclipsam Francis, e não eclipsam entre si, o novo fluxo será menor do que o antigo. Ou seja, o antigo não era mínimo. Absurdo! Então, com certeza o caso de mínimo acontece como dito anteriormente.

Vamos então calcular, nessa situação, o fluxo de cada uma dessas estrelas. Como o fluxo é proporcional à área visível da estrela, temos:

- Para Francis, como está sendo eclipsada pelas duas outras estrelas, sua área visível será a sua área total menos a área das duas outras estrelas.

$$F_{Francis} = \frac{R_{Francis}^2}{d^2} \sigma \, T_{Francis}^4 \frac{\pi \, (R_{Francis}^2 - R_{Luke}^2 - R_{Hulk}^2)}{\pi \, R_{Francis}^2}$$

- Como *Hulk* e *Luke* não estão sendo eclipsadas, podemos calcular normalmente o fluxo delas.

$$F_{Luke} = F_{Hulk} = \frac{R_{Luke}^2}{d^2} \sigma \, T_{Luke}^4$$

A soma desses fluxos é o que foi observado por Carrit. Portanto, utilizando os valores do enunciado:

$$1,41 \; 10^{-5} \frac{W}{m^2} = F_{Francis} + F_{Luke} + F_{Hulk} = \frac{\sigma \, R_{Luke}^2}{d^2} (2T_{Francis}^4 + 2T_{Luke}^4)$$

$$\rightarrow \boxed{T_{Luke} = T_{Hulk} = 15000 \; K}$$

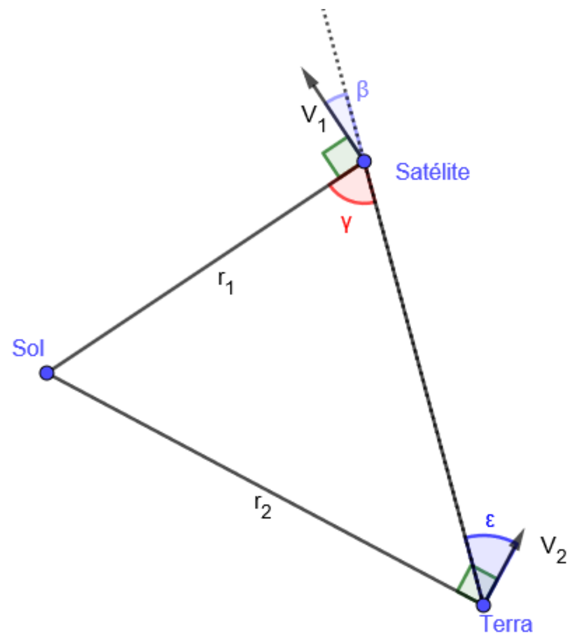
5. **(Satélite - 12 pontos)** Katarine, realizando um projeto de sua universidade, lança um satélite cuja órbita final é circular de raio $r_1 = 0,70 \; UA$ ao redor do Sol, no mesmo plano da órbita terrestre e translação no mesmo sentido que o de nosso planeta. A sonda emite luzes de sinalização com comprimento de onda de laboratório $\lambda_0 = 550 \; nm$. Assuma que a órbita da Terra também seja circular e determine o maior desvio $\Delta\lambda$ da luz emitida pelo satélite quando medido pela universitária.

Solution:

Da equação de Desvio Doppler:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

Considere o esquema abaixo para um instante genérico:



Podemos calcular a velocidade radial relativa v_r:

$$v_r = v_1 \cos\beta - v_2 \cos\varepsilon$$

Ainda do triângulo dado, encontra-se a relação entre β e ε:

$$\begin{cases} \gamma = 90^\circ - \beta \\ \frac{\cos\varepsilon}{r_1} = \frac{\cos\beta}{r_2} \end{cases}$$

De modo que a expressão para a velocidade radial será:

$$v_r = (v_1 - v_2\frac{r_1}{r_2})\cos\beta$$

O valor máximo dessa expressão ocorre quando $\beta = 0^\circ$. Retomando-se o desvio $\Delta\lambda$:

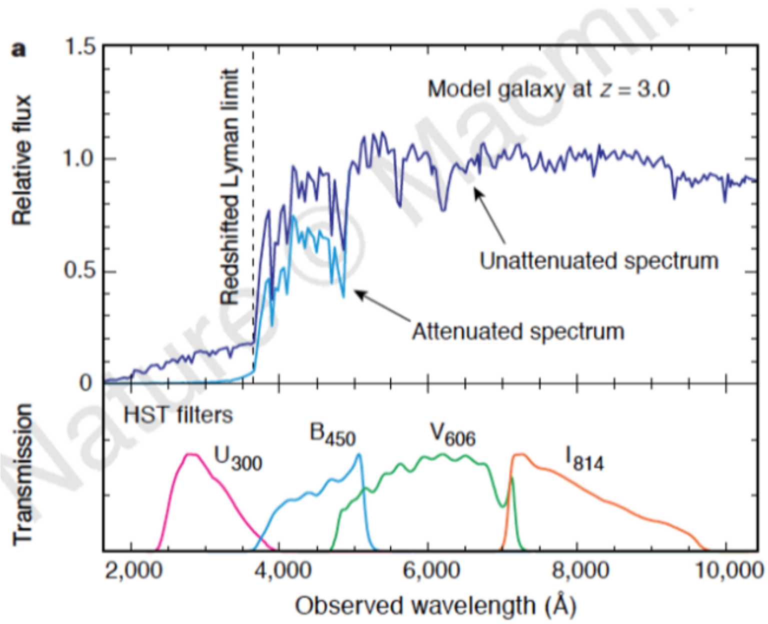
$$\Delta\lambda_{max} = \frac{\lambda_0}{c}(v_1 - v_2\frac{r_1}{r_2})$$

Como as órbitas são circulares:

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 35,6 \ km/s \\ v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = 29,8 \ km/s \end{cases}$$

Assim, $\boxed{\Delta\lambda_{max} = 0,027 \ nm}$

6. **(Procura pela Galáxia mais Distante - 30 pontos)** Em 2020, o Telescópio Espacial Hubble (HST) completou 30 anos em órbita. Uma de suas observações mais emblemáticas foi a imagem do Campo Profundo do Hubble (em inglês, Hubble Deep Field) que registrou cerca de 3 mil galáxias muito distantes por volta de redshift z ∼ 6. Redshift (z), ou desvio padrão para o vermelho, é a quantidade relacionada a velocidade de afastamento da galáxia por conta da expansão do universo, descoberta por Edwin Hubble, e cuja fórmula é dada por: $z = (\lambda_m - \lambda_r)/\lambda_r$; onde temos o comprimento de onda medido λ_m e em repouso λ_r. A atualização do HST com uma nova câmera que observa nos comprimentos de onda mais longos do infravermelho, possibilitou explorar o universo ainda mais distante, encontrando a galáxia mais distante até hoje, GN-z11, em z ∼ 11,09, através da medida de uma quebra no contínuo de seu espectro no comprimento de onda em 1,47 micrômetros.



a) **(7 pontos)** Qual é o comprimento de onda em Angstroms no repouso dessa quebra do contínuo?

b) **(10 pontos)** Sabendo que o HST tem filtros cujo centro está em 6000 e 8000 Angstroms, que redshifts seriam medidos se a quebra de contínuo estivesse em cada banda?

c) **(8 pontos)** A galáxia GN-z11 está a cerca de 32 bilhões de anos-luz de distância de nós, enquanto o universo tem menos de 14 bilhões de anos. Como isso é possível se nada viaja mais rápido que a luz?

d) **(5 pontos)** De uma maneira bem simples, considerando que o Campo Profundo do Hubble tem 3000 galáxias e uma área de 1/24000000 da área total do céu, quantas galáxias seriam visíveis no céu todo na profundidade do Campo Profundo?

Solution:

a) Usando a fórmula $z = \lambda_m - \lambda_p/\lambda_p$ onde $z = 11,09$ e $\lambda_m = 1,47\ \mu m$, podemos reescrever como

$$\lambda_p = \frac{\lambda_m}{(1+z)} = \frac{1,47.10^{-6}}{(1+11,09)} = 1,21588.10^{-7} = 1216\text{Å}$$

b) Utilizando a mesma fórmula:

- Para o filtro em 6000 Å, o redshift é de 3,93
- Para o filtro em 8000 Å, o redshift é de 5,58

c) A resposta está na expansão do universo, que aumentou a distância da galáxia no tempo em que sua luz levou para chegar até nós.

d) Desconsiderando que muitos dos objetos são invisíveis por não estarem na faixa de comprimento de onda do instrumento (visível) e a baixa representatividade do universo local de um campo minúsculo escolhido para explorar o universo distante, podemos multiplicar o número de galáxias pelo número de áreas que cabem no céu, ou 3000 por 24000000, o que resulta em 72 bilhões de galáxias. Curiosamente, o Legacy Survey of Space and Time do Observatório Vera Rubin no Chile vai observar cerca de 20 bilhões de galáxias em cerca de metade do céu, pois ainda não alcança a mesma profundidade do HUDF.

7. **(Brilho Superficial - 35 pontos)** A distribuição de diminuição de brilho superficial de uma galáxia espiral é dada por $I(r) = I_0 e^{-r/a}$, em que $I(r)$ é o brilho superficial (luminosidade por unidade de área a certa distância r do centro da galáxia) e a é uma constante de escala. A partir da relação anterior, pode-se encontrar por integração a luminosidade total do disco galáctico, $2\pi I_0 a^2$.

   Certa galáxia com brilho superficial satisfazendo a relação anterior tem constante de escala $a = 6,0$ kpc e luminosidade na banda B de $L_B = 2,5 \cdot 10^{10}\ L_\odot$.

   (a) **(5 pontos)** Deduza uma expressão para r em termos de a, $I(r)$ (em unidades de $L_\odot/\text{pc}^2$) e L.

   (b) **(20 pontos)** Formule uma expressão para conversão do brilho superficial em unidades de mag/arcsec^2 para $L_\odot/\text{pc}^2$ e mostre que tal grandeza é independente da distância até o observador. A expressão deve depender apenas da magnitude absoluta $M_{B\odot}$ do Sol na banda B.

   (c) **(10 pontos)** O Raio de Holmberg R_H é definido como a distância no disco galáctico desde o centro em que o brilho superficial é $26,5$ mag/arcsec^2, para a banda B. Encontre R_H para a galáxia em questão. Use, se necessário, que $M_{B\odot} = 5,44\ mag$.

Solution:

(a)

Podemos rearranjar a expressão da diminuição e isolar r:

$$\frac{I(r)}{I_0} = e^{-r/a} \implies$$
$$r = a \cdot \ln\left[\frac{I_0}{I(r)}\right]$$

Da luminosidade total na banda B, temos que:

$$I_0 = \frac{L_B}{2\pi a^2}$$

Portanto, a relação pedida é:

$$\boxed{r = a \cdot \ln\left[\frac{L_B}{2\pi I(r) a^2}\right]}$$

(b)

A primeira relação importante de se relembrar é

$$m_B - \mu_B = -2,5 \cdot \log \Omega_a$$

sendo μ o brilho superficial, em $mag/arcsec^2$ e Ω_a o ângulo sólido, em $arcsec^2$. Do módulo de distância, e usando os dados do Sol:

$$\begin{cases} m_B - M_B = 5 \cdot \log d - 5 \\ M_B - M_{B\odot} = -2,5 \cdot \log\left(L_B/L_{B\odot}\right) \end{cases} \Rightarrow m_B = 5 \cdot \log d - 5 + M_{B\odot} - 2,5 \cdot \log\left(L_B/L_{B\odot}\right)$$

O brilho superficial $I(r)$, em unidades de $L_\odot/pc^2$, relaciona-se à área emissora (em pc^2) e à luminosidade:

$$\begin{cases} I(r) = \frac{L_B}{A} \\ \Omega = \frac{A}{d^2} \end{cases} \implies \Omega = \frac{L_B}{I(r) d^2}$$

Para converter-se Ω, que está em unidades de sr, para Ω_a, basta lembrar-se que 1 rad = 206265 $arcsec$, de modo que:

$$\Omega_a = \Omega \cdot (206265)^2$$

Assim,

$$5 \cdot \log d - 5 + M_{B\odot} - 2,5 \cdot \log\left(L_B/L_{B\odot}\right) - \mu_B = -2,5 \cdot \log\left[\frac{L_B}{I(r) d^2} \cdot (206265)^2\right] \implies$$
$$\mu_B = -2,5 \cdot \log\left[\frac{I(r)}{(L_{B\odot}/pc^2)}\right] - 5 + M_{B\odot} + 5 \cdot \log(206265)$$

Isolando-se $I(r)$:

$$I(r)\ [L_{B\odot}/pc^2] = 10^{0,4\cdot(M_{B\odot}-\mu_B+21,572)} = \boxed{4,254\cdot 10^8\cdot 10^{0,4\cdot(M_{B\odot}-\mu_B)}}$$

Note que, de fato, a expressão independe da distância ao observador.

(c)

Do item anterior:

$$I(r)\ [L_{B\odot}/pc^2] = 4,254\cdot 10^8\cdot 10^{0,4\cdot(5,44-26,5)} = 1,6025$$

Da relação encontrada no item a)

$$R_H = 6,0\cdot 10^3\cdot \ln\left[\frac{2,5\cdot 10^{10}}{2\pi\cdot 1,6025\cdot(6,0\cdot 10^3)^2}\right] \approx \boxed{2,5\cdot 10^4\ pc}$$

8. **(Guerras Cósmicas - 35 pontos)** Shell e Nathan são imperadores supremos de planetas em dois sistemas estelares inimigos. A distância entre os planetas equivale a 15,0 anos-luz. Um dia, após séculos de guerras, Shell decidiu lançar um ataque para destruir Nathan de uma vez por todas. Para isso, Shell decidiu voar em sua nave mais poderosa, que pode atingir uma velocidade de 0,750c e acelerar quase instantaneamente, para utilizar sua arma mais poderosa no planeta de Nathan.

   (a) **(10 pontos)** Shell começa a preparar sua arma assim que a nave sai de seu planeta. Considerando que Shell precisa estar com a arma pronta assim que ele chegar no planeta de Nathan, quanto tempo ele pode demorar para preparar a arma?

A arma de Shell atira um composto radioativo extremamente tóxico. O tempo de meia-vida desse composto é igual a $12,25$ milissegundos e a razão entre a quantidade na amostra em função do tempo e a quantidade inicial é descrita por uma função exponencial na base e (número de Euler) cujo expoente é negativo e diretamente proporcional ao tempo. A arma de Shell é capaz de atirar esse composto a uma taxa de 158 mol/s e a uma velocidade de 0,300c.

Importante: O tempo de meia vida corresponde ao intervalo de tempo necessário para que a amostra seja reduzida pela metade.

Shell estaciona sua nave imediatamente acima da atmosfera do planeta de Nathan, que possui uma espessura de 706 km, e mira no palácio de Nathan, localizado no nível do mar.

   (b) **(10 pontos)** As defesas do palácio de Nathan conseguem resistir a um ataque de no máximo 112 mol/s. Dessa forma, Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell?

   (c) **(15 pontos)** Caso Shell não tivesse estacionado a nave e atirasse em movimento logo acima da atmosfera do planeta, Nathan teria sobrevivido ao ataque? Nesse caso, 0,300c seria a velocidade relativa entre o tiro e a nave movendo-se a 0,750c.

Solution: (a)

Shell precisa ter sua arma pronta até estar no planeta de Nathan, a uma distância D, então, no máximo, o tempo para prepará-la é o de viagem até o planeta inimigo.

Os eventos do problema, “nave de Shell sai do planeta de Shell”e “nave de Shell chega ao planeta de Nathan”, acontecem na mesma posição espacial para o referencial da nave, então o intervalo de tempo entre eles para Shell é o tempo próprio dos eventos. Já para um observador no planeta de largada, os eventos acontecem com uma separação espacial, então o intervalo de tempo Δt medido por esse observador e o intervalo de tempo $\Delta\tau$ medido por Shell estão relacionados da seguinte maneira (dilatação temporal):

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau$$

Sendo o fator gamma: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, em que v é a velocidade da nave no referencial do mencionado observador no planeta de largada.

Com $v = 0,750c$ e $D = 15$ anos-luz temos que:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{D}{v} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{15 \text{ anos-luz}}{0,75 \text{ ano-luz/ano}} = \frac{1}{\gamma}\cdot 20 \text{ anos} =$$

$$\boxed{\Delta\tau = 13,2 \text{ ano}}$$

(b)

Primeiramente, vamos encontrar a taxa do composto no tiro da arma de Shell em função do tempo no referencial do composto.

Seja n a taxa, $n_0 = 158$ mol/s a taxa no tempo $t = 0$ s e $t_{1/2} = 12,25$ ms a meia-vida do composto. Pelo enunciado, sabe-se que $\dfrac{n(t)}{n_0} = e^{-kt}$ e quando $t = t_{1/2}$ teremos $n(t) = n_0/2$, então:

$$\frac{n_0}{2} = n(t_{1/2}) = n_0 \cdot e^{-k\cdot t_{1/2}} \Rightarrow 1/2 = e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$n(t) = n_0 2^{-t/t_{1/2}}$$

A partir da expressão acima basta encontrarmos o tempo de viagem t_b, no referencial do tiro, entre a nave e o palácio de Nathan e verificar se $112 < n(t_b)$ ou $112 > n(t_b)$.

Repete-se o raciocínio feito em (a), com a distância $h = 706$ km, e tem-se:

$$t_b = \frac{1}{\gamma_{0,3}}\cdot\frac{h}{0,3c} = \frac{\sqrt{1-0,3^2}}{0,3}\cdot\frac{h}{c} \Rightarrow t_b = 7,4883 \text{ ms}$$

Finalmente:

$$n(t_b) = n_0 2^{-t_b/t_{1/2}} = 158 \cdot 2^{-\frac{7,4883}{12,25}} = 103,43 < 112 \Rightarrow$$

$\therefore$ <u>Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell.</u>

(c)

Para encontrarmos a velocidade do tiro no referencial de Nathan, basta fazer a soma relativística direta da velocidade do tiro e da velocidade da nave que movem-se no mesmo sentido. Faz-se:

$$V = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \quad \text{ou} \quad \beta_{res} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

Assim, a velocidade do tiro V para Nathan será: $V = \dfrac{0,75+0,3}{1+0,75\cdot 0,3}c \Rightarrow V = 0,857c$

Repetindo o raciocínio usado em (b) para o tempo de viagem t_c tem-se:

$$t_c = \frac{\sqrt{1-0,857^2}}{0,857} \cdot \frac{h}{c} \Rightarrow t_c = 1,415 \text{ ms}$$

Finalmente:

$$n(t_c) = n_0 2^{-t_c/t_{1/2}} = 158 \cdot 2^{-\frac{1,415}{12,25}} = 145,84 > 112 \Rightarrow$$

$\therefore$ Nesta situação, Nathan não sobreviveria ao ataque de Shell.

9. **(Densidade é Tudo - 60 pontos)**

A Primeira Equação de Friedmann é a essência de toda a cosmologia. Contudo, outra equação vital para o desenvolvimento dessa ciência é a Equação de Fluidos. Com ela, é possível relacionar o fator de escala $a(t)$ com as densidades de energia $\epsilon(t)$ das componentes de certo Universo. Ela surge principalmente a partir do fato de podermos escrever a pressão de certa componente como função de sua densidade de energia: $P = \omega \cdot \epsilon$, onde ω é um fator adimensional.

(a) **(12 pontos)** A dedução dessa equação parte da premissa da expansão do Universo ser um fenômeno conservativo. Considerando que o Universo é uma esfera de raio próprio dado por $R(t) = a(t) \cdot r$ e que o fenômeno de expansão/contração dele se dá de maneira adiabática, prove que podemos escrever, para uma certa componente, que:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega)\epsilon = 0$$

Onde os pontos acima de cada variável significam a sua primeira derivada em relação ao tempo. Utilize a Primeira Lei da Termodinâmica.

(b) **(8 pontos)** A partir da equação acima, mostre que a densidade de energia de cada componente é dada por:

$$\epsilon_\omega(a) = \epsilon_{\omega,0} \cdot a^{-3(1+w)}$$

Onde $\epsilon_{\omega,0}$ é a densidade de energia atualmente (para $a = 1$). Se necessário, utilize que: $\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = n\frac{\dot{a}}{a}$ para $\epsilon \propto a^n$

(c) **(8 pontos)** Encontre o valor de ω_{rad} para radiação e o valor de ω_{mat} para matéria não relativística. Para um fóton, lembre-se que $E = \frac{hc}{\lambda}$ e para matéria não relativística, $v \ll c$.

(d) **(6 pontos)** Uma forma muito comum de representar a constante cosmológica na Primeira Equação de Friedmann é interpretá-la como uma densidade de energia $\epsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$. Com base nisso, encontre o valor de ω_Λ para a densidade de energia advinda da constante cosmológica.

(e) **(12 pontos)** Encontre os intervalos de fator de escala a da dominância para cada uma das componentes do nosso universo: matéria, radiação e energia escura (energia associada à constante cosmológica). A dominância de uma componente ocorre quando sua densidade de energia é maior do que todas as outras. Considere os seguintes parâmetros cosmológicos para o nosso universo:

Matéria: $\Omega_{m,0} = 0,30$
Radiação: $\Omega_{r,0} = 8,4 \cdot 10^{-5}$
Energia escura: $\Omega_{\Lambda,0} = 0,70$

Lembre-se que os possíveis valores para o fator de escala são: $a \in [0, +\infty[$

(f) **(14 pontos)** A Primeira Equação de Friedmann é dada por:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

Para esse item, considere que nosso universo é plano ($k = 0$). Uma aproximação usada para facilitar a interpretação do comportamento de $a(t)$ é considerar que apenas a componente dominante é responsável pela densidade de energia do universo (dado por ϵ na equação acima) em cada intervalo de fator de escala calculado no item (e). Sua tarefa nesse item é calcular $a(t)$ para cada um dos seguintes intervalos: *Universo dominado pela radiação* e *Universo dominado pela matéria*. Dê suas respostas em função de $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$, H_0 (constante de Hubble atualmente) e t. Deixe sua resposta em formato analítico (e não numérico).

Solution:

(a)

Primeiramente, vamos calcular a taxa de variação de volume com o tempo:

$$V = \frac{4\pi\ (a.r)^3}{3} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^3\ a^2\ \dot{a}$$

Ainda, a densidade de energia pode ser escrita como:

$$\epsilon = \frac{E}{V} = \frac{3E}{4\pi\ (a.r)^3} \Rightarrow E = \frac{4\pi\ (a.r)^3\ \epsilon}{3}$$

Onde E é a energia total. Portanto, a taxa de variação da energia por tempo é dada por:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi\ (a.r)^3}{3}\dot{\epsilon} + 4\pi r^3\ \epsilon\ a^2\ \dot{a}$$

Utilizando a primeira lei da termodinâmica, como a expansão/contração ocorre de maneira adiabática, ou seja, não há troca de calor, tem-se:

$$dQ = dE + PdV = 0 \Rightarrow \frac{4\pi\ (a.r)^3}{3}\dot{\epsilon} + 4\pi r^3\ \epsilon\ a^2\ \dot{a} + (\omega.\epsilon)\ 4\pi r^3\ a^2\ \dot{a} = 0$$

Rearranjando os termos da equação, chegamos em:

$$\frac{a\ \dot{\epsilon}}{3} + \epsilon.\dot{a} + \omega\ \epsilon\ \dot{a} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} + 3\ \frac{\dot{a}}{a}\ (1+\omega)\ \epsilon = 0$$

(b)

Utilizando a equação deduzida no item acima e a dada no enunciado:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = n\ \frac{\dot{a}}{a} = -3\ \frac{\dot{a}}{a}\ (1+\omega) \Rightarrow n = -3\ (1+\omega)$$

Como $\epsilon\ \alpha\ a^n$, usando que o fator de escala atualmente é 1:

$$\frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_{\omega,0}} = a^n \Rightarrow \epsilon_\omega = \epsilon_{\omega,0}\ a^{-3(1+\omega)}$$

(c)

Para esse item, precisamos essencialmente achar o fator de proporcionalidade entre a densidade de energia e o fator de escala.

- Para a radiação, como a energia do fóton é proporcional a $E_{\text{fóton}}\ \alpha\ \frac{1}{\lambda}$, e $\lambda\ \alpha\ a$, então $E_{\text{fóton}}\ \alpha\ \frac{1}{a}$. Ou seja, a energia do fóton, e, consequentemente, a energia de radiação, decai com o inverso do fator de escala. Daí:

$$\epsilon_{rad} = \frac{E_{rad}}{\frac{4\pi(a.r)^3}{3}} = \frac{3E_{rad}}{4\pi\ (a.r)^3} \Rightarrow \epsilon_{rad}\ \alpha\ \frac{E_{rad}}{a^3}\ \alpha\ \frac{1}{a^4}$$

Utilizando a equação achada no item anterior:

$$-4 = -3\ (1+\omega_{rad}) \Rightarrow \omega_{rad} = \frac{1}{3}$$

- Para a matéria, o cálculo do ω_{mat} é análogo ao feito acima, porém com a energia de matéria constante ao longo do tempo. Logo:

$$\epsilon_{mat} = \frac{E_{mat}}{\frac{4\pi(a.r)^3}{3}} = \frac{3E_{mat}}{4\pi\ (a.r)^3} \Rightarrow \epsilon_{mat}\ \alpha\ \frac{1}{a^3}$$

$$-3 = -3\ (1+\omega_{mat}) \Rightarrow \omega_{mat} = 0$$

(d)

Podemos fazer exatamente o que foi feito no item anterior. No modelo adotado, como c, Λ e G são constantes, ou seja, não variam com o fator de escala, ϵ_Λ também não varia. Portanto:

$$0 = -3\ (1+\omega_\Lambda) \Rightarrow \omega_\Lambda = -1$$

(e)

Utilizando o parâmetro de densidade do enunciado e a fórmula do item b, temos:

- Para a matéria:

$$\Omega_{m,0} = \frac{\epsilon_{mat,0}}{\epsilon_{crit,0}} = 0,30 \Rightarrow \epsilon_{mat,0} = 0,30\ \epsilon_{crit,0} \Rightarrow \epsilon_{mat} = 0,30\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-3}$$

- Para a radiação:

$$\Omega_{r,0} = \frac{\epsilon_{rad,0}}{\epsilon_{crit,0}} = 8,4.10^{-5} \Rightarrow \epsilon_{rad,0} = 8,4.10^{-5}\ \epsilon_{crit,0} \Rightarrow \epsilon_{rad} = 8,4.10^{-5}\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-4}$$

- Para a energia escura:

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\epsilon_{\Lambda,0}}{\epsilon_{crit,0}} = 0,7 \Rightarrow \epsilon_{\Lambda,0} = 0,7\ \epsilon_{crit,0} \Rightarrow \epsilon_{\Lambda} = 0,7\ \epsilon_{crit,0}$$

Portanto, para que a energia escura domine, $\epsilon_\Lambda > \epsilon_{rad}$ e $\epsilon_\Lambda > \epsilon_{mat}$. Daí:

$$\epsilon_\Lambda > \epsilon_{rad} \Rightarrow 0,7\ \epsilon_{crit,0} > 8,4.10^{-5}\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-4} \Rightarrow a > 0,1$$

$$\epsilon_\Lambda > \epsilon_{mat} \Rightarrow 0,7\ \epsilon_{crit,0} > 0,30\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-3} \Rightarrow a > 0,754$$

Ou seja, para um universo de dominância de energia escura, $a > 0,75$. Analogamente, para que a radiação domine, $\epsilon_{rad} > \epsilon_\Lambda$ e $\epsilon_{rad} > \epsilon_{mat}$. Então:

$$\epsilon_{rad} > \epsilon_\Lambda \Rightarrow 8,4.10^{-5}\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-4} > 0,7\ \epsilon_{crit,0} \Rightarrow a < 0,1$$

$$\epsilon_{rad} > \epsilon_{mat} \Rightarrow 8,4.10^{-5}\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-4} > 0,30\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-3} \Rightarrow a < 2,8.10^{-4}$$

Logo, se $a < 2,8.10^{-4}$, o universo tem radiação como dominante. Por exclusão, se $2,8.10^{-4} < a < 0,75$, a matéria prevalece.

(f)

Para um universo plano ($k = 0$), podemos simplificar a Primeira Equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon$$

Podemos escrever a densidade de energia crítica como:

$$\epsilon_{crit,0} = \rho_{crit,0}\ c^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}c^2$$

No período de dominação da radiação ($a < 2,8.10^{-4}$), teremos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_{rad} \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_{rad}} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\ \Omega_{r,0}\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-4}} \Rightarrow a\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\ \Omega_{r,0}\ \frac{3H_0^2}{8\pi G}c^2} = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}$$

$$\int_0^{a(t)} a\ da = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}\int_0^t dt \Rightarrow \frac{a(t)^2 - 0}{2} = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}\ t \Rightarrow \boxed{a(t) = \sqrt{2\ H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}}\ t^{\frac{1}{2}}}$$

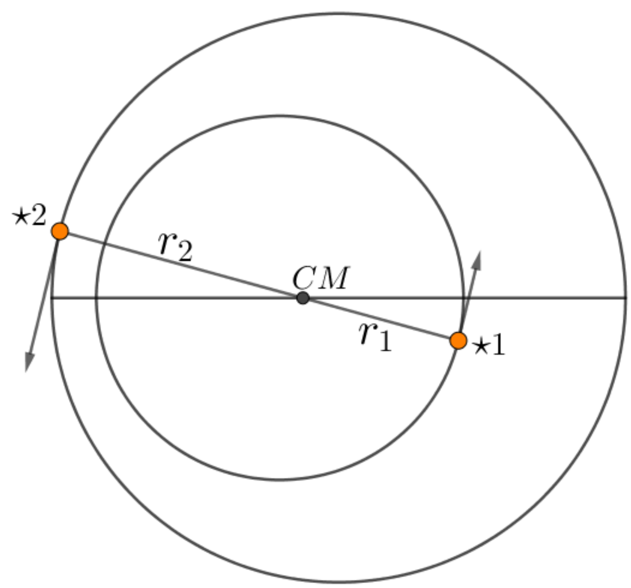
Analogamente, para a matéria:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_{mat} \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_{mat}} \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\ \Omega_{m,0}\ \epsilon_{crit,0}\ a^{-3}} \Rightarrow$$

$$a^{\frac{1}{2}}\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}$$

$$\int_0^{a(t)} a^{\frac{1}{2}}\ da = H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}\int_0^t dt \Rightarrow \frac{2(a(t)^{\frac{3}{2}} - 0)}{3} = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}\ t \Rightarrow \boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2}\ H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}\ t\right)^{\frac{2}{3}}}$$

10. **(Sistema $\boldsymbol{\alpha\, Vir}$ - 80 pontos)** Um dos sistemas binários mais famosos é o da estrela Spica, αVir, localizado na constelação de Virgem. As estrelas que o compõem possuem massas da mesma ordem de grandeza e descrevem órbitas elípticas em torno do centro de massa.



Na imagem acima, vemos as órbitas individuais de cada uma das estrelas para um referencial em repouso em relação ao baricentro do conjunto.

Nathan e Shell, diante dessas informações, decidiram medir alguns parâmetros do sistema em questão e determinar a massa de cada componente. Nathan mede a paralaxe do baricentro $\Pi = 11,90\ mas$, o período orbital $P = 4,01\ dias$ e a inclinação do plano da órbita $i = 66,0^\circ$. Shell, enquanto isso, consegue obter a separação angular máxima $S = 1,68\ mas$ entre as componentes e a mínima $s = 1,31\ mas$. Além disso, traça a curva de velocidades radiais e determina a velocidade do centro de massa $v_{rCM} = -1,70\ km/s$ e a velocidade radial da estrela de menor massa em seu apoastro $v_{r2min} = +165,48\ km/s$. Ambos também concluem que os eixos maiores das órbitas do sistema são ortogonais à linha de visada.

Observação: a unidade mas é equivalente, em português, a milissegundos de arco.

(a) **(5 pontos)** Determine a distância do sistema até a Terra em pc.

(b) **(5 pontos)** Encontre a energia mecânica total do sistema em termos de m_1, m_2, r_1, r_2, v_1, v_2 (velocidades orbitais de cada estrela) e a constante da gravitação universal G.

Ao lidar com sistemas binários, é conveniente a análise da órbita relativa, isto é, a órbita que uma estrela descreve em relação à outra, que, em geral, é a da estrela de menor massa no referencial da mais massiva.

(c) **(20 pontos)** Reescreva a equação do item anterior a partir dos parâmetros $r = r_1 + r_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (massa reduzida), v (velocidade não nula de uma das estrelas na órbita relativa) e $M = m_1 + m_2$. Sugestão: aplique uma abordagem vetorial para as velocidades, separe-nas em suas componentes horizontais e verticais para um caso genérico.

(d) **(10 pontos)** Calcule o semi-eixo maior da órbita relativa do sistema, em UA, e a soma das massas das componentes em $M_\odot$.

(e) **(5 pontos)** Expresse o semi-eixo maior a da órbita relativa em função dos semi-eixos maiores das órbitas individuais a_1 e a_2 e determine a excentricidade da órbita relativa.

(f) **(20 pontos)** Mostre algebricamente que as excentricidades e_1 e e_2 das órbitas individuais são iguais e, em seguida, da mesma maneira, mostre que a excentricidade da órbita relativa é igual a das individuais.

(g) **(15 pontos)** Encontre as massas m_1 e m_2 das componentes em $M_\odot$.

Solution:

(a)

A distância em parsec será simplesmente:

$$d = \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{11,90 \cdot 10^{-3}} = \boxed{84,03\ pc}$$

(b)

A energia mecânica E pedida será simplesmente a soma das energias cinéticas individuais com a potencial do par:

$$\boxed{E = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2}}$$

(c)

Separamos as velocidades em suas componentes horizontais e verticais:

$$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}) \quad \vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}) \quad \vec{v} = (v_x, v_y)$$

Da definição de centro de massa, temos:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

Para o referencial em questão, em repouso em relação ao baricentro do sistema, $\vec{v}_{CM} = \vec{0} = (0,0)$, então:

$$m_1 v_{1x} = -m_2 v_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} = -m_2 v_{2y}$$

Além disso, na órbita relativa temos a velocidade $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow$

$$v_x = v_{2x} - v_{1x}$$

$$v_y = v_{2y} - v_{1y}$$

Com as quatro equações acima, resolvemos o sistema para cada eixo e encontramos:

$$v_{1x} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} v_x;\ v_{2x} = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_x;\ \text{(para y é análogo)}$$

É possível separar também a energia cinética para cada eixo, já que:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2;\ v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2;\ v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$$

Fazemos então:

$$E = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2} =$$
$$= \frac{m_1 {v_{1x}}^2}{2} + \frac{m_1 {v_{1y}}^2}{2} + \frac{m_2 {v_{2x}}^2}{2} + \frac{m_2 {v_{2y}}^2}{2} - \frac{G m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) r}$$

$$E = \frac{m_1 {v_{1x}}^2}{2} + \frac{m_2 {v_{2x}}^2}{2} + \frac{m_1 {v_{1y}}^2}{2} + \frac{m_2 {v_{2y}}^2}{2} - \frac{G\mu(m_1 + m_2)}{r}$$

$$E = \frac{m_1}{2} \cdot \frac{m_2^2 v_x^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 v_x^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1}{2} \cdot \frac{m_2^2 v_y^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 v_y^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

$$E = \frac{m_1 m_2 v_x^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{m_1 m_2 v_y^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{GM\mu}{r} = \frac{\mu v_x^2}{2} + \frac{\mu v_y^2}{2} - \frac{GM\mu}{r}$$

$$E = \frac{\mu}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{GM\mu}{r}$$

$$\boxed{E = \frac{\mu}{2}\left(v^2 - \frac{2GM}{r}\right)}$$

(d)

O semi-eixo maior da órbita relativa é a distância média entre as estrelas que pode ser expressa simplesmente pela média aritmética entre a separação máxima e mínima entre elas:

$$a = \frac{(S+s)D}{2} = \frac{S('') + s('')}{2} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \cdot \frac{1}{\Pi('')} \cdot \frac{180 \cdot 3600}{\pi} = \frac{(1,31+1,68)}{2 \cdot 11,90}$$

$$\boxed{a = 0,1256\ UA}$$

Para encontrar a soma das massas basta aplicar a terceira lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3 \Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{GP^2}a^3$$

$$m_1 + m_2 = \frac{1}{(4,01/365,2422)^2} \cdot 0,1256^3 \Rightarrow \boxed{m_1 + m_2 = 16,44\ M_\odot}$$

(e)

Faremos a demonstração de três fatos que serão extremamente úteis para a resolução dos próximos itens: (i) a excentricidade das órbitas individuais é a mesma; (ii) a órbita relativa também é elíptica, com excentricidade igual à das órbitas individuais; (iii) o semi-eixo maior é a soma dos semi-eixos maiores.

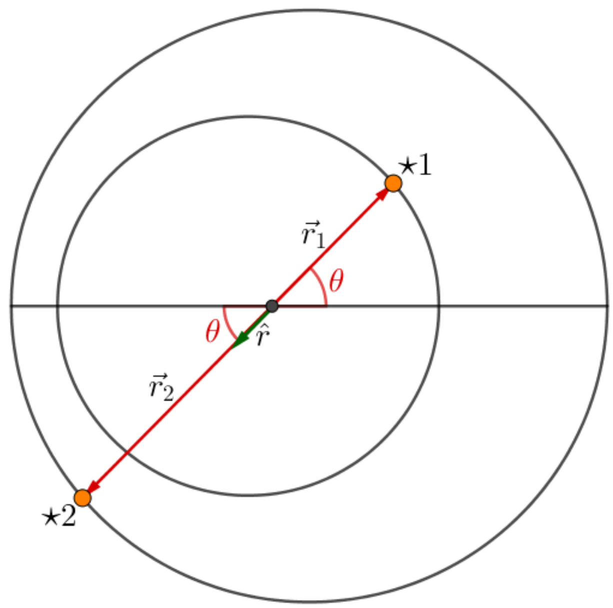
(i) Para que a posição do baricentro não mude em relação às órbitas, as estrelas sempre estarão em posições equivalentes na órbitas individuais. Isto é, quando 1 estiver no periastro de sua órbita, 2 também estará. Usando esse argumento, para o periastro e apoastro:

$$\begin{cases} M_1a_1(1-e_1) = M_2a_2(1-e_2) \\ M_1a_1(1+e_1) = M_2a_2(1+e_2) \end{cases}$$

Dividindo-se uma equação pela outra:

$$\begin{gathered} (1-e_1)\cdot(1+e_2) = (1-e_2)\cdot(1+e_1) \implies \\ 1 - e_1e_2 - e_1 + e_2 = 1 - e_1e_2 + e_1 - e_2 \iff \\ \boxed{e_1 = e_2} \end{gathered}$$

(ii) e (iii) Usando a equação polar das órbitas individuais, tomando como base a figura:



Tomemos a posição da estrela 2 em relação à estrela 1. O vetor da posição relativa $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ pode ser expresso em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \vec{r_1} = -\frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\hat{r} \\ \vec{r_2} = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\hat{r} \end{cases} \implies \vec{r} = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\hat{r} + \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\hat{r} = \frac{(a_1+a_2)(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\hat{r}$$

Chegamos, portanto, em outra equação polar de elipse com parâmetros

$$\begin{cases} a_r = a_1 + a_2 \\ e_r = e = e_1 = e_2 \end{cases}$$

que descreve a órbita relativa das estrelas.

Do ponto de separação máxima:

$$s = \frac{S+s}{2}(1-e) \implies e = \frac{S-s}{S+s} = \frac{1,68-1,31}{1,68+1,31} \approx 0,124$$

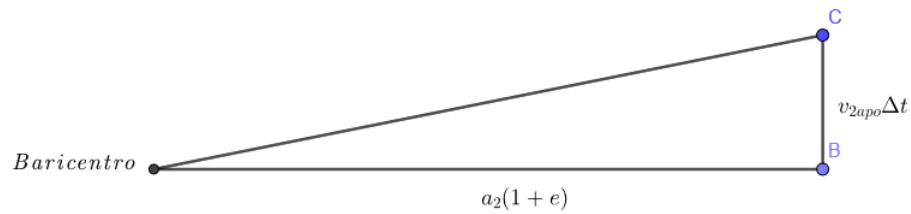
Respostas:

$$\boxed{a = a_1 + a_2} \text{ e } \boxed{e = 0,124}$$

(f)
A demonstração foi feita no item e).

(g)
O semi-eixo maior da órbita 2 pode ser facilmente calculado lembrando-se da definição da Segunda Lei de Kepler. Seja o ponto B da figura abaixo o apoastro da estrela 2. Após

um intervalo de tempo Δt muito pequeno, a estrela atinge a posição C, percorrendo uma distância $\Delta S = v_{2_{apo}} \Delta t$.



Da Segunda Lei de Kepler:

$$\frac{v_{2_{apo}} \Delta t a_2 (1+e)/2}{\Delta t} = \frac{\pi a_2 b_2}{T} \implies$$
$$\frac{v_{2_{apo}}(1+e)}{2} = \frac{\pi a_2 \sqrt{1-e^2}}{T} \implies a_2 = \frac{v_{2_{apo}}(1+e)T}{2\pi\sqrt{1-e^2}}$$

O único valor desconhecido é $v_{2_{apo}}$, que pode ser obtido de v_{r2min}, levando-se em conta a velocidade radial do centro de massa do sistema, além da inclinação orbital:

$$v_{2_{apo}} = \frac{v_{r2min} - v_{rCM}}{\sin i} = \frac{165,48 + 1,70}{sin(66,0)} = 183,00$$
$$textkm/s$$

Assim, $a_2 = 1,143 \cdot 10^{10}\ m = 7,62 \cdot 10^{-2}\ UA$ e $a_1 = 4,94 \cdot 10^{-2}\ UA$.

Da soma das massas obtida anteriormente, e da definição do centro de massa:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 16,44 \\ m_1 \cdot 4,94 \cdot 10^{-2} = m_2 \cdot 7,62 \cdot 10^{-2} \end{cases} \implies \boxed{m_1 = 9,97\ M_\odot} \text{ e } \boxed{m_2 = 6,47\ M_\odot}$$