

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. O título do arquivo deverá seguir a formatação: “ N^o aluno’ - P2”. Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título “19 - P2”;
3. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
4. No canto superior esquerdo de TODAS as páginas informe: “N^o aluno - Q(N^o questão)”. Por exemplo, “19 - Q1”, e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, “p.1”;
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e meia e o tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
 - Questões Curtas - **5 questões**, sendo uma valendo 6 pontos, duas valendo 10 pontos e duas valendo 12 pontos.
 - Questões Médias - **2 questões**, sendo uma valendo 20 pontos e uma valendo 25 pontos.
 - Questões Longas - **3 questões**, sendo uma valendo 55 pontos e duas valendo 75 pontos.
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

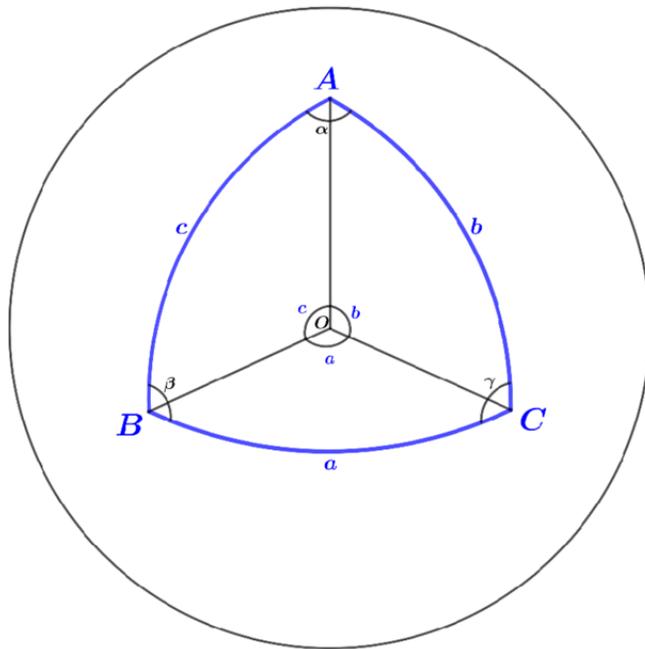
1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom;
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova;
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções;
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

Tabela de Constantes

| | | |
|--|--|------------------------------|
| Massa (M_{\oplus}) | $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ | Terra |
| Raio (R_{\oplus}) | $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ | |
| Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus}) | $9,8 \text{ m/s}^2$ | |
| Obliquidade da Eclíptica | $23^{\circ}27'$ | |
| Ano Tropical | 365,2422 dias solares médios | |
| Ano Sideral | 365,2564 dias solares médios | |
| Albedo | 0,39 | |
| Dia sideral | $23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$ | |
| Massa | $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ | Lua |
| Raio | $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$ | |
| Distância média à Terra | $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ | |
| Inclinação Orbital com relação à Eclíptica | $5,14^{\circ}$ | |
| Albedo | 0,14 | |
| Magnitude aparente (lua cheia média) | $-12,74 \text{ mag}$ | |
| Massa (M_{\odot}) | $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ | Sol |
| Raio (R_{\odot}) | $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ | |
| Luminosidade (L_{\odot}) | $3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ | |
| Magnitude Absoluta (M_{\odot}) | $4,80 \text{ mag}$ | |
| Magnitude Aparente (m_{\odot}) | $-26,7 \text{ mag}$ | |
| Diâmetro Angular | $32'$ | |
| Velocidade de Rotação na Galáxia | 220 km s^{-1} | |
| Distância ao Centro Galáctico | $8,5 \text{ kpc}$ | |
| Diâmetro da pupila humana | 6 mm | Distâncias e tamanhos |
| Magnitude limite do olho humano nu | $+6 \text{ mag}$ | |
| 1 UA | $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ | |
| 1 pc | 206.265 UA | |
| Constante Gravitacional (G) | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ | Constantes Físicas |
| Constante Universal dos Gases (R) | $8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | |
| Constante de Planck (h) | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ | |
| Constante de Boltzmann (k_B) | $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$ | |
| Constante de Stefan-Boltzmann (σ) | $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ | |
| Constante de Hubble (H_0) | $67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ | |
| Velocidade da luz no vácuo (c) | $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ | |
| Massa do Próton | $938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ | |
| $\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório | 656 nm | |

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\alpha)$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Pressão de radiação (reflexão perfeita e ângulo de incidência nulo):

$$P = \frac{2F}{c}$$

sendo F o fluxo de radiação e c a velocidade da luz

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Extinção atmosférica:

$$F' = F e^{-\tau z \sec z}$$

- Primeira Equação de Friedmann:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2}$$

- Relação Massa-Luminosidade:

$$\begin{cases} \frac{L}{L_{\odot}} \approx 0,23 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.3}, & (M < 0,43M_{\odot}) \\ \frac{L}{L_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4, & (0,43M_{\odot} < M < 2M_{\odot}) \\ \frac{L}{L_{\odot}} \approx 1,4 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5}, & (2M_{\odot} < M < 55M_{\odot}) \\ \frac{L}{L_{\odot}} \approx 32000 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right), & (M > 55M_{\odot}) \end{cases}$$

Questões Curtas

1. **Quisso? A Giulia Sumiu! (6 pontos)** Certo dia, Giulia resolve ir à praia. Contudo, ela se perde no meio do caminho durante a madrugada e repara que seu relógio marca 6h32min no nascer do Sol, enquanto espera por ajuda. Sabendo que ela se encontra no hemisfério Sul, qual a longitude que devemos ir resgatar Giulia?
 Dados: O ângulo horário (H) do Sol em seu nascer era -80° e o horário civil de Giulia é -3 GMT.

Solução:

Transformando o ângulo horário em horas: $H = \frac{24h}{360^\circ} \times -80^\circ = -5h20min$

Sabendo que $H=0h$ na culminação superior do Sol (meio dia) e que o meio dia do relógio de Giulia corresponde a culminação superior do Sol na longitude -45° , podemos calcular o horário do nascer do Sol (HSN) como se ela estivesse em $\lambda = -45^\circ$:

$$HSN = 12h - H$$

$$HSN = 12h - 5h20min = 6h40min$$

Assim, percebemos que o nascer do Sol de Giulia ocorreu antes que em $\lambda = -45^\circ$, isto é, Giulia está à Leste e com uma diferença $\Delta\lambda = 6h40min - 6h32min = 8min = 2^\circ$ deste local.

Portanto, a longitude de Giulia é $\lambda = -43^\circ$

2. **Estrela Polar (10 pontos)** Em suas férias, Shell decide viajar para Roma ($\phi = 41,9^\circ$ N e $\lambda = 12,5^\circ$ L). Certo dia, ele decide observar uma estrela perto do polo que possui magnitude 6 quando no zênite de um observador qualquer. Qual a magnitude com a qual ele enxerga a estrela, sabendo que a maior magnitude com a qual ele enxerga a estrela Alkaid ($\alpha = 13h 48m$, $\delta = 49^\circ 19'$, $L = 594L_\odot$ e $p = 31,4$ mas) é 4,81?

Solução:

Primeiramente, precisamos descobrir a magnitude visual de Alkaid sem considerar a extinção atmosférica. Comparando com o Sol:

$$m_\odot - m_A = -2,5 \log \left(\frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2} \frac{4\pi d^2}{L} \right)$$

Onde

$$d = \frac{1}{p} = 31,8 \text{ pc}$$

Disso, obtemos $m_A = 0,45$.

A maior magnitude de Alkaid será atingida quando Alkaid estiver em sua menor altura, ou seja, em sua culminação inferior. Para este caso $h = \phi - (90^\circ - \delta) = 1^\circ 13'$.

Disso, descobrimos a extinção atmosférica:

$$F' = F e^{-\tau \sec z}$$

$$4,81 - m_A = -2,5 \log(e^{-\tau \sec 88^\circ 47'})$$

Disso $\tau = 0,085$.

Agora podemos finalmente encontrar a magnitude com que Shell vê a estrela. Como a estrela se localiza perto do polo, temos $h \approx \phi$, e então:

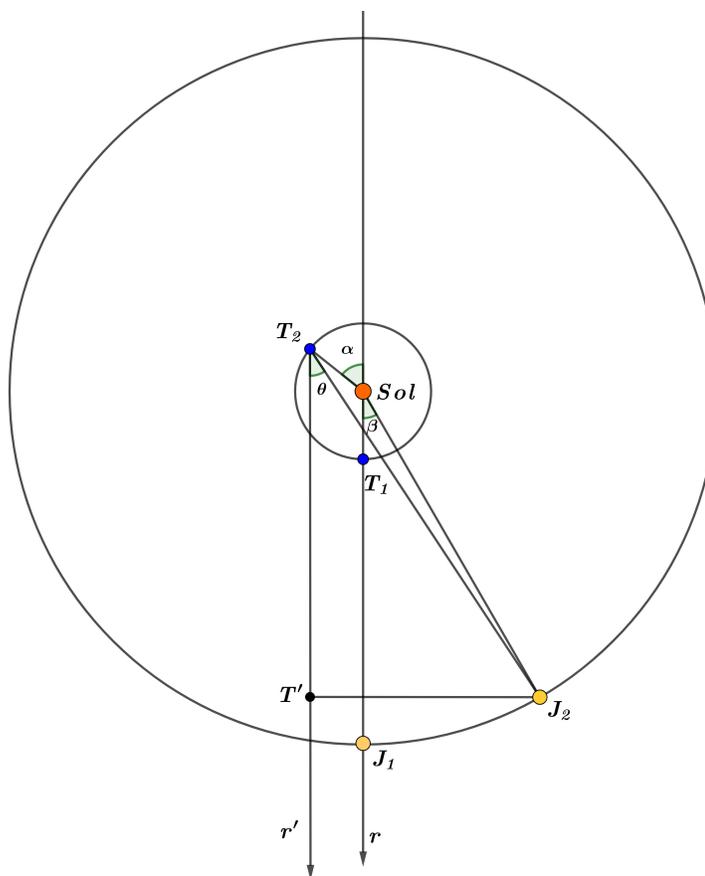
$$m - 6 = -2,5 \log \left(\frac{e^{-\tau \sec(90^\circ - \phi)}}{e^{-\tau}} \right)$$

Logo, $m = 6,05$.

3. **Ocultação de Regulus (10 pontos)** O astrônomo Carrit presencia, de seu observatório em Marília (SP), um fenômeno raro: durante a oposição de Júpiter em relação ao Sol, o gigante gasoso oculta a estrela *Regulus* (αLeo). Considerando as órbitas de Júpiter e da Terra coplanares e circulares, determine qual a distância angular entre Júpiter e *Regulus* medida pelo astrônomo 600 dias após a configuração citada.

Dica: considere nula a latitude eclíptica da estrela (αLeo). Use, se necessário, que o raio da órbita de Júpiter é $R_J = 5,2 UA$.

Solução: A figura abaixo ilustra os planetas nas configurações inicial (1) e final (2), 600 dias após a primeira. Seja r a reta que aponta para *Regulus* na configuração inicial, tem-se:



Do semi-eixo maior de Júpiter, encontra-se que $T_J = R_J^{2/3} = 4331$ dias. Assim,

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{360^\circ}{365,25} \cdot 600 = 591,38^\circ \iff \alpha = 51,38^\circ \\ \beta = \frac{360^\circ}{4331} \cdot 600 = 49,87^\circ \end{cases}$$

Como a estrela está muito distante da Terra, traça-se a reta r' , paralela a r , para determinar a distância angular θ requerida. Projetando-se os raios das órbitas no triângulo retângulo $T_2 - T' - J_2$, calcula-se

$$\tan \theta = \frac{R_\oplus \sin \alpha + R_J \sin \beta}{R_\oplus \cos \alpha + R_J \cos \beta} = 1,1966$$

$$\theta = 50,1^\circ$$

4. **Laser de Raul (12 pontos)** Raul IX é o comandante de um império intergaláctico num superaglomerado muito, muito distante. Como imperador, ele quer controlar os nascimentos de estrelas em certas regiões sob seu reinado. Para esse fim, um time de físicos desenvolveu uma poderosa fonte laser de 10^{35} W (quase uma galáxia!) que energiza nuvens de gás a ponto de não colapsarem em estrelas.

O teste inicial será em uma nuvem composta por hidrogênio molecular com densidade numérica $n = 10^4$ partículas por cm^3 , massa $M = 5 \times 10^2 M_\odot$ e temperatura inicial $T_0 = 10$ K. Tudo estava correndo bem no dia do teste, até que um astrônomo desatento até então percebeu os efeitos da extinção interestelar, e calculou a profundidade óptica da fonte laser até a nuvem: $\tau = 0,82$. Qual o tempo mínimo t que os cientistas devem aplicar o laser na nuvem para terem sucesso no experimento?

Considere em primeira aproximação que a nuvem não muda de tamanho, absorve toda a luminosidade incidente e esquentada uniformemente. Use também as seguintes expressões para a massa de Jeans e o calor específico molar a volume constante para moléculas diatômicas:

$$M_J = \left(\frac{5k_b T}{G\mu} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

$$c_V = \frac{5}{2}R$$

onde μ é a massa de uma molécula.

Solução:

Primeiro encontraremos a temperatura que a nuvem precisa ter para que ela não colapse em uma estrela. Para isso, a sua massa da nuvem deverá ser menor que a de Jeans:

$$M_J = \left(\frac{5k_b T}{G\mu} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

$$T = \left(\frac{G\mu}{5k_b} \right) \left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^{1/3} M^{2/3}$$

A densidade da nuvem é dada por $\rho = \mu n = 3,34 \times 10^{-17} \text{ kg/m}^3$. Substituindo valores, obtemos $T = 167 \text{ K}$.

Em seguida, calcularemos o tempo que a potência do laser leva para esquentar a nuvem até essa temperatura. A capacidade térmica da nuvem é $C = c_V N$, onde N é o número de mols da nuvem. N é dado pela divisão entre a massa da nuvem e a massa molar do hidrogênio molecular (H_2), 2 g/mol.

$$\begin{aligned} C &= c_V N \\ &= \frac{5}{2} R \cdot \frac{M}{2 \text{ g/mol}} \\ &= 1,03 \times 10^{37} \text{ J/K} \end{aligned}$$

A potência que chega na nuvem é $P = P_0 e^{-\tau}$, onde $P_0 = 10^{35} \text{ W}$. Usando a equação do calor, a nuvem é esquentada até a temperatura T em um tempo Δt :

$$\begin{aligned} Q &= P \Delta t = C(T - T_0) \\ P_0 e^{-\tau} \Delta t &= C(T - T_0) \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{C(T - T_0)}{P_0 e^{-\tau}} \end{aligned}$$

Substituindo valores, temos finalmente $\Delta t = 10 \text{ h}$.

5. **Big Crunch (12 pontos)** Juvelino, um astronauta entusiasta, vive em um universo composto apenas por matéria e curvatura não nula e que obedece a métrica $FLRW$. Sabe-se que na atual idade do universo de Juvelino, sua constante de Hubble é dada por $H_0 = 55 \text{ km/s/Mpc}$ e que, para o momento em que seu fator de escala era de $a = 0,5$, sua constante de Hubble era dada por $H = 165 \text{ km/s/Mpc}$. Demonstre que o universo de Juvelino é fechado e calcule o maior fator de escala a_{max} que seu universo atinge antes que comece a contrair.

Solução:

Pela Primeira Equação de Friedmann

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2}$$

Como o universo possui apenas a componente de matéria, todas as outras são nulas, o que nos leva a equação

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0}}{a^2}$$

Para $a = 0,5$, teremos

$$\frac{165^2}{55^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{0,5^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0}}{0,5^2}$$

Resolvendo para $\Omega_{m,0}$, encontramos $\Omega_{m,0} = 1,25$. Assim, como o parâmetro é maior que um, o universo é fechado ($\kappa = +1$).

Para a segunda parte do problema, basta percebermos que para o maior valor possível do fator de escala, teremos $H(t) = 0$, já que isso implica que $\dot{a} = 0$. Assim

$$0 = \frac{\Omega_{m,0}}{a_{max}^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0}}{a_{max}^2} \rightarrow a_{max} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} = \boxed{5}$$

Obs: o fato da constante de Hubble estar diminuindo com o tempo **não** implica que o universo é fechado. Em um universo crítico composto apenas por matéria, por exemplo:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \rightarrow H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}}$$

Perceba que $H(a)$ é uma função decrescente, mas nunca teríamos $H < 0$ - o que caracterizaria um universo fechado.

Questões Médias

6. **Estrela de Barnard (20 pontos)** Juvelino, em uma bela noite de observação estelar, tem em suas mãos um telescópio refletor $f/4.7$ com distância focal de 1200 mm . Ele deseja mensurar a magnitude da famosa Estrela de Barnard, na constelação de *Ofiúco*.

- (4 pontos)** Calcule a escala de placa do telescópio (em arcsec/mm), bem como o diâmetro de sua objetiva (em mm).
- (6 pontos)** Primeiro, Juvelino utiliza um método interessante, mas não muito eficiente, para estimar a magnitude da estrela de Barnard. Ele tampa, aos poucos, a objetiva do telescópio até o momento em que a visualização do objeto se torna impossível. Sabendo que a magnitude limite do olho de Juvelino é de +6 e que ele precisou tampar cerca de 98,65% da área da objetiva para que tal fenômeno ocorresse, calcule a magnitude de Barnard.
- (10 pontos)** Nosso herói astrônomo, muito curioso, agora deseja descobrir a menor magnitude que a estrela de Barnard atingirá vista a partir da Terra em um futuro distante. Ajude Juvelino e encontre essa magnitude. Desconsidere qualquer fonte de extinção.

Dados: A distância à estrela de Barnard é $1,827 \text{ pc}$, seu movimento próprio é de $\mu = 10393 \text{ mas/ano}$ e sua velocidade radial é de $-110,5 \text{ km/s}$.

Solução:

- Calculando, primeiro, o diâmetro da objetiva

$$\frac{f}{D} = \frac{1200}{D} = 4,7 \rightarrow \boxed{D = 255 \text{ mm}}$$

Agora, para a escala de placa η

$$\eta = \frac{1}{f} \approx 8,33 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm} \rightarrow \boxed{\eta = 172 \text{ arcsec/mm}}$$

- (b) Para esse item, vamos utilizar que a magnitude limite do olho humano é de +6 e que o diâmetro da pupila dilatada é de 6 mm. Assim, podemos comparar a magnitude limite do telescópio tampado - que será, aproximadamente, a magnitude da estrela de Barnard - com a magnitude limite do olho humano

$$m - 6 = -2,5 \log \left(\frac{A_{\text{olho}}}{A_{\text{efetiva}}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{\pi \cdot (6/2)^2}{\pi (255/2)^2 \cdot (1 - 0,9865)} \right)$$

$$m_{\text{Barnard}} \approx 9,5$$

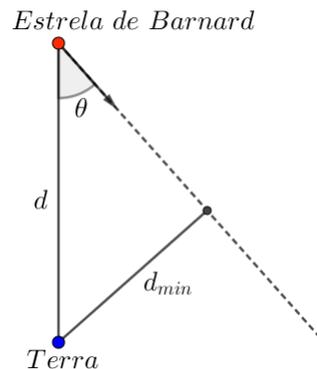
- (c) A medida que o tempo passar, a estrela de Barnard se aproximará de nós, até atingir uma distância mínima e em seguida se afastará. Na mínima distância, a estrela estará mais brilhante do que nunca e sua magnitude será a menor.

Equação de Pogson para Barnard a diferentes distâncias:

$$m_{\text{min}} - m = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi d_{\text{min}}^2} \frac{4\pi d^2}{L} \right) = -5 \log \left(\frac{d}{d_{\text{min}}} \right)$$

$$m_{\text{min}} = m - 5 \log \left(\frac{d}{d_{\text{min}}} \right)$$

Nos resta descobrir d_{min} . Segundo as velocidades dadas, a estrela está se movimentando da seguinte maneira em relação a Terra:



Nota-se claramente que $d_{\text{min}} = d \sin \theta$, então $m_{\text{min}} = m + 5 \log (\sin \theta)$. Vamos calcular θ :

$$\tan \theta = \frac{v_{\text{tangencial}}}{v_{\text{radial}}} = \frac{\mu \cdot d}{v_r} = \frac{10393 \text{ mas/ano} \cdot 1,827 \text{ pc}}{110,5 \text{ km/s}} = 0,8146 \Rightarrow \theta = 39,1658^\circ$$

Finalmente, substituindo e calculando a magnitude mínima:

$$m_{\text{min}} = 9,5 + 5 \log \sin (39,1658^\circ) \Rightarrow$$

$$m_{\text{min}} = 8,5$$

7. **Despedida do Doutor Nefário (25 pontos)** No icônico filme “*Meu Malvado Favorito 2*”, Doutor Nefário, após perceber que não levava jeito para produção de geleias, decide contar a

Gru que recebeu uma proposta de emprego de outro supervilão. Então, Gru e seus minions decidem realizar uma cerimônia de despedida para o querido companheiro. Findada a homenagem, Dr. Nefário monta em sua mobilete tecnológica e segue em movimento ascendente para sair do laboratório por meio de um orifício no meio da cúpula, como mostram as duas figuras a seguir.



(a) Cerimônia de Despedida.



(b) Movimento Ascendente de Nefário.

Figura 1: Sequência do movimento do personagem. Fonte: Meu Malvado Favorito 2. Direção: Pierre Coffin e Chris Renaud. Produção: Illumination Entertainment. Estados Unidos: Universal Pictures, 2013. 1 DVD (98 min).

Entretanto, o veículo do Doutor é muito lento, fazendo com que o trajeto entre o chão e a parte superior da cúpula leve um longo tempo. Nesse intervalo, ele decide observar as estrelas de um céu limpo (i.e., não existe refração atmosférica) por meio do orifício. O personagem pretende analisar qual a fração de estrelas do céu noturno que ele pode observar durante sua trajetória ascendente. Visando simplificar o problema, considere que a estrutura do laboratório é uma calota esférica, assim como mostra a Figura 2.

Para esta tarefa, Dr. Nefário toma A_v como o número de estrelas dentro de seu campo de visão no intervalo de um ano sideral. Além disso, A_o é o número de estrelas espalhadas por toda a esfera celeste. Sendo assim, a fração de estrelas do céu que ele pode observar em uma dada posição é dada por A_v/A_o .

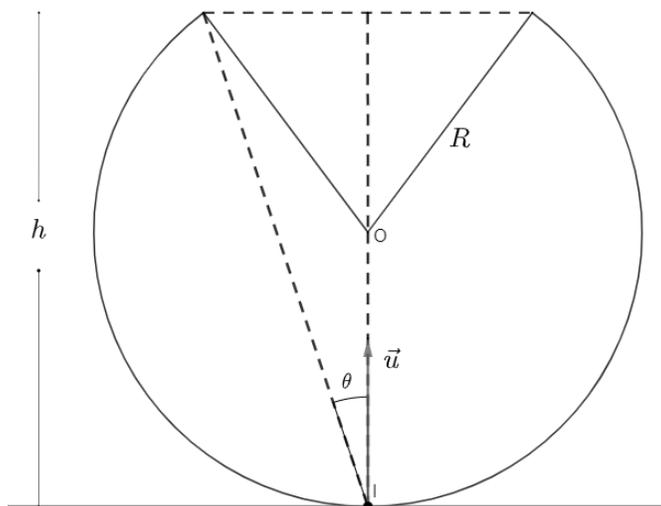


Figura 2: Esquema da cúpula. Considere que θ é o ângulo de abertura visto pelo doutor para um determinado tempo t .

Dados: Velocidade da moto: u . Raio da Cúpula: R . Altura da Cúpula: h . Latitude do local

de observação: φ . Considere que as estrelas do céu estão uniformemente distribuídas no espaço. Saiba também que Doutor Nefário começa seu movimento em $t = 0$ a partir do ponto I.

- (a) (4 pontos) Determine a equação temporal do ângulo de abertura, $\theta(t)$, em função dos dados do problema.
- (b) (1 ponto) Encontre o valor $\theta(t = 0)$, que é o ângulo de abertura para quando Nefário se encontra no ponto I.
- (c) (20 pontos) Determine uma expressão para A_v/A_o para $\theta(0) \leq \theta \leq \pi/2$.
Nota: Considere que $\theta(0) < 90 - \varphi$.

Solução:

(a) Os dois primeiros item do problema irão precisar da análise da geometria da cúpula. Pela imagem abaixo, conseguimos calcular o raio do orifício.

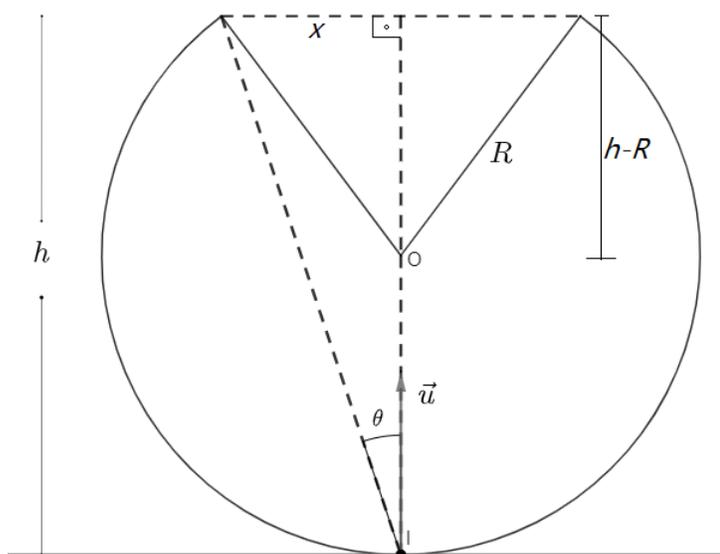


Figura 3: A partir dessa visão geométrica, é possível determinar o ângulo θ qualquer.

Por Pitágoras, vem: $x^2 + (h - R)^2 = R^2 \Rightarrow x = \sqrt{h(2R - h)}$.

Então, assumindo que Doutor Nefário subiu uma altura ut , obtemos que $tg\theta = x/(h - ut) \Rightarrow$

$$\theta = \arctg\left[\frac{\sqrt{h(2R - h)}}{h - ut}\right]$$

(b) Particularizando para $t = 0$, obtém-se: $\theta(0) = \arctg\left[\sqrt{\frac{2R - h}{h}}\right]$

(c) Segundo o enunciado, θ_0 é menor do que o complementar da latitude. Em decorrência disso, é necessário dividir esse item em dois casos.

Primeiro caso: $\theta \leq 90 - \varphi$

Esquematisando o problema, temos:

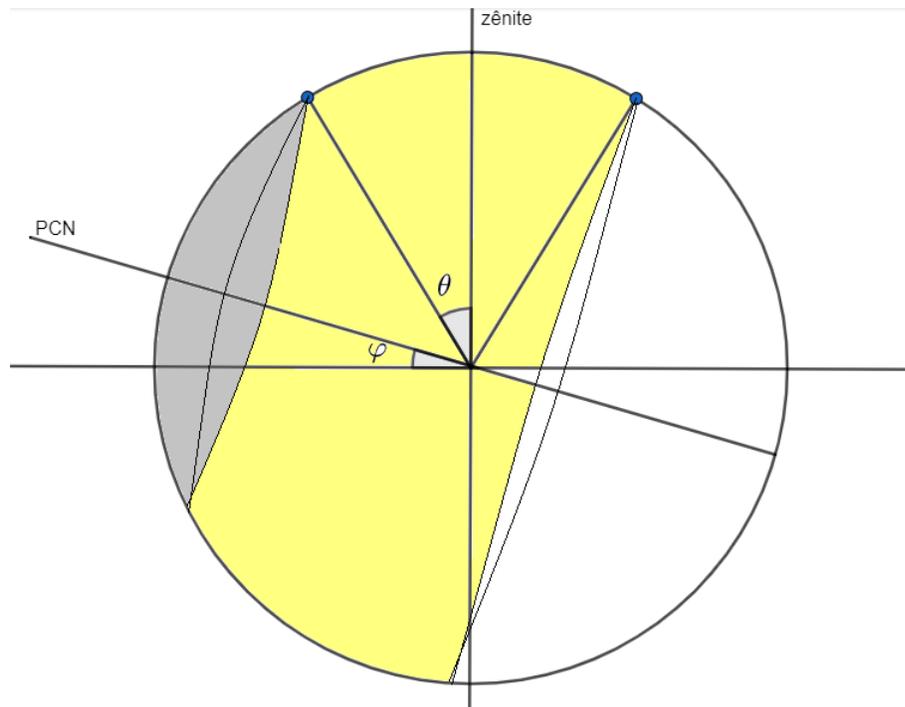


Figura 4: Note que podemos encontrar a área visível por Nefário a partir do cálculo da região pintada pela cor amarela. Para isso, iremos determinar a área da calota formada pela região 2 (amarelo+cinza) e retirar a região 1(cinza).

Sabe-se que $A = 2\pi(1 - \cos\alpha/2)$, em que α é o ângulo que observa a região que desejamos determinar. Assim, para a calota 1, temos $\alpha/2 = 90 - (\varphi + \theta)$, que nos permite escrever:

$$\frac{Ac_1}{A_o} = \frac{2\pi(1 - \cos[90 - (\varphi + \theta)])}{4\pi} \Rightarrow \frac{Ac_1}{A_o} = \frac{1}{2}[1 - \cos(90 - (\varphi + \theta))] \quad (1)$$

Analogamente, para a calota formada pela região cinza+amarelo, escrevemos:

$$\frac{Ac_2}{A_o} = \frac{1}{2}[1 - \cos(90 - (\varphi - \theta))] \quad (2)$$

Como dito anteriormente, a área visível é dada pela região amarela, ou seja, $A_v = Ac_2 - Ac_1$. Com um pouco de trigonometria, segue o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{A_v}{A_o} = \frac{Ac_2 - Ac_1}{A_o} = \frac{1}{2}[1 - \sin(\varphi - \theta) - 1 + \sin(\varphi + \theta)] \Rightarrow \frac{A_v}{A_o} = \frac{1}{2}2\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{A_v}{A_o} = \sin\theta\cos\varphi} \quad (4)$$

Nota: No passo anterior, usamos que $\text{sen}a - \text{sen}b = 2\cos[(a + b)/2]\text{sen}[(a - b)/2]$.

Segundo caso: $\theta \geq 90 - \varphi$

Mais uma vez, esquematizando o problema:

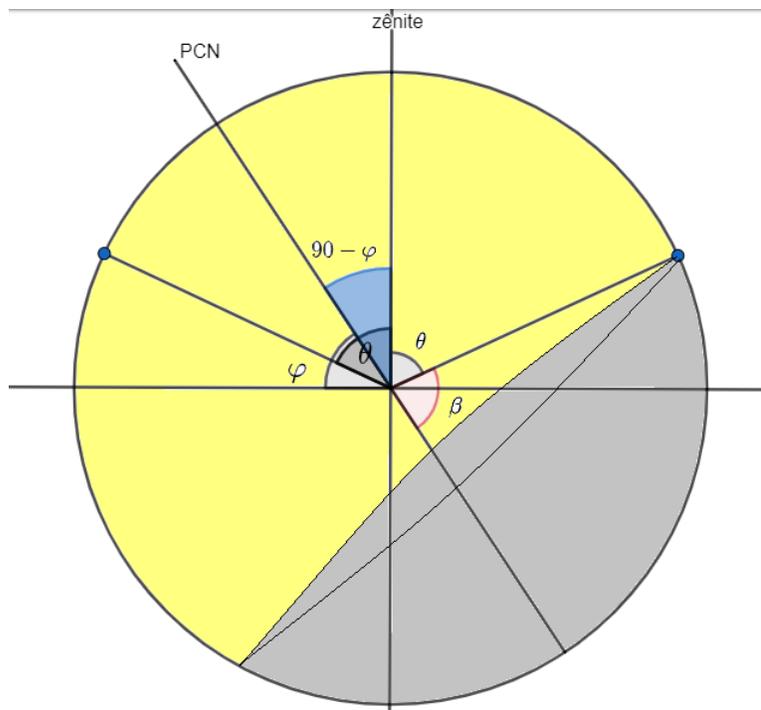


Figura 5: Novamente, a região visível por Nefário será a amarela. Para efeitos de cálculo, iremos subtrair da área total a região cinza.

Do desenho, note que $\beta = 180 - (90 - \varphi) - \theta = 90 - (\theta - \varphi)$. Assim, a área da região cinza é:

$$\frac{Ac'}{A_o} = \frac{1}{2}[1 - \cos(90 - (\theta - \varphi))] \quad (5)$$

Como $A_v = A_o - Ac'$, conseguimos mais um intervalo de valores para A_v :

$$\frac{A_v}{A_o} = \frac{A_o - Ac'}{A_o} = 1 - \frac{1}{2}[1 - \text{sen}(\theta - \varphi)] \Rightarrow \quad (6)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{A_v}{A_o} = \frac{1}{2}[\text{sen}(\theta - \varphi) + 1]} \quad (7)$$

Curiosidade: podemos confirmar a validade do resultado acima ao fazer $\theta = \pi/2$, que fornecerá $A_v/A_o = \cos^2(\varphi/2)$. Esse valor é equivalente à fração de estrelas que podemos observar durante um ano para uma dada latitude. Para alcançar essa expressão, usamos o fato que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Questões Longas

8. **Férias em Andrômeda - Parte 2 (55 pontos)** Conforme mencionado na questão 1 da lista 3, Bruno decidiu passar suas férias em um planeta desprovido de água e com apenas uma lua em uma estrela na galáxia de Andrômeda. Contudo, ao sentir muita falta do mar, ele começou a imaginar como a lua desse planeta influenciaria as marés na superfície. Por isso, Bruno decidiu determinar uma expressão para calcular a força de maré em um ponto da superfície do planeta em função da anomalia verdadeira da órbita elíptica (Bruno sabia que uma expressão em função do tempo seria muito complicada, por isso ele escolheu a anomalia verdadeira).

Para simplificar os cálculos, considere que no instante $t = 0$ a lua está no periastro, em sua máxima declinação ao norte e exatamente acima do meridiano de longitude de Bruno. Além disso, considere que a distância entre a lua e o centro do planeta é sempre muito maior que o raio do planeta.

Todos os itens dessa questão devem ser resolvidos algebricamente em função de constantes físicas e dos seguintes parâmetros:

- Massa do planeta (M_P)
- Massa da lua (M_L)
- Massa de Bruno (m)
- Raio do planeta (R)
- Semieixo maior da órbita da lua (a)
- Excentricidade da órbita da lua (e)
- Oblividade da órbita da lua em relação ao Equador do planeta (ε)
- Latitude de Bruno (ϕ)
- Anomalia verdadeira (θ)

Importante: Considere a massa da lua desprezível em relação à massa do planeta.

Importante: A anomalia verdadeira corresponde ao ângulo entre o periastro o foco com o planeta e a posição da lua, com vértice no foco.

- (a) **(5 pontos)** Determine uma expressão para o valor inicial da força de maré que Bruno sentiria se ele estivesse no ponto da superfície do planeta localizado exatamente abaixo da lua no instante $t = 0$.
- (b) **(15 pontos)** Deduza uma expressão para determinar a distância entre a lua e o centro do planeta (r) em função da anomalia verdadeira.
Dica: Uma boa estratégia seria escolher um ponto qualquer na elipse e montar um triângulo com esse ponto e dois outros pontos relevantes para a elipse.
Dica: Lembre-se da definição matemática de uma elipse.
- (c) **(15 pontos)** Outro parâmetro importante é o ângulo α entre Bruno, o centro do planeta e a lua, com vértice no centro do planeta. Determine uma expressão para o valor desse ângulo em função da anomalia verdadeira.
- (d) **(20 pontos)** Deduza uma expressão para calcular a força de maré sobre Bruno em função da anomalia verdadeira. Para simplificar a expressão final, você pode simplesmente utilizar as variáveis $r(\theta)$ e $\alpha(\theta)$ sem substituir as expressões dos itens anteriores na sua resposta final. As seguintes aproximações podem ser úteis:
- $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ se $x \ll 1$.
 - $\cos(\theta) \approx 1$ para ângulos muito pequenos.
 - $x + y \approx x$ se $x \gg y$.

Dica: Decomponha os vetores e trabalhe com cada eixo separadamente.

Solução:

- (a) Uma possível maneira de resolver esse item seria calcular a força resultante no centro e na superfície e subtrair as duas. Contudo, é muito mais simples derivar a força gravitacional e multiplicar o resultado pelo raio do planeta. Vale ressaltar que esse método só funciona porque o raio do planeta é muito menor que o raio orbital da lua. Portanto:

$$F = \frac{GM_L m}{r^2}$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{-2GM_L m}{r^3}$$

$$F_m = \frac{-2GM_L m * (-R)}{r^3}$$

$$F_m = \frac{2GM_L m R}{r^3}$$

Nesse caso, a derivada indica que a força está diminuindo conforme a massa de teste fica mais distante da Lua. Contudo, o ponto em questão está mais próximo da Lua, por isso é necessário utilizar o sinal negativo.

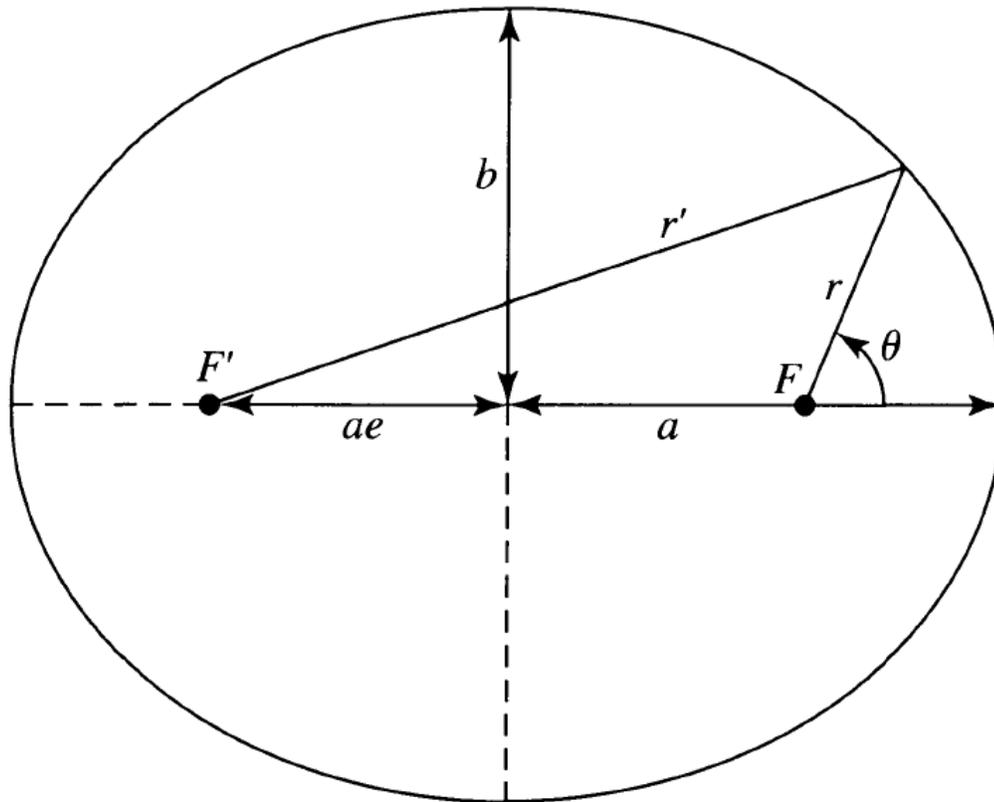
A distância da lua ao centro do planeta é dada pela seguinte expressão:

$$r = a(1 - e)$$

Dessa forma, a força de maré sentida por Bruno nesse caso é dada pela seguinte expressão:

$$F_m = \frac{2GM_L m R}{a^3 * (1 - e)^3}$$

- (b) Considere a seguinte figura:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$r'^2 = (r \cdot \sin(\theta))^2 + (2ae + r \cos(\theta))^2$$

$$r'^2 = r^2 + 4ae(ae + r \cos(\theta))$$

$$r'^2 - r^2 = 4ae(ae + r \cos(\theta))$$

$$(r' - r)(r' + r) = 4ae(ae + r \cos(\theta))$$

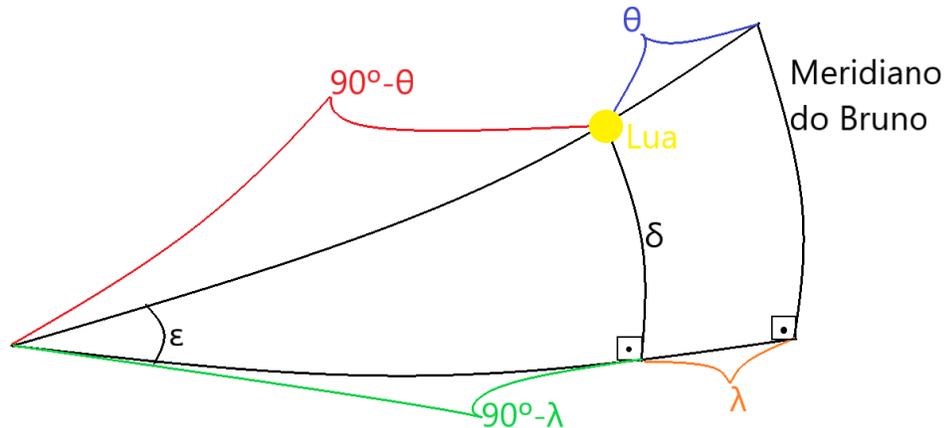
Considerando que, pela definição de uma elipse, $r' + r = 2a$:

$$(2a - r - r) \cdot 2a = 4ae(ae + r \cos(\theta))$$

$$a - r = e(ae + r \cos(\theta))$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}$$

(c) Com base no seguinte triângulo esférico, é possível determinar a declinação da lua:



$$\frac{\text{sen}(90^\circ - \theta)}{\text{sen}(90^\circ)} = \frac{\text{sen}(\delta)}{\text{sen}(\varepsilon)}$$

$$\sin(\delta) = \text{sen}(\varepsilon) * \cos(\theta)$$

$$\delta = \arcsen[\text{sen}(\varepsilon) * \cos(\theta)]$$

O triângulo em questão só é válido para o primeiro quadrante. Contudo, a fórmula ainda é válida nos outros quadrantes. Nos quadrantes 2 e 3, o ângulo $90^\circ - \theta$ é substituído por $\theta - 90^\circ$. Nesse caso, $\text{sen}(\theta - 90^\circ) = -\cos(\theta)$, mas o sinal negativo da declinação faz com que a expressão final seja igual à do último quadrante. No último quadrante, o ângulo utilizado é $\theta - 270^\circ$. Como $\text{sen}(\theta - 90^\circ) = \cos(\theta)$ e a declinação é positiva, a expressão permanece a mesma.

Com base no mesmo triângulo esférico, é possível determinar a diferença de longitude entre Bruno e a lua utilizando a fórmula das quatro partes:

$$\cos(90^\circ - \lambda) \cos(\varepsilon) = \cot(90^\circ - \theta) \text{sen}(90^\circ - \lambda) - \cot(90^\circ) \text{sen}(\varepsilon)$$

$$\text{sen}(\lambda)\cos(\varepsilon) = \tan(\theta)\cos(\lambda)$$

$$\tan(\lambda) = \frac{\tan(\theta)}{\cos(\varepsilon)}$$

$$\lambda = \arctan \left[\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varepsilon)} \right]$$

O argumento para mostrar que essa expressão é válida em todos os quadrantes é análogo ao argumento para a declinação.

O ângulo α é a separação angular entre Bruno e a projeção da lua no planeta, que pode ser calculada pela lei dos cossenos:

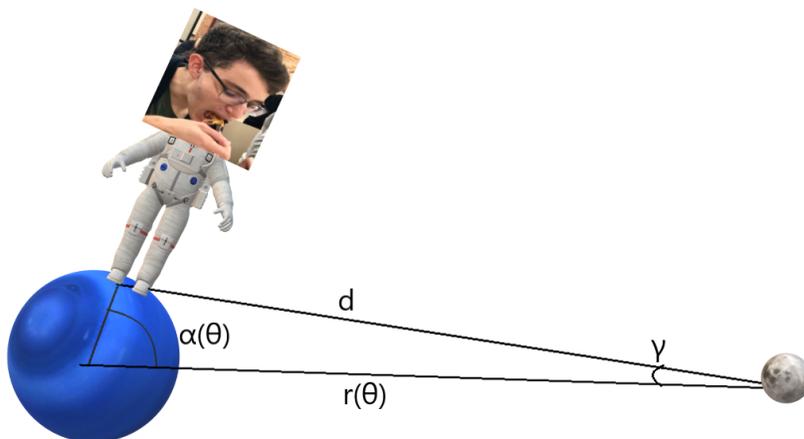
$$\cos(\alpha) = \cos(90^\circ - \phi)\cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \phi)\sin(90^\circ - \delta)\cos(\lambda)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\phi)\sin(\delta) + \cos(\phi)\cos(\delta)\cos(\lambda)$$

$$\alpha = \arccos(\sin(\phi)\sin(\delta) + \cos(\phi)\cos(\delta)\cos(\lambda))$$

\therefore O ângulo α pode ser calculado por meio da expressão $\alpha = \arccos(\sin(\phi)\sin(\delta) + \cos(\phi)\cos(\delta)\cos(\lambda))$, em que $\delta = \arcsen[\text{sen}(\varepsilon) * \cos(\theta)]$ e $\lambda = \arctan \left[\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varepsilon)} \right]$.

(d) A seguinte figura é necessária para a resolução desse item:



Força no centro do planeta:

$$F_{C,x} = \frac{GM_L m}{[r(\theta)]^2}$$

$$F_{C,y} = 0$$

Força na posição de Bruno:

$$F_{B,x} = \frac{GM_L m}{d^2} \cos(\gamma)$$

$$F_{B,y} = \frac{-GM_L m}{d^2} \sin(\gamma)$$

Força de maré:

$$F_{m,x} = GM_L m \left(\frac{\cos(\gamma)}{d^2} - \frac{1}{[r(\theta)]^2} \right)$$

$$F_{m,y} = \frac{-GM_L m}{d^2} \sin(\gamma)$$

Como a resposta final não pode estar em função de d ou de γ , é possível utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = ([r(\theta)] - R \cos(\alpha(\theta)))^2 + (R \sin(\alpha(\theta)))^2$$

$$d^2 = [r(\theta)]^2 - 2r(\theta) * R * \cos(\alpha(\theta)) + (R \cos(\alpha(\theta)))^2 + (R \sin(\alpha(\theta)))^2$$

Os termos que contém R^2 são muito pequenos comparados aos outros, logo é possível tirá-los da expressão:

$$d^2 = [r(\theta)]^2 - 2r(\theta) * R * \cos(\alpha(\theta))$$

$$d^2 = [r(\theta)]^2 \left[1 - \frac{2 * R * \cos(\alpha(\theta))}{r(\theta)} \right]$$

Substituindo essa expressão na fórmula da força de maré e considerando que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ se $x \ll 1$:

$$F_{m,x} \approx \frac{GM_L m}{[r(\theta)]^2} \left[\cos(\gamma) \left(1 + \frac{2R}{r} \cos(\alpha(\theta)) \right) - 1 \right]$$

$$F_{m,y} = -\frac{GM_L m}{[r(\theta)]^2} \left[1 + \frac{2R}{r(\theta)} \cos(\alpha(\theta)) \right] \sin(\gamma)$$

Como $r \gg R$, γ é um ângulo muito pequeno. Portanto, $\cos(\gamma) \approx 1$ e $r \approx d$. Além disso, pela lei dos senos, $\sin(\gamma) \approx \frac{R \sin(\alpha(\theta))}{r(\theta)}$. Dessa forma, a expressão final para a força de maré em função apenas dos parâmetros fornecidos é a seguinte:

$$F_m = \frac{GM_L m R}{[r(\theta)]^3} [2\cos(\alpha(\theta))\hat{\mathbf{i}} - \sin(\alpha(\theta))\hat{\mathbf{j}}]$$

9. **Modelando a Terra Plana (75 pontos)** Imagine a possibilidade da existência de dois planetas similares à Terra, porém de formatos singulares: um disco preenchido uniformemente (Planeta 5H33L) e um disco oco (Planeta 5H00J1). Sendo os discos completamente planos, podemos imaginar esses dois planetas como possíveis “Terras Planas”. Considere que os dois corpos possuem altura H , enquanto 5H33L possui massa específica ρ e 5H00J1 possui massa superficial σ .

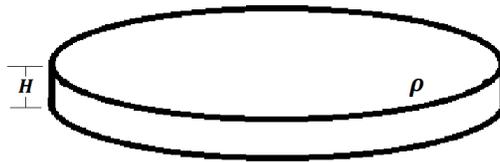


Figura 6: Modelo escolhido para os planetas.

Nessa questão, iremos estudar como o campo gravitacional se comporta nos arredores dos centros desses objetos. Para isso, assuma que o plano é muito extenso quando comparado a qualquer outra dimensão, desprezando, assim, efeitos de borda. Aqui, você deve utilizar a referência dos sistemas coordenados como o centro de cada planeta, como mostra a figura 4.

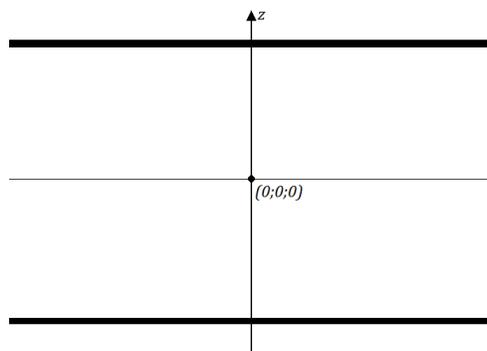


Figura 7: Eixo coordenado indicado para cada disco. Utilize a notação z_S para 5H33L e z_L para 5H00J1.

Tome $g(z)$ a intensidade do campo gravitacional como uma função da coordenada z , ou seja, a distância vertical entre o centro do planeta e o objeto de prova.

Parte A: Modelo de Campo

- (a) **(15 pontos)** Encontre o intervalo de valores que $g(z)$ pode assumir para os planetas 5H33L e 5H00J1. Como esses intervalos se diferenciam? Deixe sua resposta em função de constantes físicas, de ρ , σ e z .

Dica: Lembre-se da Lei de Gauss para o campo elétrico, $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon$, em que $\epsilon = 1/(4\pi K_e)$, sendo K_e a constante eletrostática do meio. A partir de uma analogia, procure expressar o fluxo do campo gravitacional para calcular o que se pede.

- (b) **(5 pontos)** Esboce o gráfico de $g(z)$ em função da coordenada z para cada um dos discos. Qual a principal diferença observada?
- (c) **(5 pontos)** Considere que a Terra, 5H00J1 e 5H33L possuem a mesma gravidade superficial. Nesse caso, determine a espessura H_S , sabendo que 5H33L e a Terra possuem mesma densidade. A partir desse resultado, encontre o valor numérico da densidade superficial de 5H00J1, σ .

Dados: Densidade da Terra: $\rho = 5571 \text{ kg/m}^3$. Raio da Terra: 6370 km.

Parte B: Viagem ao Centro da Terra

Suponha que foi construído um túnel em cada planeta capaz de ligar seus polos internamente, passando, assim, pelos seus centros.

- (d) **(12 pontos)** Para estudar como funciona a intensidade desse campo gravitacional, uma equipe de cientistas abandonou uma bolinha no começo de cada túnel. Sendo t_T , t_S e t_L os tempos necessários para que a bolinha vá de um polo até o outro, determine esses valores. Esclareça o tipo de movimento descrito pela bolinha em cada caso, justificando a ocorrência ou não de uma trajetória.
- (e) **(30 pontos)** Determine uma equação para o potencial gravitacional, $U(z)$, da Terra, de 5H33L e de 5H00J1 como função da coordenada z . Sua resposta deve ser literal e estar em função de constantes físicas, de ρ , σ e z .

Nota: Para 5H33LL e 5H00J1, adote o potencial gravitacional na superfície como $U_{sup} = 0$. Para a Terra, utilize como referência o infinito para a energia potencial gravitacional nula. Caso necessário, use M para a massa da Terra e R para o seu raio.

Dica (1): É possível escrever uma força conservativa em função do potencial da seguinte forma: $F = -dU/dx$.

Dica (2): Você não precisa de cálculo para resolver a questão: analise os gráficos esboçados no item (A.2) e tire suas conclusões.

Por causa de um defeito nos propulsores de emergência de uma das bolinhas de teste, ela ficou presa a uma distância $H/4$ do centro do planeta 5H33L. Agora os cientistas devem ajustar uma velocidade de lançamento capaz de devolvê-la para a superfície, a fim de realizar os devidos ajustes em seu sistema.

- (f) **(5 pontos)** Calcule a velocidade inicial v_S , em m/s , necessária para a realização dessa manobra.
- (g) **(3 pontos)** Se a bolinha estivesse presa a essa mesma distância, porém na Terra, quantas vezes a velocidade necessária seria maior ou menor para realizar a manobra análoga (ou seja, a partir da mesma distância em relação ao centro terrestre)? Expresse sua resposta na forma v_T/v_S , sendo v_T a velocidade mínima para o lançamento na Terra.

Observação: Exemplo de uso da Lei de Gauss para o Campo Elétrico:

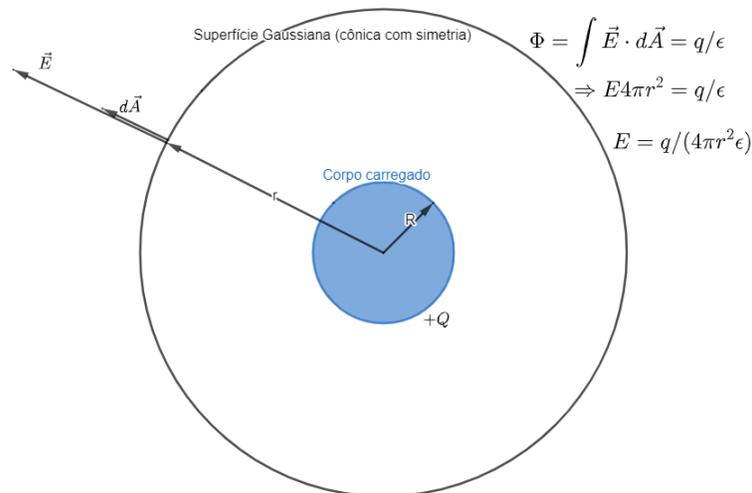


Figura 8: Não é necessário resolver a integral de maneira complexa. A partir de uma superfície gaussiana (superfície fechada e simétrica), o problema é resumido a uma simples soma. No exemplo acima, a soma de cada dA resulta na área da esfera que envolve o corpo carregado.

Solução:

(a) Para resolver esse item, iremos usar a Lei de Gauss aplicada para o campo gravitacional.

Primeiramente, iremos lembrar como escrever a Lei de Gauss para o campo gravitacional com uma analogia ao campo elétrico. Se, baseado nas equações da eletrostática, temos:

$$\oint E \cdot dA = q/\epsilon_0 = 4\pi Kq \quad (8)$$

Podemos fazer $K \leftarrow G$ e $q \leftarrow m$, pois possuem mesma proporcionalidade nas equações de campo. Dessa forma, encontramos:

$$\oint g \cdot dA = -4\pi Gm \quad (9)$$

O sinal negativo serve para dizer que o vetor campo gravitacional e o vetor área são antiparalelos.

Nesse momento, vamos desenhar duas superfícies gaussianas, uma interna e uma externa ao planeta. Assim, podemos observar como o campo gravitacional muda com a distância ao centro.

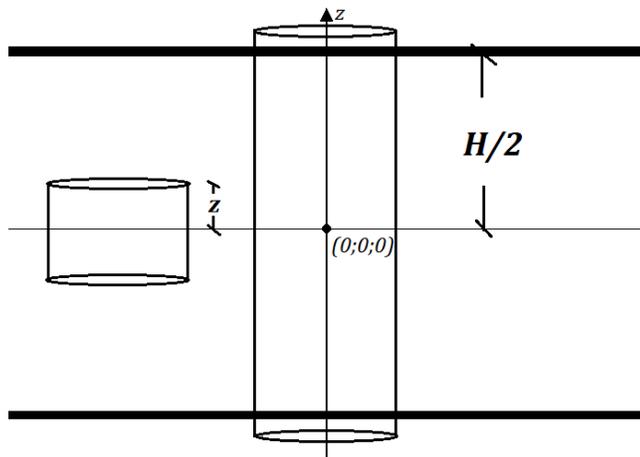


Figura 9: Superfícies Gaussianas utilizadas.

(i) **Campo Gravitacional Interno:** $(-H/2 \leq z \leq +H/2)$

Para o planeta 5H33L, vem:

$$|\vec{g}|2A = 4\pi Gm = 4\pi G(2\rho Az) \Rightarrow |\vec{g}| = 4\pi\rho G|z_S| \quad (10)$$

O planeta 5H00J1 não possui campo gravitacional interno, pois é um disco oco por dentro. Note que a área utilizada leva em consideração as bases inferior e superior, por isso substituímos $2A$ na equação (3).

(ii) **Campo Gravitacional Externo:** $(z \leq -H/2 \text{ ou } z \geq +H/2)$

De maneira análoga, vem:

$$|\vec{g}|2A = 4\pi Gm = 4\pi G(\rho AH) \Rightarrow |\vec{g}| = 2\pi\rho GH \quad (11)$$

Então, o intervalo de valores que g_S pode assumir é:

$$\vec{g} = \begin{cases} -2\pi\rho GH_S & ; z_S \geq +H/2 \\ -4\pi\rho Gz_S & ; -H/2 \leq z_S \leq +H/2 \\ 2\pi\rho GH_S & ; z_S \leq -H/2 \end{cases} \quad (12)$$

Para 5H00J1, devemos escrever $|\vec{g}|2A = 4\pi Gm = 4\pi G\sigma 2A \Rightarrow |\vec{g}| = 4\pi\sigma G$

$$\vec{g} = \begin{cases} -4\pi\sigma G & ; z_L \geq +H/2 \\ 0 & ; -H/2 \leq z_L \leq +H/2 \\ 4\pi\sigma G & ; z_L \leq -H/2 \end{cases} \quad (13)$$

(b) Com o sistema de equações (5) e (6), podemos traçar o gráfico do campo gravitacional em função da coordenada z :

Para 5H33L, temos:

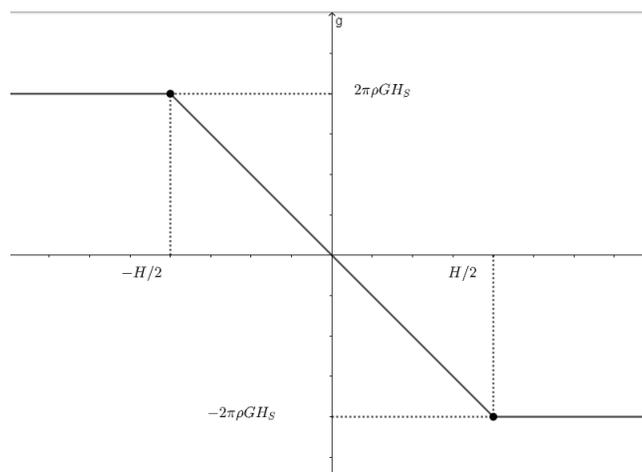


Figura 10: Campo gravitacional em função da coordenada z_S .

Para 5H00J1, como não há campo gravitacional interno, teremos uma figura similar, como mostramos abaixo.

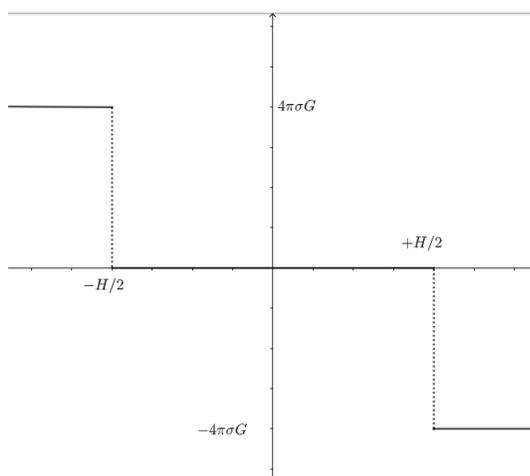


Figura 11: Campo gravitacional em função da coordenada z_L .

(c)

A gravidade da Terra é dada por:

$$g_T = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R = \frac{4}{3}\pi\rho GR \quad (14)$$

Fazendo $g_S = g_T$, vem:

$$\frac{4}{3}R = 2H_S \Rightarrow H_S = \frac{2}{3}R \quad (15)$$

Substituindo $R = 6370\text{km}$, obtemos o valor de $H_S = 4247\text{km}$.

Das expressões de gravidade superficial, escrevemos:

$$4\pi\sigma G = 2\pi\rho GH_S \Rightarrow \sigma = \frac{\rho H_S}{2} \quad (16)$$

Finalmente, obtemos $\sigma = 1,18 \times 10^{10}\text{kg/m}^2$

- (d) Iremos dividir este item em 3 casos diferentes, pois cada planeta possui uma equação de campo diferente em seu interior.

Planeta 5H00J1: Ao abandonar uma bolinha em seu interior, não haverá força gravitacional; portanto, não haverá movimento e $t_L \rightarrow \infty$.

Planeta Terra: A uma distância r da Terra, somente a massa interior a uma esfera de raio r irá produzir força gravitacional na bolinha devido à Lei de Gauss.

Como a Terra possui densidade constante, podemos escrever que $M_r = M_{\oplus}(r/R)^3$. Assim, temos:

$$g_T = -\frac{GM_r}{r^2} = -G\frac{M_{\oplus}(r/R)^3}{r^2} \Rightarrow g_T = -\frac{4}{3}\pi\rho Gr \quad (17)$$

Perceba que essa equação representa um MHS de $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\rho G$, pois a aceleração resultante é da forma $a = -\omega^2 x$. Para a bolinha ir de uma extremidade até a outra, ela levará meio período do seu movimento oscilatório, fornecendo o seguinte resultado:

$$t_T = \frac{\Delta T}{2} = \pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} \Rightarrow t_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} \quad (18)$$

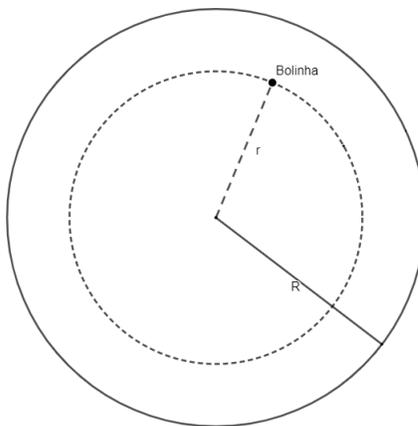


Figura 12: Esquema da bolinha a uma distância r do centro da Terra.

Planeta 5H33L: Da equação obtida em (3), notamos que o movimento resultada da bolinha também será um MHS, pois sua aceleração resultante é da forma $a = -\omega^2 x$. Dessa forma, $\omega^2 = 4\pi\rho G$.

$$t_S = \frac{\Delta T'}{2} = \pi \sqrt{\frac{1}{4\pi\rho G}} \Rightarrow t_S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho G}} \quad (19)$$

Daí, $t_T = 42 \text{ min}$, $t_S = 24 \text{ min}$ e $t_L \rightarrow \infty$.

(e) Mais uma vez, iremos dividir o item em 3 casos distintos. Pelas dicas, podemos escrever duas soluções diferentes:

Dica (1): Usando cálculo diferencial e integral.

Planeta Terra: Já sabemos como o potencial varia no espaço externo à Terra: $U(z \geq R) = -\frac{GMm}{R}$. Resta apenas determinar como o potencial gravitacional varia na região interna. Sabemos que a força é do tipo $F = -\frac{GMm}{R^3}z$, então:

$$\frac{dU}{dz} = -F = \frac{GMm}{R^3}z \Rightarrow \int_{U_{sup}}^{U_z} dU = \frac{GMm}{R^3} \int_R^z z dz \Rightarrow U_z + \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R^3}(z^2 - R^2) \quad (20)$$

$$\Rightarrow U(z) = \frac{GMm}{2R^3}(z^2 - 3R^2) \quad (21)$$

A partir das equações acima, podemos determinar o intervalo de valores que o potencial gravitacional pode assumir:

$$U(z_T) = \begin{cases} \frac{GMm}{2R^3}(z_T^2 - 3R^2) & 0 \leq z_T \leq R \\ -\frac{GMm}{z_T} & z_T \geq R \end{cases} \quad (22)$$

Planeta 5H33L: O campo externo é constante, então podemos fazer uma analogia com a variação de potencial da força peso (considerada constante próxima à superfície). Assim, se a força é dada por $F = 2\pi\rho GHm$, a função do potencial gravitacional externo é descrita por $U(z \geq H/2) = 2\pi m\rho GH(z_S - \frac{H}{2})$. Para o campo interno, a força é do tipo $F = -4\pi\rho Gz$, então:

$$\int_0^{U_z} dU = 4\pi m\rho G \int_{H/2}^z z dz \Rightarrow U(z) = \frac{m\pi\rho G}{2}(4z^2 - H^2) \quad (23)$$

Dessa forma, o intervalo de valores que $U(z_S)$ assume é:

$$U(z_S) = \begin{cases} \frac{m\pi\rho G}{2}(4z_S^2 - H^2) & 0 \leq z_S \leq H/2 \\ 2m\pi\rho GH(z_S - \frac{H}{2}) & z_S \geq H/2 \end{cases} \quad (24)$$

Planeta 5H00J1: O potencial gravitacional interno não varia com a distância, pois não há força dentro do disco oco. Assim, $U(0 \leq z \leq H/2) = 0$. O intervalo de valores de $U(z_L)$ é, então:

$$U(z_L) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z_L \leq H/2 \\ 4\pi G\sigma(z_L - \frac{H}{2}) & z_L \geq H/2 \end{cases} \quad (25)$$

Dica (2): Calculando a área do gráfico.

Planeta Terra: Sabemos como o campo gravitacional interno da Terra varia, pois ele foi calculado no item (B.1). Dessa forma, esboçamos o gráfico da força em função da distância ao centro do planeta. Na figura abaixo, desejamos determinar a área sombreada.

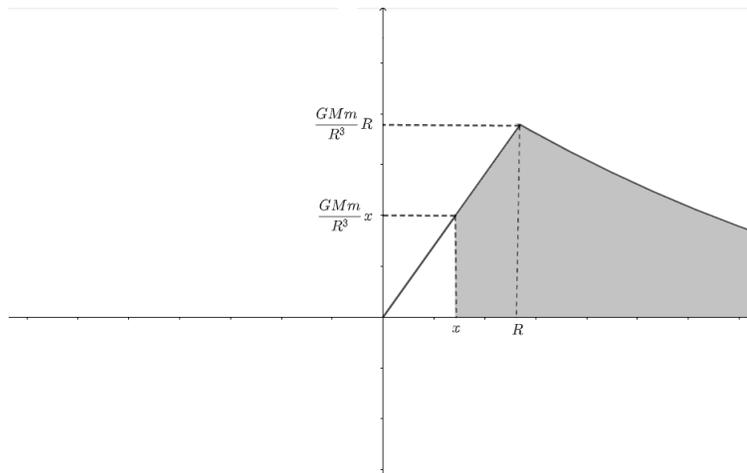


Figura 13: Gráfico da força gravitacional em função da distância ao centro.

Como já sabemos como se comporta a função $U(x)$ para $x \geq R$, precisamos determinar como ela se comporta no interior da Terra.

Imagine uma bolinha carregada da superfície ($x = R$) até um ponto z qualquer dentro do planeta. Assim, conforme a figura, e das dicas da questão, podemos escrever:

$$U(z) - U(R) = -\tau_{g,R \rightarrow z} \stackrel{N}{=} -Area_{Trapezio} \tag{26}$$

Daí, desenvolvendo:

$$U(z) + \frac{GMm}{R^3}R^2 = -\frac{GMm}{2R^3}(R+z)(R-z) \Rightarrow U(z) = \frac{GMm}{2R^3}(z^2 - 3R^2) \tag{27}$$

Que é o mesmo resultado encontrado na primeira solução.

Planeta 5H33L: Com o gráfico do item (b) em mente, faremos, para $z \leq H/2$, o seguinte cálculo:

$$U(z) - U(H/2) = -\tau_{g,H/2 \rightarrow z} = -m \frac{(\frac{H}{2} - z)(4\pi\rho Gz + 2\pi GH)}{2} \Rightarrow U(z) = \frac{m\pi\rho G}{2}(H^2 - 4z^2) \tag{28}$$

Para $z \geq H/2$, o resultado é obtido simplesmente pela área do retângulo, Ou seja, $U(z) = 2m\pi\rho GH(z - \frac{H}{2})$.

Planeta 5H00J1: O cálculo do potencial segue análogo ao realizado acima, com a diferença que o potencial não varia dentro desse planeta oco. Assim, $U(z \geq H/2) = 4\pi G\sigma(z - \frac{H}{2})$.

Observe que o cálculo diferencial e integral não era necessário para nenhum item até aqui. Apenas a compreensão do conceito de simetria e o uso correto das definições de energia nos levariam aos resultados corretos do que foi pedido até então. Os outros dois itens serão aplicações diretas do que aprendemos com os exercícios anteriores.

(f) Basta utilizar a equação encontrada em (16) e conservar a energia mecânica.

$$\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow (0 + 0) - \left[\frac{mv_S^2}{2} + \frac{m\pi\rho G}{2} \left(\frac{H^2}{4} - H^2 \right) \right] = 0 \Rightarrow \quad (29)$$

$$\Rightarrow v_S = \frac{H}{2} \sqrt{3\pi\rho G} \Rightarrow v_S = \frac{R}{3} \sqrt{3\pi\rho G} \quad (30)$$

Substituindo os valores dados, vem: $v_S = 3974 \text{ m/s}$.

(g) Mais uma vez, iremos conservar a energia mecânica desse processo. Para isso, utilizamos as equações em (14). Observe que $z = H/4 = (2R/3)/4 = R/6$.

$$\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow -\frac{GMm}{R} - \left[\frac{mv_T^2}{2} + \frac{GMm}{2R^3} (R^2 - 3R^2) \right] = 0 \Rightarrow v_T^2 = \frac{35}{36} \frac{GM}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^2 \frac{4}{3} \pi \Rightarrow \quad (31)$$

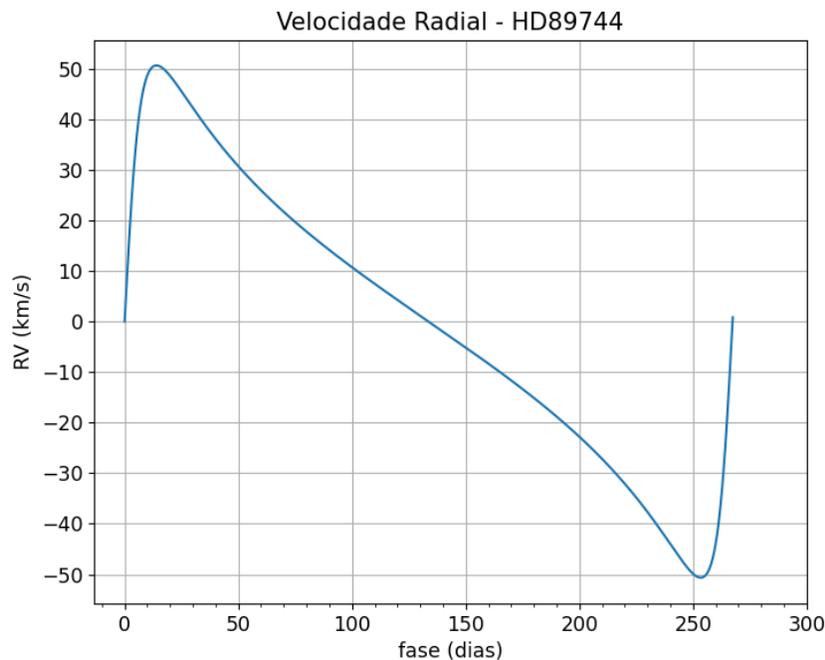
$$\Rightarrow v_T = \frac{R}{3} \sqrt{\frac{35}{3} \pi \rho G} \quad (32)$$

Com isso, podemos fazer (21) \div (19) para encontrar a razão pedida:

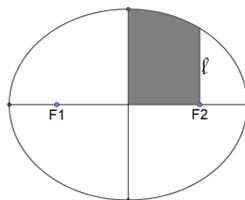
$$\frac{v_T}{v_S} = \sqrt{\frac{35}{9}} \Rightarrow \frac{v_T}{v_S} \approx 1,97 \quad (33)$$

Isso significa que a velocidade mínima na Terra é $1,97 \text{ vezes maior}$ do que no planeta 5H33L.

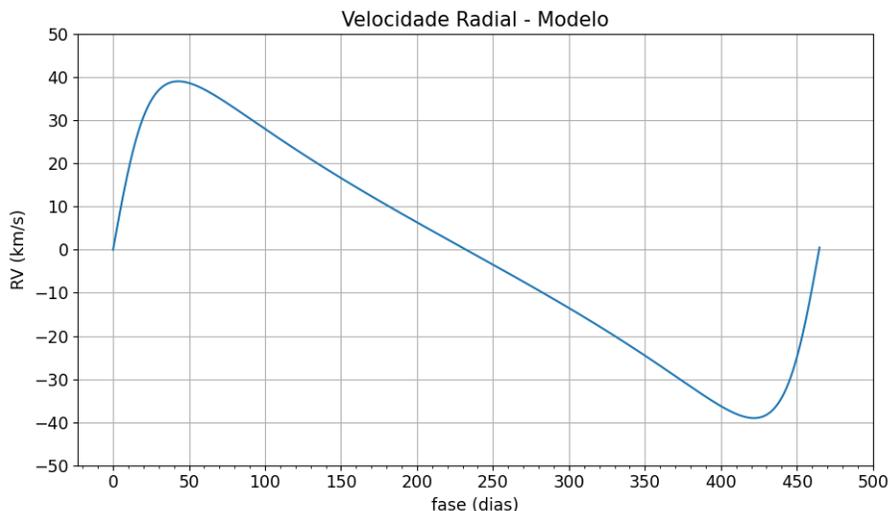
10. **HD 89744 b (75 pontos)** Para os astrônomos do planeta Kafsh, a curva de velocidade radial da estrela HD89744, localizada fora do sistema kafshminiano, é particularmente intrigante. O exoplaneta de HD89744, HD89744b, é bem conhecido pela comunidade interestelar. Ele possui alta excentricidade e massa de 8,35 massas de Júpiter. Devido à posição da linha de visada com a órbita, essa excentricidade não se reflete nos máximos e mínimos da intrigante curva, como se pode verificar:



Sabe-se que a magnitude aparente observada da estrela de estudo é 6,65 e a inclinação da órbita do exoplaneta é $i = 90^\circ$ para os kafshminianos, isto é, trata-se de um sistema eclipsante. Além disso, as velocidades radiais máxima e mínima acontecem nos *semi-latus rectum* da mencionada órbita. Considere a massa de Júpiter como sendo $M_J = 9,5425 \cdot 10^{-4} M_\odot$. **Dica:** a área destacada abaixo é igual a $\frac{ab}{2} (\arcsin(e) + e\sqrt{1-e^2})$.



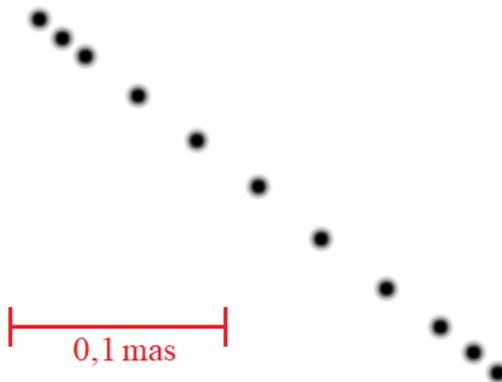
- (a) **(2 pontos)** Qual é o período de translação do exoplaneta ao redor de sua estrela?
- (b) **(12 pontos)** Para estudar a situação, os astrônomos produziram um modelo computacional com a mesma configuração do sistema do enunciado, porém com parâmetros arbitrários. Para um certo conjunto-exemplo, obtiveram a seguinte curva:



Interprete a situação da órbita de HD89744, bem como a do modelo, e encontre a excentricidade da órbita do sistema estelar de modelo.

- (c) **(8 pontos)** Utilizando o procedimento do item (b) na curva real, obteve-se uma excentricidade de 0,677 para a órbita do exoplaneta e sua estrela. Agora, descubra o primeiro instante, em dias, no qual esse planeta passa por um ponto do seu eixo menor.
- (d) **(14 pontos)** Determine o semi-eixo maior da órbita de HD89744b, em UA.
- (e) **(5 pontos)** Encontre a massa da estrela HD89744, em massas solares.

Após estudos observacionais usando técnicas avançadas de interferometria, os kafshminianos puderam conceber a imagem da estrela HD89744 se movimentando devido ao exoplaneta:



- (f) **(10 pontos)** Encontre a distância a HD89744, em pc, calculada pelo povo de Kafsh. Considere que o baricentro do sistema estelar se move apenas na direção radial do observador.
- (g) **(12 pontos)** Sabe-se que a vizinhança estelar de Kafsh é bem empoeirada, poluída pela associação galáctica. Descubra a profundidade óptica do meio interestelar entre o planeta kafshminiano e a estrela estudada. Despreze a extinção atmosférica. **Dica:** lembre-se das diferentes maneiras de se encontrar luminosidade. Uma delas o ajudará.
- (h) **(12 pontos)** Calcule os valores dos movimentos próprios da estrela, em *mas/ano* (milissegundos de arco por ano), quando ela estiver passando pelo seu periastro e apoastro.

Solução:

ESCLARECIMENTO: na solução anterior do item (d) desta questão pensou-se nas velocidades radiais do gráfico como sendo referentes a órbita relativa do sistema estrela-exoplaneta, o que é errado. As velocidades radiais são da estrela, como o próprio título do gráfico informa, ou seja, dela na sua órbita individual ao redor do centro de massa do conjunto. Sem raciocinar dessa forma, o gráfico foi programado também de maneira errada, ele, na verdade, informa de fato as velocidades radiais na órbita relativa do sistema. Com isso, mesmo com uma nova solução, correta, para o item (d), os dados nos levam a uma massa negativa para a estrela HD89744, o que é totalmente incoerente.

Finalmente, por isso, decidiu-se resolver o problema, a partir do item (d), apenas algebricamente e anular o item (e), que pede para calcular a massa da estrela.

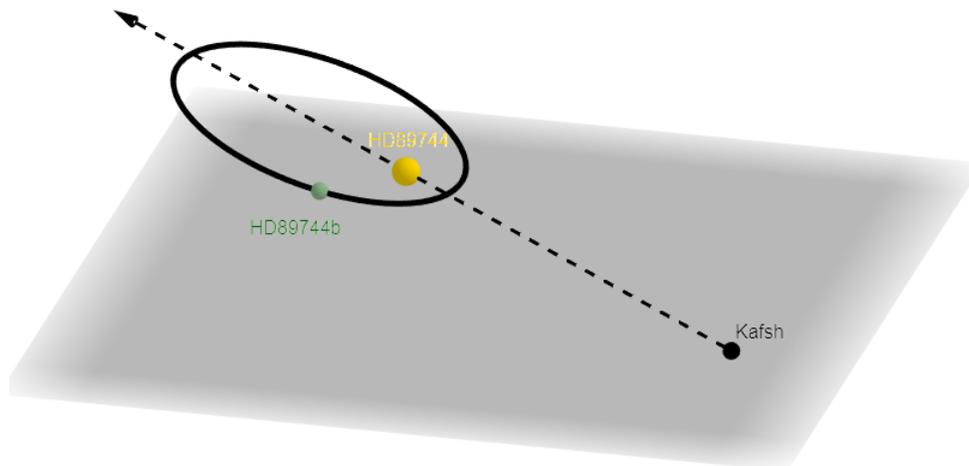
(a)

Inspecionando no gráfico, encontramos:

$$P \approx 267 \text{ dias}$$

(b)

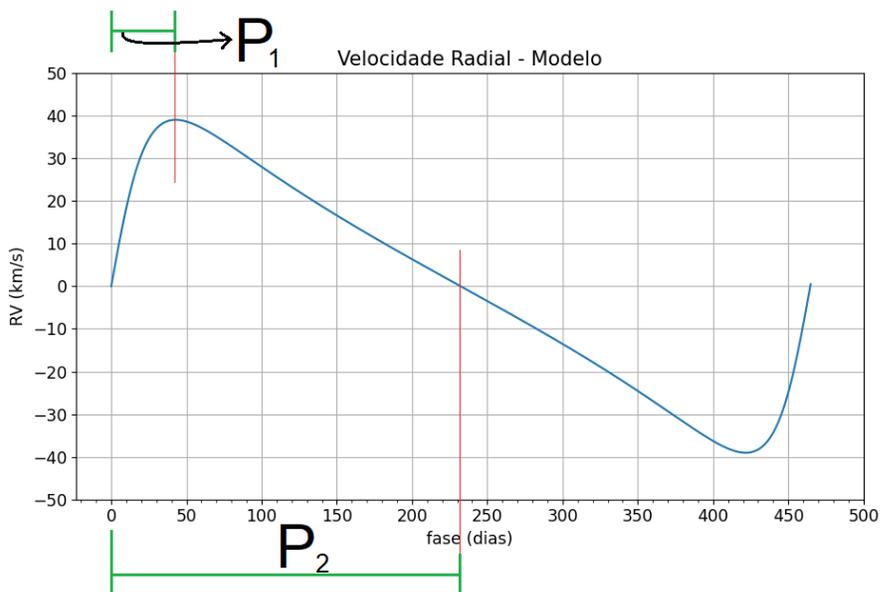
Se os valores absolutos dos máximos e mínimos são iguais e a órbita é excêntrica, então a linha de visada dos cientistas de Kafsh é coincidente ao eixo maior da órbita do exoplaneta e estrela, como é representado abaixo:



Já que o eixo maior está alinhado com a linha de visada, então as velocidades radiais observadas em Kafsh são nulas quando o exoplaneta passa pelo seu periastro e apoastro.

A partir do gráfico e da informação dada sobre a velocidade radial máxima acontecer no semi-latus rectum, nota-se que a contagem de tempo se inicia quando o exoplaneta está em seu periastro e passa pelo apoastro entre os dias 200 e 250, quando $RV = 0$ km/s.

Com o acima dito, podemos aplicar a segunda lei de Kepler e encontrar uma relação entre o intervalo de tempo até atingir o semi-latus rectum, P_1 , e até atingir o apoastro, P_2 .



Do gráfico temos $P_1 \approx 42$ dias e $P_2 \approx 228$ dias.

A área varrida pelo raio-vetor do planeta até o semi-latus rectum será $\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} (\arcsin(e) + e\sqrt{1-e^2})$ e a área até o apoastro é a metade da área da elipse, isto é, $\frac{\pi ab}{2}$.

Aplicando a 2ª lei de Kepler:

$$\frac{\frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(e) - e\sqrt{1-e^2} \right)}{\frac{\pi ab}{2}} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(e) - e\sqrt{1-e^2}}{\pi} - \frac{P_1}{P_2} = 0$$

Utilizando iteração, testando vários valores no primeiro membro da expressão acima para o resultado ser o mais próximo de zero possível, encontramos:

$$e \approx 0,52$$

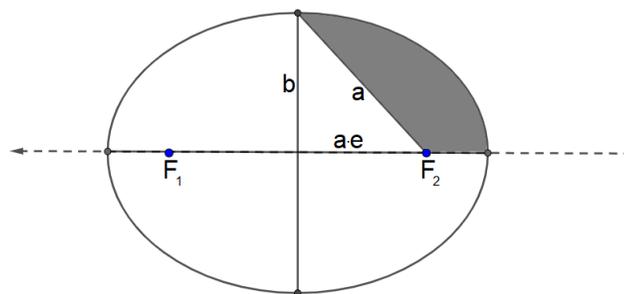
(c)

Para achar o instante utilizemos a segunda lei de Kepler:

Da segunda lei, temos:

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2}$$

Aplicando o acima para até chegar no semi-eixo menor, P_b , e até completar uma órbita, P , sendo a área varrida no intervalo de tempo P_b a área destacada abaixo, temos em seguida:

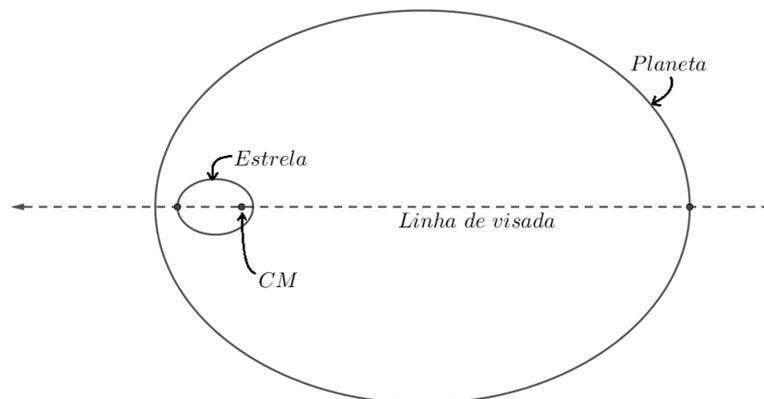


$$\frac{\pi ab}{P} = \frac{\frac{\pi ab}{4} - \frac{ae \cdot b}{2}}{P_b} \Rightarrow P_b = \frac{\pi - 2e}{4\pi} P$$

Fazendo as contas, encontramos $P_b = 37,9813$ dias, então:

$$P_b = 38 \text{ dias}$$

(d) - **ERRATA**



Para encontrar o semi-eixo maior a da órbita do exoplaneta vamos relacionar a equação vis-viva, fórmulas de centro de massa e a terceira lei de Kepler.

A equação vis-viva nos fornece as velocidades na órbita relativa do sistema, porém as velocidades radiais encontradas no gráfico do problema se referem a estrela, ou seja, à sua órbita individual ao redor do baricentro do conjunto. Para ligar tais informações, usemos a expressão da posição do centro de massa:

Seja \vec{r}_* a posição da estrela para o centro de massa e, analogamente, \vec{r}_p a posição do exoplaneta. Se definimos a posição do centro de massa como $\vec{r}_{CM} = \vec{0}$, então:

$$(M + m)\vec{r}_{CM} = M\vec{r}_* + m\vec{r}_p \Rightarrow \vec{r}_p = -\frac{M}{m}\vec{r}_*$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\vec{v}_p = -\frac{M}{m}\vec{v}_*$$

Como a velocidade na órbita relativa é $\vec{v} = \vec{v}_p - \vec{v}_*$, então:

$$\vec{v} = -\frac{M}{m}\vec{v}_* - \vec{v}_* = -\left(\frac{M}{m} + 1\right)\vec{v}_* = -\frac{M+m}{m}\vec{v}_*$$

Em módulo:

$$v_* = \frac{m}{M+m}v$$

Da terceira lei de Kepler temos:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3 \Rightarrow M+m = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2} \Rightarrow \sqrt{M+m} = \frac{2\pi}{\sqrt{G}} \frac{\sqrt{a^3}}{P}$$

Sabendo que $l = a(1 - e^2)$, no *semi-latus rectum*, a velocidade na órbita relativa é:

$$v_l = \sqrt{G(M+m)} \left(\frac{2}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a} \right) = \sqrt{G(M+m)} \sqrt{\frac{1+e^2}{a(1-e^2)}}$$

Substituindo $\sqrt{M+m}$ da terceira lei de Kepler na expressão anterior, vamos calcular a velocidade da estrela no seu *semi-latus rectum*:

$$v_{l*} = \frac{m}{M+m}v_l = \frac{m}{M+m} \sqrt{G(M+m)} \sqrt{\frac{1+e^2}{a(1-e^2)}} = \frac{m\sqrt{G}}{\sqrt{M+m}} \sqrt{\frac{1+e^2}{a(1-e^2)}} \Rightarrow$$

$$v_{l*} = m\sqrt{G} \frac{\sqrt{G}}{2\pi} \frac{P}{\sqrt{a^3}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}$$

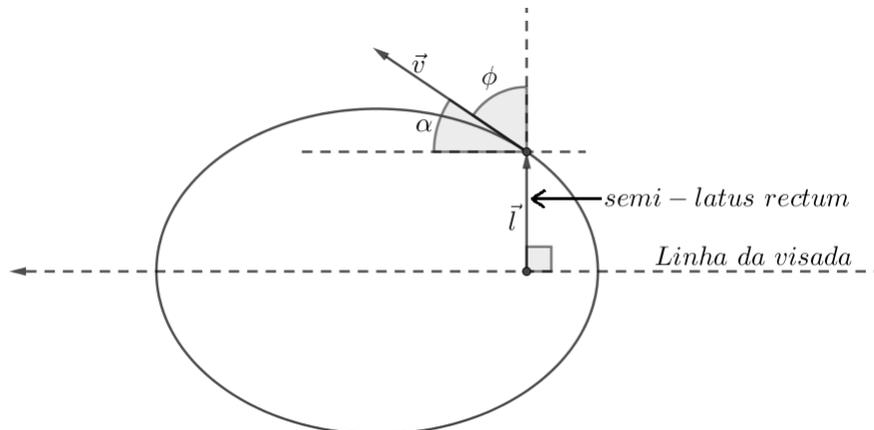
Dessa maneira, encontramos uma expressão para encontrar o semi-eixo maior da órbita relativa:

$$v_{l*} = \frac{mGP}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}$$

$$a^2 = \frac{mGP}{2\pi v_{l*}} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}$$

$$a = \sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{l*}} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}}$$

Encontramos a velocidade da estrela no seu *semi-latus rectum*, todavia, queremos velocidades radiais. Por isso, vamos realizar essa conversão:



Da figura acima, vemos que:

$$v_{l_*,r} = v_{l_*} \cos \alpha$$

Vamos conservar momento angular e encontrar tal velocidade. Tomando o momento angular no periastro e no semi-latus rectum:

$$Mv_{\text{periastro}} \cdot r_{\text{periastro}} = L = Mv_l r_l \cos \alpha$$

$$\sqrt{G(M+m) \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)} \cdot a(1-e) = \sqrt{G(M+m) \frac{1+e^2}{a(1-e^2)}} \cdot a(1-e^2) \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{G(M+m)(1+e)a(1-e)} = \sqrt{G(M+m)(1+e^2)a(1-e^2)} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{(1+e)(1-e)}{(1+e^2)(1-e^2)}}$$

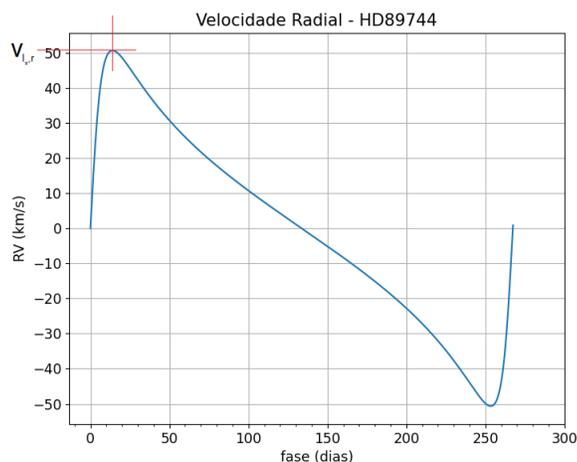
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$$

Dessa maneira, completamos a expressão do semi-eixo maior para os dados que temos:

$$a = \sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{l_*}} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}} = \sqrt{\frac{mGP \cos \alpha}{2\pi v_{l_*,r}} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}} = \sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{l_*,r}} \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}} \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{l_*,r} \sqrt{1-e^2}}}$$

Consoante o enunciado, a velocidade máxima é a velocidade radial da estrela no *semi-latus rectum*. Assim, medindo $v_{l_*,r}$ encontramos:



$$v_{l_*,r} = 50,7 \text{ km/s}$$

$$a = \sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{l_*,r} \sqrt{1-e^2}}}$$

Como a pergunta não é clara se o semi-eixo maior do exoplaneta é da sua órbita relativa (encontrado acima) ou da sua órbita individual, vamos pensar no segundo caso e encontrar tal parâmetro.

Por consequência da expressão do centro de massa, o semi-eixo maior da órbita individual do exoplaneta a_p é:

$$a_p = \frac{M}{m + M} a$$

Portanto:

$$a_p = \frac{M}{m + M} \sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{l*,r} \sqrt{1 - e^2}}}$$

(e) - **ERRATA**

ANULADA

(f) - **ERRATA**

O deslocamento angular máximo na figura corresponde ao tamanho do eixo menor da órbita individual da estrela ao redor do seu centro de massa, isto é, $\theta \longleftrightarrow 2b_*$.

$$2b_* = 2a_* \sqrt{1 - e^2} = 2a_* \sqrt{1 - 0,677^2}$$

Por centro de massa, encontramos a_* . Seja m a massa do planeta, então:

$$(M + m)a_* = M \cdot 0 + m \cdot a \Rightarrow a_* = \frac{m}{M + m} a$$

Por trigonometria, sendo d a distância de Kafsh até o sistema:

$$2b_*/d = \theta \Rightarrow d = 2b_*/\theta$$

Utilizando o *paint*, medimos as dimensões do deslocamento e da escala da imagem e obtivemos:

$$\theta = \frac{454,054 \text{ pixels}}{169 \text{ pixels}} \cdot 0,1 \text{ mas} = 0,26867 \text{ mas}$$

$$d = \frac{2a \frac{m}{M+m} \sqrt{1 - e^2}}{\theta}$$

(g) - **ERRATA**

Vamos comparar a estrela com o Sol:

$$m - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_{\odot}} \right)$$

O fluxo F da estrela foi diminuído devido a poeira do meio entre a estrela e Kafsh, segundo a expressão da profundidade óptica:

$$F = F_0 e^{-\tau}$$

Utilizando o fluxo sem extinção:

$$m - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{F_0 e^{-\tau}}{F_{\odot}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{F_0}{F_{\odot}} \right) + 2,5\tau \log(e)$$

A magnitude da estrela sem extinção será então:

$$m_0 - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{F_0}{F_{\odot}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \frac{d_{\odot}^2}{d^2} \right)$$

Encontramos a luminosidade da estrela com a relação massa-luminosidade. A massa da estrela está em algum dos intervalos de valores da mencionada relação, então, de maneira geral, vamos escrever:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = k \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^p$$

Substituindo:

$$m - m_{\odot} = -2,5 \log \left(k \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^p \frac{d_{\odot}^2}{d^2} \right) + 2,5 \log(e) \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{1}{2,5 \log(e)} \left(m - m_{\odot} + 2,5 \log \left(k \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^p \frac{d_{\odot}^2}{d^2} \right) \right) \quad e = 2,718\dots$$

(h) - **ERRATA**

Obtemos a velocidade no periastro e no apoastro e então dividimos cada uma pela distância. Para obter as velocidades reais da estrela, usamos a equação vis-viva e as equações do referencial de centro de massa.

$$v_p = \sqrt{G(M+m) \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$v_a = \sqrt{G(M+m) \left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right)}$$

Onde v_p e v_a são as velocidades relativas entre o planeta e a estrela no periastro e no apoastro.

Para então encontrar a velocidade da estrela em relação ao centro de massa, usaremos as equações do referencial de centro de massa. Assim, temos:

$$|v_{a_e}| = \frac{m}{M+m} v_a$$

e

$$|v_{p_e}| = \frac{m}{M+m} v_p$$

Para obter o movimento próprio, isto é, a velocidade angular, simplesmente dividimos pela distância, logo, temos:

$$|\omega_{p_e}| = \frac{1}{d} \frac{m}{M+m} \sqrt{G(M+m) \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$|\omega_{a_e}| = \frac{1}{d} \frac{m}{M+m} \sqrt{G(M+m) \left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right)}$$