PROVA TEÓRICA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2021

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - P1". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - P1";
3. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
4. No canto superior esquerdo de TODAS as páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e meia e o tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **5 questões**, sendo 1 valendo 5 pontos, 3 valendo 10 pontos e 1 valendo 15 pontos.
   - Questões Médias - **3 questões**, sendo 2 valendo 30 pontos e 1 valendo 40 pontos.
   - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 70 pontos e a outra valendo 80 pontos.
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

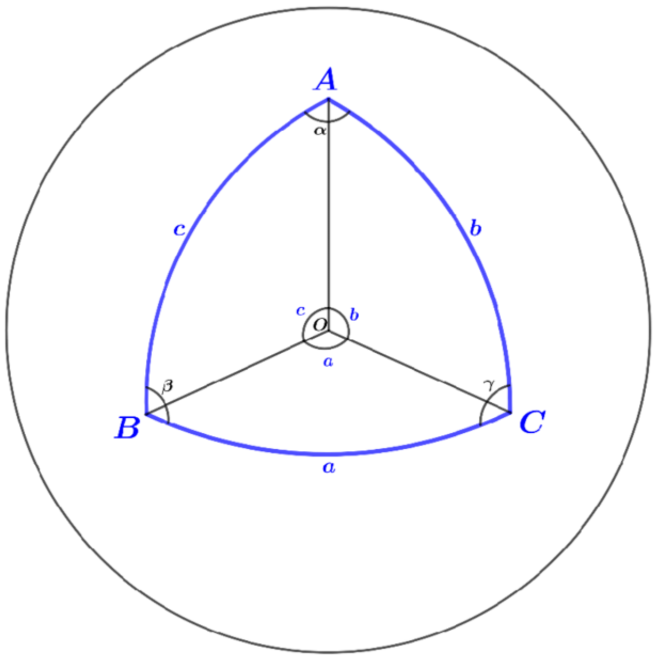
1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom;
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova;
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções;
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente "Pulei a questão anterior".

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938,27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{sen(a)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(b)}{sen(\beta)} = \frac{sen(c)}{sen(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(\alpha)$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Pressão de radiação (reflexão perfeita e ângulo de incidência nulo):

$$P = \frac{2F}{c}$$

sendo F o fluxo de radiação e c a velocidade da luz

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Derivada da função arco-tangente:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Derivada da função tangente:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$$

Questões Curtas

1. **(5 pontos)** Um estranho objeto parecido com uma bola de beisebol está rapidamente em queda livre em rota de colisão com a cabeça do nosso cosmonauta favorito: Bismarck. Ele admira desatento a paisagem do planeta sem atmosfera Jamn-19b sem notar o objeto não identificado. Seu amigo Bruno Pizza, atento, olha para cima e percebe o corpo estranho. Então, prontamente, alerta Bismarck da ameaça e ambos dão alguns passos e se safam.

   Considere que o diâmetro de uma bola de beisebol é $7,4$ cm, que no momento descrito a abertura da pupila de Bruno era de 6 mm, que ele enxerga apenas em 550 nm e que sua visão é saudável. Qual foi a distância entre os olhos de Bruno e a bola no momento em que ela tornou-se visível como um corpo extenso?

2. **(10 pontos)** Considere um sistema binário a 20,0 pc da Terra em que as duas estrelas possuem órbitas circulares com diâmetros angulares aparentes de 1,50" e 0,500". Devido ao deslocamento Doppler, para um observador no plano orbital do sistema binário o comprimento de onda central da linha H_α da estrela de menor massa atinge um valor máximo de 656,330 nm. Considere que o comprimento de onda da linha H_α equivale a 656,281 nm quando medido em laboratório. Calcule o período orbital do sistema, em anos.

3. **(10 pontos)** A galáxia RG - 118, quando vista por nós da Terra, aparenta ter um formato elíptico com semieixo maior de 18" e $\frac{b}{a} = 0,71$. Essa galáxia tem brilho superficial de 20,2 $mag \cdot arcsec^{-2}$ e magnitude absoluta M_g = - 19.

   (a) **(7 pontos)** Calcule a distância, em Mpc, até a galáxia.

   (b) **(3 pontos)** A galáxia na verdade tem formato de disco, mas nós a vemos com formato elíptico devido a uma inclinação dela com relação à nossa linha de visada. Calcule o ângulo, em graus, entre o vetor normal à superfície de RG - 118 e a nossa linha de visada.

4. **(10 pontos)** O exoplaneta C410 orbita a curiosa estrela 4LC1D75 em uma trajetória elíptica com parâmetro $\lambda = 3 - 2\sqrt{2}$, em que λ é a razão entre o periélio e o afélio desta órbita. No momento em que a anomalia verdadeira é $\theta_o = 45^o$, a velocidade do exoplaneta é v_o. Com base no texto acima, resolva os itens a seguir.

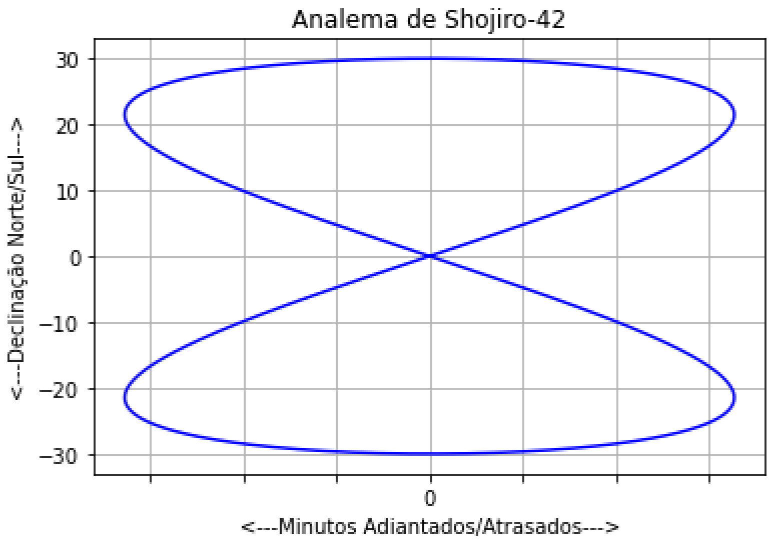
   (a) **(4 pontos)** Qual a velocidade v_1 de C410 quando esse passar pelo semi-eixo menor de sua órbita, em função de v_o?

   A partir de estudos mais cuidadosos, percebeu-se que o vetor posição que liga a estrela ao exoplaneta percorre um ângulo $\Delta\theta_o$ em um intervalo de tempo Δt quando C410 está na posição θ_o. A fim de saber qual ângulo α o vetor velocidade fazia com o vetor posição nesta configuração, o movimento de C410 foi também estudado no momento em que ele estava passando pelo eixo menor de sua órbita, descrito pela anomalia verdadeira θ_1.

   (b) **(6 pontos)** Sabendo que o vetor posição de C410 percorreu um ângulo $\Delta\theta_1$ na posição θ_1 em um mesmo intervalo de tempo Δt, determine α.

   Dados: $\Delta\theta_0 = 1'21,567''$ e $\Delta\theta_1 = 0'9,0526''$.

5. **(15 pontos)** Bruno habita um planeta que orbita a estrela Shojiro-42. Ele, sempre muito curioso, decidiu plotar o analema de sua estrela, obtendo a seguinte imagem:



Bruno, contudo, se esqueceu de adotar uma escala para a abcissa de seu gráfico, responsável por representar a equação do tempo. Assim, ajude-o nessa tarefa e encontre o módulo do maior valor possível da equação do tempo, em minutos, no planeta de Bruno.
Considere que um dia estelar no planeta de Bruno possui 24h e note que a excentricidade de sua órbita é nula.

Questões Médias

6. **(30 pontos)** O método mais comum para localizar o polo celeste Sul é prolongar o eixo maior do Cruzeiro do Sul (*Crux*) 4,5 vezes a partir de Gacrux (γ Cru).
   (a) **(15 pontos)** Para determinar a precisão desse método, calcule o ângulo entre o polo celeste Sul verdadeiro e o polo celeste determinado pelo Cruzeiro do Sul.
   (b) **(10 pontos)** O número 4,5 é uma aproximação que funciona suficientemente bem para determinar o polo celeste Sul. Contudo, essa não é a melhor aproximação possível. Calcule o valor pelo qual o eixo maior do Cruzeiro do Sul deve ser prolongado para obter a posição mais próxima do polo celeste Sul.
   (c) **(5 pontos)** Qual é o ângulo entre o polo celeste Sul verdadeiro e o polo celeste determinado pelo Cruzeiro do Sul para o valor obtido no item anterior?

   Dados:

   Acrux (α Cru): $\delta = -63^o13'$, $\alpha = 12h27min48s$

   Gacrux (γ Cru): $\delta = -57^o14'$, $\alpha = 12h32min21s$

7. **(30 pontos)** O gráfico abaixo mostra a frequência de rotação do Pulsar da Vela (PSR J0835-4510) ao longo do tempo. Considere que esse comportamento é válido para todos os pulsares do Universo e que a taxa de variação de período se mantém constante após o Dia Juliano 59200 e é igual a variação média de período entre as datas 58600 e 59200.

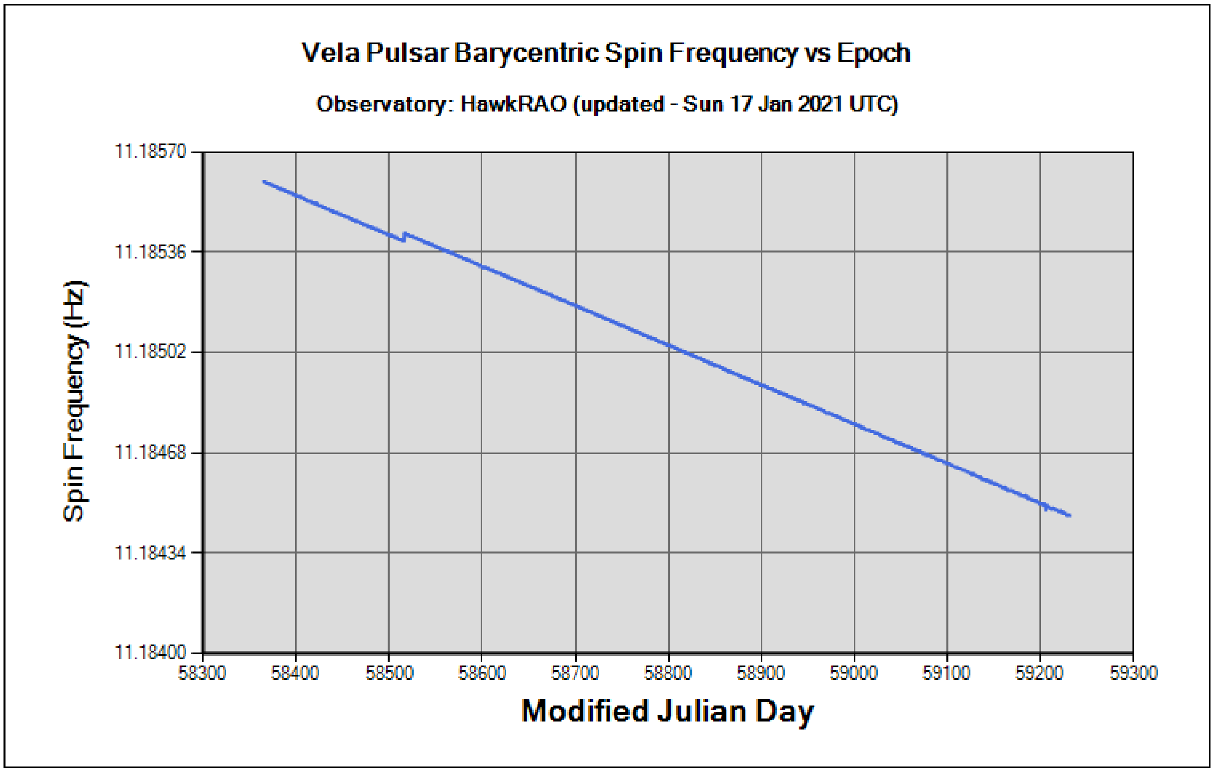


Figura 1: Mudanças na frequência de rotação do Pulsar da Vela em função do tempo. Fonte: Science Results. Hawkesbury Radio Astronomy Observatory - Vela Pulsar Observations. Disponível em: <http://hawkrao.joataman.net/pulsar/science/index.html>. Acesso em: 17/01/2021.

Com base nos seus conhecimentos sobre pulsares e da análise do gráfico acima, julgue as afirmações abaixo. **Justifique cada afirmativa e apresente os cálculos realizados**. Cada item vale $3,75$ pontos.

	Verdadeiro	Falso
1. O gráfico sugere que as estrelas mais rápidas são as mais novas.	☐	☐
2. A taxa de variação média de período do pulsar no tempo entre 58600 e 59200 é aproximadamente $0,20\ s/ano$, em módulo.	☐	☐
3. A taxa de variação de frequência de rotação do pulsar no tempo é aproximadamente $4,87 \cdot 10^{-4}$ Hz/ano, em módulo.	☐	☐
4. O aumento no período de rotação está diretamente ligado a perda de energia cinética via radiação síncrotron.	☐	☐
5. A causa da regularidade dos pulsos de energia de um pulsar é o movimento orbital dele.	☐	☐
6. As variações de período de um Pulsar costumam ser regulares. Mas, no gráfico é possível notar uma irregularidade, conhecida, também, pelo nome "glitch".	☐	☐
7. Após 59200, o pulsar ainda terá $1,15 \cdot 10^{4}$ anos de vida.	☐	☐

8. Considerando que o momento angular é conservado durante as contrações, na data 59200 o raio da estrela é capaz de variar $1,10\ cm$ caso haja uma mudança no período de $1,95 \times 10^{-6}\ s$ ☐ ☐

Dados: Massa do pulsar: $M = 1,90M_{\odot}$. Raio do pulsar: $R = 10\ km$. Momento de Inércia de uma esfera sólida: $I = \frac{2}{5}MR^2$. Duração de um ano: $365\ dias = 3 \cdot 10^7 s$.

Dica: A aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$ pode ser útil.

Observação$_1$: As respostas só serão aceitas com a justificativa e os cálculos necessários para chegar às conclusões.

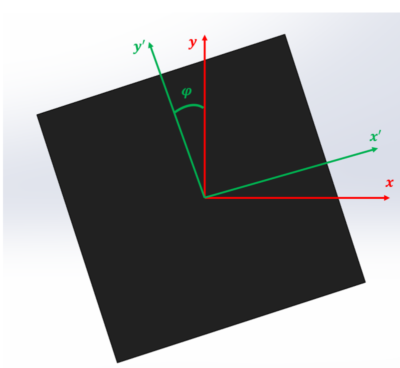
Observação$_2$: Para as afirmações numéricas, considere válido o intervalo da valores 10% acima ou abaixo do valor fornecido.

8. **(40 pontos)** Uma categoria relativamente recente no âmbito aeroespacial é a de *CubeSats*, satélites em formato de cubo, cujas dimensões são da ordem de alguns centímetros. Ao planejar a missão de um *CubeSat*, um dos fatores essenciais é determinar a energia solar que pode ser coletada ao longo de uma órbita, sendo dois parâmetros importantes: o período de tempo em que o satélite está exposto à radiação solar (chamado de período iluminado) e a orientação dos painéis fotovoltaicos em relação aos raios solares. Para fins de aproximação, considere que, ao entrar na região de umbra da Terra, o *CubeSat* não coleta potência solar. Despreze os efeitos da atmosfera terrestre em seus cálculos.

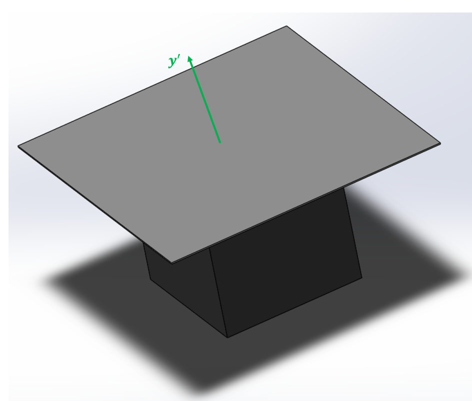
   a) **(8 pontos)** Para um projeto de sua universidade, Katarine lançou um *CubeSat* em uma órbita circular de baixa altitude, a apenas $h = 500\ km$ acima da superfície de nosso planeta. Sabendo que a órbita possui inclinação nula em relação ao plano da Eclíptica, determine o período iluminado desse satélite, em minutos.

   b) **(18 pontos)** Giovanna também lançará um *CubeSat*, com parâmetros orbitais semelhantes aos daquele projetado por Katarine, exceto pela inclinação orbital de $\varepsilon = 60°$ em relação ao plano da Eclíptica. Sabe-se também que a linha dos nodos dessa órbita é sempre perpendicular à direção Sol-Terra e que, ao passar pelo nodo ascendente, o satélite está se afastando do Sol. Assim, determine o período iluminado para tal configuração, em minutos.

Para os projetos de ambas as universitárias, o satélite manterá sua orientação constante em relação ao Sol, definida pelo ângulo φ, conforme as imagens abaixo. O eixo x indica a direção de incidência dos raios solares, a qual não varia ao longo do tempo.



(a) Orientação do satélite



(b) Painel fotovoltaico

   c) **(9 pontos)** Obtenha a expressão para a energia E coletada pelo painel solar ao longo de uma órbita em função do fluxo solar $F_{\odot}$, do ângulo φ, da área da placa fotovoltaica A e de sua eficiência η; e do período iluminado Δt.

d) **(5 pontos)** Calcule o valor de E, em kJ, para as situações dos itens b) e c). Considere $A = 0,1\ m^2$ e $\eta = 16\%$ para ambos os *CubeSats*, mas $\varphi_K = 45°$ para o de Katarine e $\varphi_G = 50°$ para o de Giovanna.

Questões Longas

9. **(70 pontos)** A galáxia M63 ou NGC 5055, chamada de galáxia do girassol, é do tipo espiral Sa. Vamos encontrar algumas medidas de parâmetros físicos desta galáxia vista pelo nosso querido povo do planeta Kafsh.

A astrônoma do planeta, Giulia, estudando o objeto luminoso, faz uma medida espectroscópica na largura máxima da galáxia, isto é, ao longo do eixo maior da imagem, e descobre o gráfico que está ao final da questão - já corrigido em decorrência de efeitos cosmológicos. Conforme observa-se pontos da galáxia a diferentes distâncias angulares ao centro, eixo y, o desvio da linha de H_α de comprimento de onda de laboratório $\lambda_0 = 6563$ Å é registrado no eixo horizontal.

Sabe-se também que a galáxia de formato aproximadamente circular possui magnitude absoluta bolométrica de $M_{\text{bol}} = -20,43$, que a extinção interestelar média por unidade de distância ao longo do caminho até a galáxia é $a_{bol} = 1,7 \cdot 10^{-4}$ mag/kpc e que a inclinação da galáxia com o plano do céu é $i = 71,8°$.

(a) **(8 pontos)** Dado que a magnitude bolométrica aparente observada é $m_{\text{bol}} = 10,82$, encontre a distância até M63 em Mpc. Desconsidere efeitos de extinção atmosférica.

(b) **(6 pontos)** Sabendo que a largura angular visível máxima do disco é $2\alpha = 460$ arcsec e que sua magnitude superficial média no infravermelho é $I' = 21,648$ mag $\cdot$ arcsec^{-2}, calcule a magnitude aparente observada da galáxia nessa banda.

(c) **(20 pontos)** A relação de Tully-Fisher afirma que a luminosidade de galáxias espirais é proporcional a sua velocidade máxima (a velocidade constante com a distância ao centro) elevada à quarta potência. Isto é, $L = CV_{max}^4$. Obtenha a relação de Tully-Fisher assumindo que a luminosidade é diretamente proporcional à massa da galáxia e a luminosidade por unidade de área no centro da galáxia é constante. Considere também que a luminosidade do núcleo é diretamente proporcional a luminosidade total da galáxia e o raio do núcleo é diretamente proporcional ao raio galáctico.

(d) **(15 pontos)** Considere os seguinte ajustes para o método de Tully-Fisher, em que M_I é a magnitude absoluta da galáxia na banda do infravermelho:

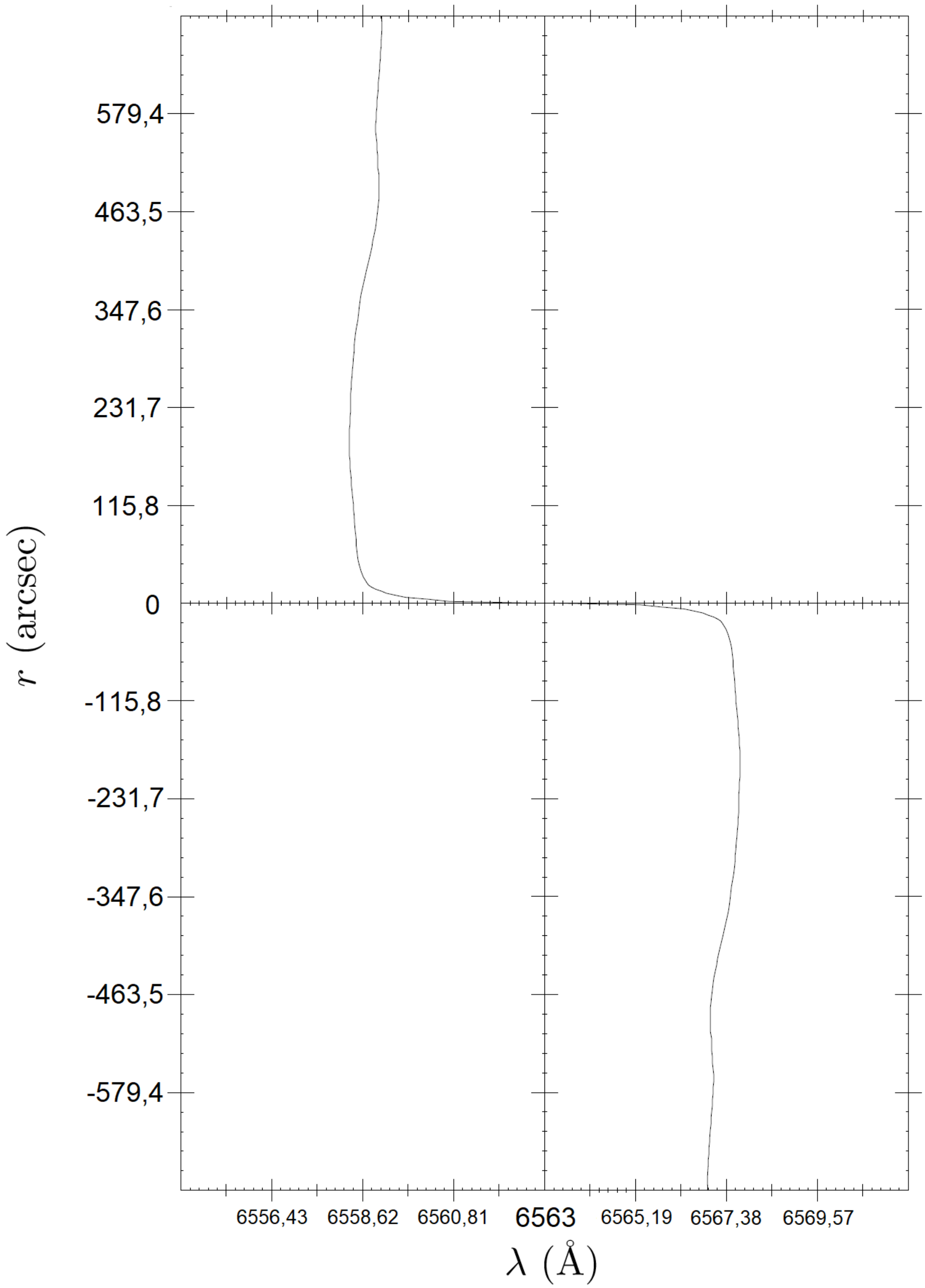
- Para galáxias espirais do tipo Sa: $M_I = -9,95 \log{(V_{max}(\text{km/s}))} + 3,04$
- Para galáxias espirais do tipo Sb: $M_I = -10,2 \log{(V_{max}(\text{km/s}))} + 2,71$
- Para galáxias espirais do tipo Sc: $M_I = -11,0 \log{(V_{max}(\text{km/s}))} + 3,31$

Encontre a distância, em Mpc, até a galáxia NGC 5055 utilizando esse método.

(e) **(11 pontos)** A partir do gráfico ao final da questão, calcule a massa da galáxia ($M_{G,T}$), em massas solares. Considere que o raio limite da galáxia é em $r = 872$ arcsec.

(f) **(6 pontos)** Considerando que toda a luminosidade da galáxia seja proveniente de estrelas de luminosidade $0,56L_\odot$ e massa $5,0M_\odot$, calcule a massa luminosa da galáxia.

(g) **(4 pontos)** Calcule a razão entre a massa $M_{G,T}$ e a massa luminosa. Explique o fato da razão ser diferente de 1.


579,4
463,5
347,6
231,7
115,8
0
-115,8
-231,7
-347,6
-463,5
-579,4
r (arcsec)
6556,43
6558,62
6560,81
6563
6565,19
6567,38
6569,57
λ (Å)

10. **(80 pontos)** O uso de velas solares tem grande relevância em modelos teóricos de propulsão. Em meados da década de 1990 foi proposto um método que permite que uma espaçonave equipada com velas solares atinja velocidades de cruzeiro capazes de escapar do sistema solar a velocidades muito maiores do que as atingidas por outros métodos de propulsão avançados, como propulsão nuclear. Nesse problema, analisaremos alguns modelos de propulsão com o objetivo final de escapar do sistema solar. Para isso, considere que em todas as situações de lançamento - a partir da Terra - é dia de solstício e que tais lançamentos ocorrem à meia noite.

    (a) **(5 pontos)** Qual a mínima velocidade, em km/s, de que uma espaçonave precisa (em relação à superfície do ponto de lançamento) para que se adquira uma órbita final heliocêntrica, lançada:

    i. do polo Norte?

    ii. da linha do Equador?

    Desconsidere qualquer força exercida pela atmosfera na espaçonave.

    (b) **(10 pontos)** Calcule a velocidade mínima necessária, em km/s, que um satélite deve ter (em relação à superfície do ponto de lançamento) para que escape do campo gravitacional solar, sendo lançado a partir da linha do Equador.

    (c) **(10 pontos)** Uma espaçonave é lançada da Terra a partir do Equador de modo que adquira uma órbita heliocêntrica aproximadamente circular de raio $R = 1\ UA$. A partir do momento em que passa por sua posição de periélio, o satélite gera um impulso responsável por aumentar sua velocidade em 10%, realizando isso a cada revolução. Após quantas dessas propulsões no periélio o satélite escapará do campo gravitacional solar e adquirirá uma órbita aberta?

    (d) **(10 pontos)** Calcule a razão q $(0 < q < 1)$ entre a eficiência dos dois métodos acima (do item b e do item c). Considere que a eficiência é definida como sendo o somatório dos impulsos Δv (variação de velocidade a cada propulsão) utilizados desde o lançamento da Terra até que se atinja o objetivo final - escapar do campo gravitacional solar.

    Agora, analisaremos um modelo de propulsão fazendo uso de uma vela solar. Considere que uma espaçonave foi lançada em uma órbita solar quase circular com um raio de $1\ UA$. Uma vela solar perfeitamente refletora foi implantada nela, de modo que ficasse constantemente voltada para o Sol, reduzindo a força central inicialmente exercida na espaçonave em 2%.

    (e) **(10 pontos)** Considerando o exposto acima e sabendo que a massa da superfície refletora corresponde a 5% da massa total do sistema que compõe a espaçonave, calcule a densidade superficial (em g/m^2) da vela.

    No curso de seu movimento, esta vela se fechou instantaneamente assim que o aparelho atingiu o afélio de sua órbita, sendo reaberta no periélio, repetindo esse ciclo a cada revolução.

    (f) **(30 pontos)** Quantas revoluções completas ao redor do Sol - a partir do momento em que a vela foi fechada pela primeira vez - essa espaçonave fará antes que sua excentricidade fique maior ou igual a 1 e essa saia do sistema solar em uma órbita aberta? A interação do aparelho com todos os corpos, exceto o Sol e seus fótons, deve ser desprezada. Não é necessário considerar o efeito de Poynting-Robertson - isto é, desconsidere o torque exercido pela força da radiação.

    (g) **(5 pontos)** Calcule a distância da espaçonave até o centro do Sol (em UA) no momento da última vez em que a vela é reaberta.