TREINAMENTO 2 - PROVA TEÓRICA
TREINO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA
XIV IOAA e XI OLAA de 2020

1 Instruções (leia atentamente)

- A duração da prova é de 3 horas;
- Há um tempo adicional de 10 minutos para escanear as suas resoluções, compilar o arquivo final e mandar ao e-mail solicitado;
- Garanta que as suas resoluções estejam **visíveis** ao escanear;
- A prova é individual e sem consulta;
- Para resolver a prova, você pode utilizar: uma calculadora científica não programável, a tabela de constantes, caneta, lápis, borracha, folhas de papel em branco e o caderno de questões;
- Uma mesma página deve conter a resolução de apenas uma única questão;
- Identifique corretamente cada página com o número da questão (X) e a sua identificação (Y): QX - NY;
- A prova contém três tipos de questões, totalizando **300 pontos**:
  - **5 questões curtas** valendo 12 pontos cada, totalizando **60 pontos**;
  - **3 questões médias** valendo 30 ou 35 pontos cada, totalizando **100 pontos**;
  - **2 questões longas** valendo 60 ou 80 pontos cada, totalizando **140 pontos**.

2 Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade (g)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	**Terra**
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h56min04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^{8}\ m$	**Lua**
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($M_{\odot}$)	$4,80\ mag$	**Sol**
Diâmetro Angular	$0,5\ graus$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\, s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	
Magnitude limite do olho humano nu	$+6$	**Distâncias**
$1\ UA$	$1,50 \cdot 10^{11}\ m$	**e tamanhos**
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	
Constante de Planck (h)	$6,62 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	**Constantes**
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	**Físicas**
Velocidade da luz no vácuo (c)	$299.792.458\ m/s$	
Massa do Próton	$938,27\ MeV \cdot c^{-2}$	

Fórmulas Importantes:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3 Questões Curtas

1. **(Massa de Aglomerados de Galáxias Observados em Raio-X - 12 pontos)** Na prova do ano passado, calculamos a massa do aglomerado de Coma usando o teorema do virial para galáxias do aglomerado. O teorema do virial relaciona a energia cinética à energia potencial gravitacional do aglomerado, assim o movimento das galáxias reflete a massa total do aglomerado. Como o astrofísico Fritz Zwicky percebeu, essa massa total é muito maior do que a massa medida através da luminosidade das galáxias que são membros do aglomerado, indicando que existe uma massa "invisível"ou faltante. Uma boa parte dessa massa faltante é, a agora famosa e exótica, matéria escura. Mas um outro bom bocado dessa massa faltante é feita de matéria bariônica, mas invisível à fotometria tradicional no óptico. Uma dessas componentes está em estrelas desgarradas que compõem a luz difusa ou luz intra-aglomerados, cujo brilho superficial é tão fraco – imagine um punhado de estrelas salpicado no volume de um aglomerado – que apenas mais recentemente começou a ser observada de forma corriqueira. A outra componente bariônica invisível é o gás quente dentro do aglomerado. Provavelmente produzido por explosões de supernovas nas galáxias e material ejetado pelo núcleos ativos de galáxias. Esse gás é tão quente que emite no raio-X. Da mesma forma que o movimento de galáxias "pesa"o aglomerado, o movimento dos elétrons no gás quente intra-aglomerado, sua energia cinética e brilho associado também pode "pesar"o aglomerado.

   Considerando que o aglomerado de galáxias de Coma é uma esfera de hidrogênio ionizado de raio 3 Mpc, temperatura $8,8 \cdot 10^7$ K, luminosidade de raio-X $L_X = 5 \cdot 10^{44}$ erg s^{-1} e dado que a densidade de luminosidade é dada por $L_{\text{vol}} = 1,42 \cdot 10^{-27} n_e^2 T^{1/2}$ erg s^{-1} cm^{-3}, onde n_e é a densidade numérica de elétrons livres e T é a temperatura do gás.

   (a) **(3 pontos)** Expresse a luminosidade de raio-X do gás em termos da densidade de luminosidade.

   (b) **(3 pontos)** Calcule a densidade de elétrons livre.

   (c) **(3 pontos)** Estime a massa do aglomerado em massas solares usando a massa do hidrogênio como referência ($m_H = 1,673534 \cdot 10^{-24}$ g; $M_{\text{Sol}} = 1,989 \cdot 10^{33}$ g; 1 pc $= 3,0857 \cdot 10^{18}$ cm).

   (d) **(3 pontos)** Compare a massa calculada acima com a massa estimada através da luminosidade das galáxias ($1,5 \cdot 10^{13}\ M_\odot$), ela é maior ou menor?

2. **(As Coordenadas - 12 pontos)** No dia 21 de março às 0:00 UTC Lais e Katarine decidiram fazer observações astronômicas na região do polo geográfico norte. Lais posicionou-se exatamente no polo e Katarine ficou em um local com latitude igual a $89^o N$ e longitude igual a 0^o. Uma estrela estava a uma altura de 89^o tanto para Katarine quanto para Lais nesse momento. Quais são as coordenadas equatoriais universais dessa estrela?

   Importante: Existem duas respostas possíveis para essa questão. O aluno deve apresentar as duas respostas para obter a pontuação completa.

3. **(Exoplaneta - 12 pontos)** Um exoplaneta foi descoberto orbitando uma estrela E, da sequência principal, que encontra-se a 310 anos-luz de distância da Terra. Estudos anteriores sobre essa estrela mostraram que sua temperatura efetiva era cerca de 7350K.

   O exoplaneta foi descoberto a partir do método de trânsito. Notou-se que o fluxo da estrela, que era de $3,76 \cdot 10^{-8}\ W/m^2$ quando o exoplaneta não estava na frente, diminuía um centésimo durante o trânsito.

   Encontre o raio do planeta em km.

4. **(Petstars - 12 pontos)** Carrit é um astrônomo com muita experiência em observação noturna. Ele conseguiu identificar um sistema formado por 3 estrelas, nomeando-as *Francis*, *Luke* e

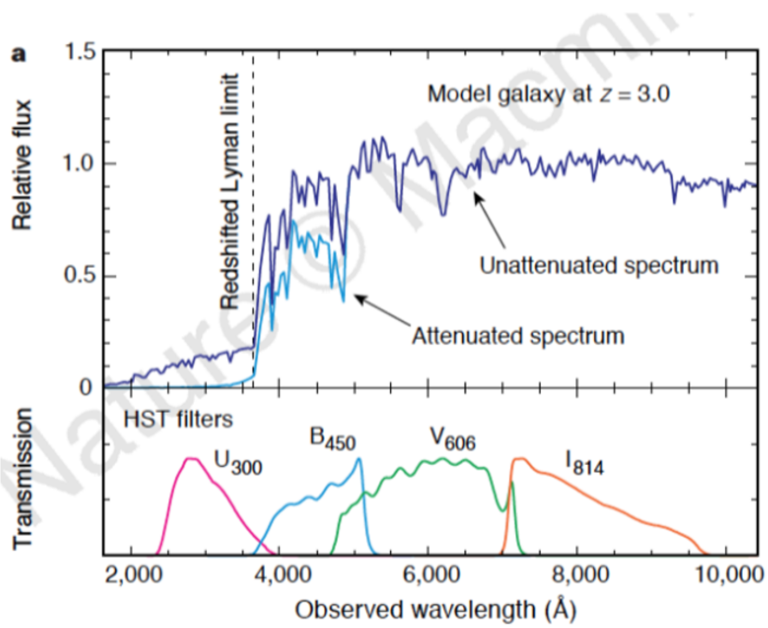
$Hulk$. Sabendo que o mínimo fluxo possível proveniente do sistema é $1,41.10^{-5} \frac{W}{m^2}$, que as estrelas $Luke$ e $Hulk$ são iguais, e que o raio de $Francis$ é o dobro do raio de $Luke$, qual é a temperatura de $Hulk$?

Dados:
$T_{Francis} = 20000\ K$
$R_{Luke} = 7,50.10^{10}\ m$
Distância do sistema = $100\ pc$

5. **(Satélite - 12 pontos)** Katarine, realizando um projeto de sua universidade, lança um satélite cuja órbita final é circular de raio $r_1 = 0,70\ UA$ ao redor do Sol, no mesmo plano da órbita terrestre e translação no mesmo sentido que o de nosso planeta. A sonda emite luzes de sinalização com comprimento de onda de laboratório $\lambda_0 = 550\ nm$. Assuma que a órbita da Terra também seja circular e determine o maior desvio $\Delta\lambda$ da luz emitida pelo satélite quando medido pela universitária.

4 Questões Médias

6. **(Procura pela Galáxia mais Distante - 30 pontos)** Em 2020, o Telescópio Espacial Hubble (HST) completou 30 anos em órbita. Uma de suas observações mais emblemáticas foi a imagem do Campo Profundo do Hubble (em inglês, Hubble Deep Field) que registrou cerca de 3 mil galáxias muito distantes por volta de redshift z $\sim$ 6. Redshift (z), ou desvio padrão para o vermelho, é a quantidade relacionada a velocidade de afastamento da galáxia por conta da expansão do universo, descoberta por Edwin Hubble, e cuja fórmula é dada por: $z = (\lambda_m - \lambda_r)/\lambda_r$; onde temos o comprimento de onda medido λ_m e em repouso λ_r. A atualização do HST com uma nova câmera que observa nos comprimentos de onda mais longos do infravermelho, possibilitou explorar o universo ainda mais distante, encontrando a galáxia mais distante até hoje, GN-z11, em z $\sim$ 11,09, através da medida de uma quebra no contínuo de seu espectro no comprimento de onda em 1,47 micrômetros.



a) **(7 pontos)** Qual é o comprimento de onda em Angstroms no repouso dessa quebra do contínuo?

b) **(10 pontos)** Sabendo que o HST tem filtros cujo centro está em 6000 e 8000 Angstroms, que redshifts seriam medidos se a quebra de contínuo estivesse em cada banda?

c) **(8 pontos)** A galáxia GN-z11 está a cerca de 32 bilhões de anos-luz de distância de nós, enquanto o universo tem menos de 14 bilhões de anos. Como isso é possível se nada viaja mais rápido que a luz?

d) **(5 pontos)** De uma maneira bem simples, considerando que o Campo Profundo do Hubble tem 3000 galáxias e uma área de 1/24000000 da área total do céu, quantas galáxias seriam visíveis no céu todo na profundidade do Campo Profundo?

7. **(Brilho Superficial - 35 pontos)** A distribuição de diminuição de brilho superficial de uma galáxia espiral é dada por $I(r) = I_0 e^{-r/a}$, em que $I(r)$ é o brilho superficial (luminosidade por unidade de área a certa distância r do centro da galáxia) e a é uma constante de escala. A partir da relação anterior, pode-se encontrar por integração a luminosidade total do disco galáctico, $2\pi I_0 a^2$.

   Certa galáxia com brilho superficial satisfazendo a relação anterior tem constante de escala $a = 6,0$ kpc e luminosidade na banda B de $L_B = 2,5 \cdot 10^{10}\ L_\odot$.

   (a) **(5 pontos)** Deduza uma expressão para r em termos de a, $I(r)$ (em unidades de $L_\odot/\mathrm{pc}^2$) e L.

   (b) **(20 pontos)** Formule uma expressão para conversão do brilho superficial em unidades de mag/arcsec^2 para $L_\odot/\mathrm{pc}^2$ e mostre que tal grandeza é independente da distância até o observador. A expressão deve depender apenas da magnitude absoluta $M_{B\odot}$ do Sol na banda B.

   (c) **(10 pontos)** O Raio de Holmberg R_H é definido como a distância no disco galáctico desde o centro em que o brilho superficial é $26,5$ mag/arcsec^2, para a banda B. Encontre R_H para a galáxia em questão. Use, se necessário, que $M_{B\odot} = 5,44\ mag$.

8. **(Guerras Cósmicas - 35 pontos)** Shell e Nathan são imperadores supremos de planetas em dois sistemas estelares inimigos. A distância entre os planetas equivale a 15,0 anos-luz. Um dia, após séculos de guerras, Shell decidiu lançar um ataque para destruir Nathan de uma vez por todas. Para isso, Shell decidiu voar em sua nave mais poderosa, que pode atingir uma velocidade de 0,750c e acelerar quase instantaneamente, para utilizar sua arma mais poderosa no planeta de Nathan.

   (a) **(10 pontos)** Shell começa a preparar sua arma assim que a nave sai de seu planeta. Considerando que Shell precisa estar com a arma pronta assim que ele chegar no planeta de Nathan, quanto tempo ele pode demorar para preparar a arma?

   A arma de Shell atira um composto radioativo extremamente tóxico. O tempo de meia-vida desse composto é igual a $12,25$ milissegundos e a razão entre a quantidade na amostra em função do tempo e a quantidade inicial é descrita por uma função exponencial na base e (número de Euler) cujo expoente é negativo e diretamente proporcional ao tempo. A arma de Shell é capaz de atirar esse composto a uma taxa de 158 mol/s e a uma velocidade de 0,300c.

   Importante: O tempo de meia vida corresponde ao intervalo de tempo necessário para que a amostra seja reduzida pela metade.

   Shell estaciona sua nave imediatamente acima da atmosfera do planeta de Nathan, que possui uma espessura de 706 km, e mira no palácio de Nathan, localizado no nível do mar.

(b) **(10 pontos)** As defesas do palácio de Nathan conseguem resistir a um ataque de no máximo 112 mol/s. Dessa forma, Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell?

(c) **(15 pontos)** Caso Shell não tivesse estacionado a nave e atirasse em movimento logo acima da atmosfera do planeta, Nathan teria sobrevivido ao ataque? Nesse caso, 0,300c seria a velocidade relativa entre o tiro e a nave movendo-se a 0,750c.

5 Questões Longas

9. **(Densidade é Tudo - 60 pontos)**

A Primeira Equação de Friedmann é a essência de toda a cosmologia. Contudo, outra equação vital para o desenvolvimento dessa ciência é a Equação de Fluidos. Com ela, é possível relacionar o fator de escala $a(t)$ com as densidades de energia $\epsilon(t)$ das componentes de certo Universo. Um fato importante para sua dedução completa é que podemos escrever a pressão de certa componente como função de sua densidade de energia: $P = \omega \cdot \epsilon$, onde ω é um fator adimensional.

(a) **(12 pontos)** A dedução dessa equação parte da premissa da expansão do Universo ser um fenômeno conservativo. Considerando que o Universo é uma esfera de raio próprio dado por $R(t) = a(t) \cdot r$ e que o fenômeno de expansão/contração dele se dá de maneira adiabática, prove que podemos escrever, para uma certa componente, que:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega)\epsilon = 0$$

Onde os pontos acima de cada variável significam a sua primeira derivada em relação ao tempo. Utilize a Primeira Lei da Termodinâmica.

(b) **(8 pontos)** A partir da equação acima, mostre que a densidade de energia de cada componente é dada por:

$$\epsilon_\omega(a) = \epsilon_{\omega,0} \cdot a^{-3(1+w)}$$

Onde $\epsilon_{\omega,0}$ é a densidade de energia atualmente (para $a = 1$). Se necessário, utilize que: $\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = n\frac{\dot{a}}{a}$ para $\epsilon \propto a^n$

(c) **(8 pontos)** Encontre o valor de ω_{rad} para radiação e o valor de ω_{mat} para matéria não relativística. Para um fóton, lembre-se que $E = \frac{hc}{\lambda}$ e para matéria não relativística, $v \ll c$.

(d) **(6 pontos)** Uma forma muito comum de representar a constante cosmológica na Primeira Equação de Friedmann é interpretá-la como uma densidade de energia $\epsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$. Com base nisso, encontre o valor de ω_Λ para a densidade de energia advinda da constante cosmológica.

(e) **(12 pontos)** Encontre os intervalos de fator de escala a da dominância para cada uma das componentes do nosso universo: matéria, radiação e energia escura (energia associada à constante cosmológica). A dominância de uma componente ocorre quando sua densidade de energia é maior do que todas as outras. Considere os seguintes parâmetros cosmológicos para o nosso universo:

Matéria: $\Omega_{m,0} = 0,30$

Radiação: $\Omega_{r,0} = 8,4 \cdot 10^{-5}$

Energia escura: $\Omega_{\Lambda,0} = 0,70$

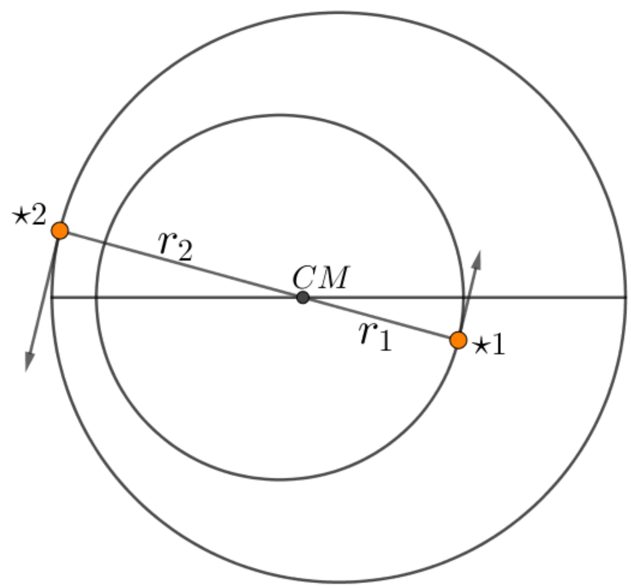
Lembre-se que os possíveis valores para o fator de escala são: $a \in [0, +\infty[$

(f) **(14 pontos)** A Primeira Equação de Friedmann é dada por:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

Para esse item, considere que nosso universo é plano ($k = 0$). Uma aproximação usada para facilitar a interpretação do comportamento de $a(t)$ é considerar que apenas a componente dominante é responsável pela densidade de energia do universo (dado por ϵ na equação acima) em cada intervalo de fator de escala calculado no item (e). Sua tarefa nesse item é calcular $a(t)$ para cada um dos seguintes intervalos: *Universo dominado pela radiação* e *Universo dominado pela matéria*. Dê suas respostas em função de $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$, H_0 (constante de Hubble atualmente) e t. Deixe sua resposta em formato analítico (e não numérico).

10. **(Sistema α *Vir* - 80 pontos)** Um dos sistemas binários mais famosos é o da estrela Spica, αVir, localizado na constelação de Virgem. As estrelas que o compõem possuem massas da mesma ordem de grandeza e descrevem órbitas elípticas em torno do centro de massa.



Na imagem acima, vemos as órbitas individuais de cada uma das estrelas para um referencial em repouso em relação ao baricentro do conjunto.

Nathan e Shell, diante dessas informações, decidiram medir alguns parâmetros do sistema em questão e determinar a massa de cada componente. Nathan mede a paralaxe do baricentro $\Pi = 11,90$ *mas*, o período orbital $P = 4,01$ *dias* e a inclinação do plano da órbita $i = 66,0°$. Shell, enquanto isso, consegue obter a separação angular máxima $S = 1,68\ mas$ entre as componentes e a mínima $s = 1,31\ mas$. Além disso, traça a curva de velocidades radiais e determina a velocidade do centro de massa $v_{rCM} = -1,70\ km/s$ e a velocidade radial da estrela de menor massa em seu apoastro $v_{r2min} = +165,48\ km/s$. Ambos também concluem que os eixos maiores das órbitas do sistema são ortogonais à linha de visada.

Observação: a unidade *mas* é equivalente, em português, a milissegundos de arco.

(a) **(5 pontos)** Determine a distância do sistema até a Terra em *pc*.

(b) **(5 pontos)** Encontre a energia mecânica total do sistema em termos de m_1, m_2, r_1, r_2, v_1, v_2 (velocidades orbitais de cada estrela) e a constante da gravitação universal G.

Ao lidar com sistemas binários, é conveniente a análise da órbita relativa, isto é, a órbita que uma estrela descreve em relação à outra, que, em geral, é a da estrela de menor massa no referencial da mais massiva.

(c) **(20 pontos)** Reescreva a equação do item anterior a partir dos parâmetros $r = r_1 + r_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (massa reduzida), v (velocidade não nula de uma das estrelas na órbita relativa) e $M = m_1 + m_2$. Sugestão: aplique uma abordagem vetorial para as velocidades, separe-nas em suas componentes horizontais e verticais para um caso genérico.

(d) **(10 pontos)** Calcule o semi-eixo maior da órbita relativa do sistema, em UA, e a soma das massas das componentes em $M_\odot$.

(e) **(5 pontos)** Expresse o semi-eixo maior a da órbita relativa em função dos semi-eixos maiores das órbitas individuais a_1 e a_2 e determine a excentricidade da órbita relativa.

(f) **(20 pontos)** Mostre algebricamente que as excentricidades e_1 e e_2 das órbitas individuais são iguais e, em seguida, da mesma maneira, mostre que a excentricidade da órbita relativa é igual a das individuais.

(g) **(15 pontos)** Encontre as massas m_1 e m_2 das componentes em $M_\odot$.