TREINAMENTO 1 - PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA e XI OLAA de 2019

NOME:

PROVA TEÓRICA – GABARITO

Instruções

- Coloque seu nome em TODAS as folhas de resposta
- A duração da prova é de 4 horas;
- A prova é individual e sem consultas;
- Suas respostas deverão estar nas folhas de respostas correspondentes a cada questão. Use o verso da folha se necessário;
- Os cálculos podem ser a lápis, mas a resposta deve ser a caneta;
- A prova contém três tipos de questões:
    - 8 questões curtas valendo 1 ponto cada
    - 4 questões médias valendo 2 pontos cada
    - 2 questões longas valendo 6 pontos cada
- Questões sem os respectivos cálculos não serão consideradas.

Questão 1	T_{cometa}	$64\ anos$
	Ω	$\cong 3{,}12\ \frac{(U.A.)^2}{ano}$

Questão 1 - espaço para o cálculo

Resposta:

a) De acordo com a terceira Lei de Kepler: $T^2 = ka^3$, onde T é o período orbital, a é o semi-eixo maior da elipse e k, uma constante.

$$a_{cometa} = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{31{,}5 + 0{,}5}{2} = 16\ U.A.$$

$$\frac{T^2_{cometa}}{T^2_{Terra}} = \frac{a^3_{cometa}}{a^3_{Terra}} \rightarrow T_{cometa} = T_{Terra}\sqrt{\frac{a^3_{cometa}}{a^3_{Terra}}}$$

Substituindo os valores, temos:

$$T_{cometa} = 1\ ano\sqrt{\left(\frac{16\ U.A.}{1\ U.A.}\right)^3} = \sqrt{16^3}\ anos \rightarrow T_{cometa} = 64\ anos$$

b) De acordo com a segunda Lei de Kepler: $\vec{\Omega} = constante$

$$\Omega = \frac{área\ da\ elipse}{período} = \frac{\pi ab}{T_{cometa}}$$

Podemos calcular o semi-eixo menor da elipse através da fórmula:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - (a - r_{min})^2} \cong 3{,}97\ U.A.$$

Substituindo os valores, temos:

$$\Omega = \frac{\pi \times 16 \times 3{,}97}{64} \rightarrow \Omega \cong 3{,}12\ \frac{(U.A.)^2}{ano}$$

Questão 2	É possível?	não é possível

Questão 2 - espaço para o cálculo

Resposta:

Vamos calcular, primeiro, a velocidade orbital a uma distância muito próxima à superfície do asteroide e, depois, compará-la à velocidade do astronauta.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

A massa M do asteroide vale:

$$M = \rho V = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = 2{,}0 \times 10^3 \frac{kg}{m^3} \times \frac{4\pi (1{,}0 \times 10^3\ m)^3}{3} \rightarrow M \cong 8{,}38 \times 10^{12}\ kg$$

Substituindo:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 8{,}38 \times 10^{12}}{1{,}0 \times 10^3}} \rightarrow v \cong 0{,}748\ \frac{m}{s}$$

A velocidade do astronauta é:

$$v_a = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 1{,}0 \times 10^3\ m}{2{,}0 \times 3600\ s} \rightarrow v_a \cong 0{,}873\ \frac{m}{s}$$

Como $v_a > v$, então, não é possível. O astronauta com esta velocidade escapará do asteroide

Questão 3	ângulo	$(4{,}88 \times 10^{-3})\, {}'/_{pixel} \cong 0{,}29\ {}''/_{pixel}$
	diâmetro	$3{,}45\ pixels$

Questão 3 - espaço para o cálculo

Resposta:

a) Como 2048 pixels correspondem a 10 minutos de arco no céu, temos:

$$\theta = \frac{10'}{2048\, pixel} \cong (4{,}88 \times 10^{-3})\, {}'/_{pixel} \cong 0{,}29\ {}''/_{pixel}$$

b) Se cada pixel corresponde à 0,29 segundos de arco no céu, 1 segundo de arco corresponderão a:

$$\emptyset = \frac{1\, pixel\ \times 1''}{0{,}29\ {}''/_{pixel}} \cong 3{,}45\, pixels$$

Será aceito como correto um número inteiro de pixels.

Questão 4	energia total	$\cong 2,38 \times 10^{44}\ J$

Questão 4 - espaço para o desenho e o cálculo

Resposta:

O ângulo sólido que corresponde 0,5 m^2 a 1000 Mpc de distância corresponde a:

$$\Omega = \frac{\acute{a}rea}{r^2} = \frac{0,5\ m^2}{(10^9 \times 3,26 \times 9,46 \times 10^{15}\ m)^2} \cong 5,27 \times 10^{-52}\ sr$$

Se em $5,27 \times 10^{-52}\ sr$ foram detectados 10^{-8} J, então a energia total contida no ângulo sólido de 4π sr será:

$$E_{total} = \frac{4\pi \times 10^{-8}\ J}{5,27 \times 10^{-52}} \cong 2,38 \times 10^{44}\ J$$

Questão 5	TS	$5^h 13^m 30^s$
	AR	$08^h 15^m 04^s$

Questão 5 - espaço para o cálculo

Resposta:

a) TS = AR + H

H (passagem meridiana) = 0

TS= $5^h 13^m 30^s + 0$

TS= $5^h 13^m 30^s$

b) TS = AR + H

$08^h 15^m 04^s$ = AR +H

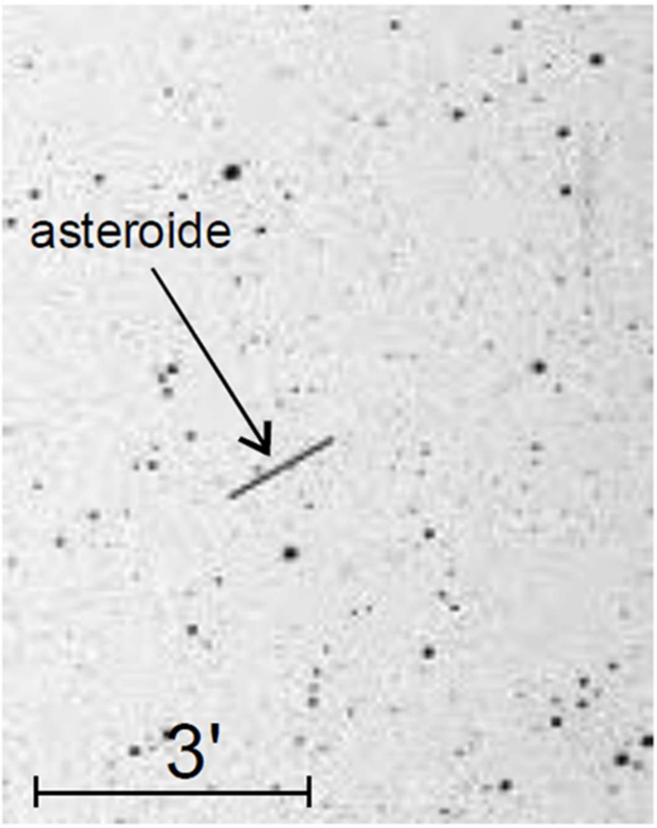
H (passagem meridiana) = 0

$08^h 15^m 04^s$ = AR + 0

AR = $08^h 15^m 04^s$

Questão 6	tempo de exposição	$9{,}84 \times 10^3\ s \approx 164\ min \approx 2{,}73\ h$

Questão 6 - espaço para o cálculo

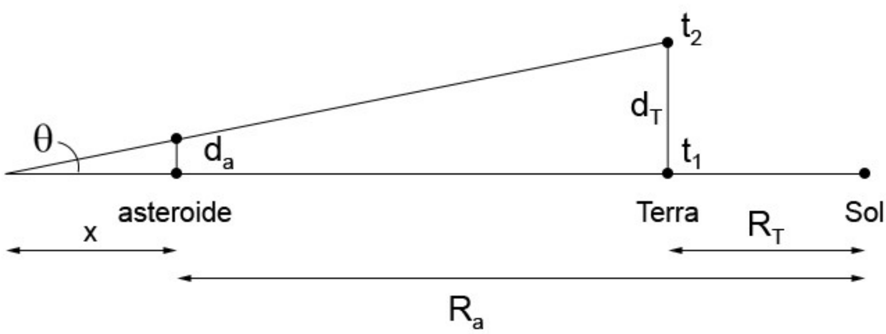


Resposta:

Nada foi dito sobre as posições relativas entre a Terra e o asteroide. Neste caso, vamos supor a geometria mais simples e considerar que no começo do registro de sua passagem o asteroide estava em oposição ao Sol.

Além disso, temos que considerar que ele foi observado da Terra, que também está em movimento.

O desenho a seguir traz a geometria do problema.



Durante o tempo de exposição da placa fotográfica (de t_1 a t_2), a Terra percorreu a distância d_T, enquanto o asteroide percorreu a distância d_a. Os arcos das circunferências das órbitas são pequenos e podem sem aproximados por retas.

O ângulo θ é o ângulo de deslocamento do asteroide, visto da Terra, que foi registrado na placa fotográfica.

Primeiro vamos calcular o tamanho angular do traço:

A escala de placa da imagem tem ~ 3,6 cm de comprimento, que corresponde a 3 minutos de arco.

O traço do asteroide tem ~ 1,5 cm.

Então, por regra de três simples, o traço tem:

$$\theta = \frac{1{,}5\ cm \times 3'}{3{,}6\ cm} = 1{,}25'$$

Da geometria do problema, temos:

$$\frac{x}{d_a} = \frac{x + R_a - R_T}{d_T} \leftrightarrow xd_T - xd_a = (R_a - R_T)d_a \leftrightarrow x = \frac{(R_a - R_T)}{(d_T - d_a)}d_a$$

Então:

$$\tan\theta = \frac{d_a}{x} = \frac{(d_T - d_a)}{(R_a - R_T)}$$

A velocidade orbital V_T da Terra vale:

$$V_T = \frac{2\pi R_T}{P_T} = \frac{2\pi(149{,}6 \times 10^9\ m)}{3{,}16 \times 10^7\ s} \cong 2{,}975 \times 10^4\ m/s$$

Para calcular a velocidade orbital V_a do asteroide precisamos, primeiro, calcular seu período orbital:

Obtemos o período orbital do asteroide pela Lei de Kepler:

$$P_a = \sqrt{(3{,}5)^3} \cong 6{,}5479\ anos \approx 2{,}065 \times 10^8\ s$$

Sua velocidade orbital será:

$$V_a = \frac{2\pi R_a}{P_a} = \frac{2\pi(3{,}5 \times 149{,}6 \times 10^9\ m)}{2{,}065 \times 10^8\ s} \cong 1{,}593 \times 10^4\ m/s$$

Substituindo na equação e isolando o tempo ***t*** de exposição:

$$\tan\theta = \frac{(d_T - d_a)}{(R_a - R_T)} = \frac{V_T t - V_a t}{R_a - R_T} \leftrightarrow t = \frac{R_a - R_T}{V_T - V_a}\tan\theta$$

Substituindo-se os valores:

$$t = \frac{2{,}5 \times 149{,}6 \times 10^9\ m}{(2{,}975 - 1{,}593) \times 10^4\ m/s}\tan(1{,}25') \cong 9{,}84 \times 10^3\ s \approx 164\ min \approx 2{,}73\ h$$

Questão 7	Δ AR	$5^h\ 12^m$ ou 78^o

Questão 7 - espaço para o cálculo

Resposta:

No dia 20 de março, chamado de Equinócio de março, o Sol cruza o equador celeste de sul para norte, marcando então o fim do verão no hemisfério sul da Terra e o fim do inverno no hemisfério norte. Pela definição de ascensão reta, neste dia seu valor para o Sol é $\alpha_{Sol} = 0^h$.

Para a estrela, a ascensão reta é $\alpha_* = 12^h$ (passagem meridiana inferior, ou culminação inferior)

Em sua jornada anual ao longo da eclíptica, o Sol percorre 24h de ascensão reta, a uma taxa média de 2h por mês, ou seja, 4 minutos por dia.

Entre 20 de março e 1º de julho temos 102 dias. Então neste intervalo o Sol se deslocou:

$$\alpha_{Sol} = 102\ dias\ \times \frac{4\ min}{dia} = 408\ min \equiv 6^h 48^m$$

Portanto, a diferença de ascensão reta entre o Sol e a estrela será:

$$\Delta\alpha = 12^h - 6^h 52^m = 5^h\ 12^m$$

Em termos angulares, teremos:

$$\Delta\alpha = 5{,}2^h \times \frac{180^o}{12^h} = 78^o$$

Questão 8	z (recombinação)	$\cong 1098$

Questão 8 - espaço para o cálculo

Reposta:

Lei de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{constante}{T}$$

Na época da recombinação:

$$\lambda_{\max\_rec} = \frac{constante}{3000\ K}$$

Hoje:

$$\lambda_{\max\_hoje} = \frac{constante}{2{,}73\ K}$$

O *redshift*:

$$1 + z = \frac{\lambda_{observado}}{\lambda_{emitido}}$$

Como:

$$\lambda_{observado} \equiv \lambda_{\max\_hoje} \quad \text{e} \quad \lambda_{emitido} \equiv \lambda_{\max\_rec}$$

Substituindo no *redshift*, temos:

$$z_{rec} = \frac{\lambda_{\max\_hoje}}{\lambda_{\max\_rec}} - 1 = \frac{3000\ K}{2{,}73\ K} - 1 \rightarrow z_{rec} \cong 1098$$

Questão 9	a)	Responda no próprio desenho abaixo
	b)	Responda no próprio desenho abaixo
	c)	Dia 59
	d)	Dia 88
	e)	Dia 176

a) Para os anos 2 e 3, basta somar 88 dias às posições correspondentes (0,01 ponto cada dia). Será desconsiderado a diferença de 1 dia;

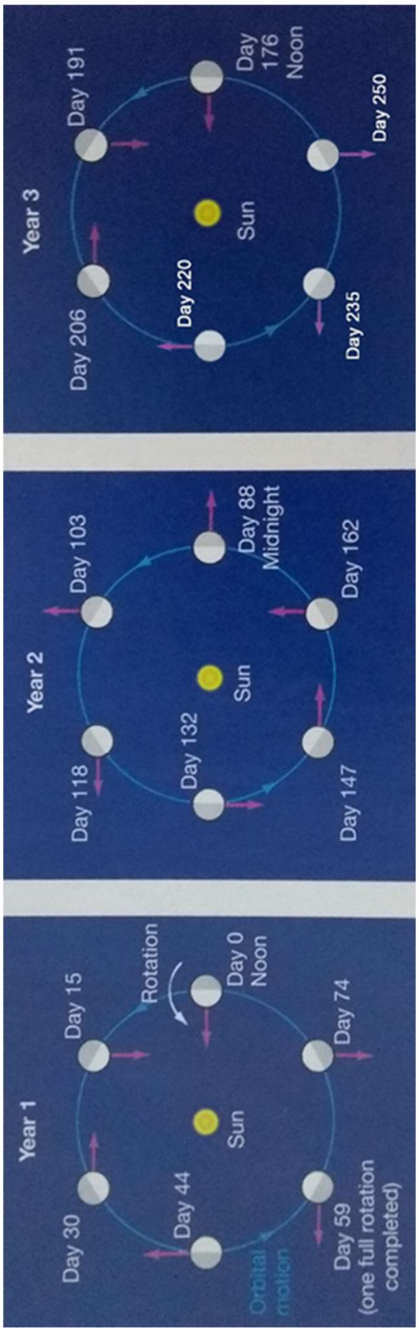
b) A cada 4 posições corresponderá a 1 dia sideral para o observador (0,01 ponto cada seta);

c) Dia 59 (a seta do observador aponta para a mesma direção e sentido da do Dia 0); 0,22 ponto

d) Dia 88 (será meia-noite depois de 1 ano de Mercúrio); 0,22 ponto

e) Dia 176 (será meio dia novamente depois de 2 anos de Mercúrio) 0,22 ponto

Questão 9



Questão 10	a) (expressão)		Escreva a expressão no espaço abaixo
	b)	R (10^3 anos)	$10^0\ pc$
		V (10^3 anos)	$10^3\ \frac{km}{s}$
		R (10^6 anos	$10^2\ pc$
		V (10^6 anos)	$10^1\ \frac{km}{s}$
	c) (comentário)		Escreva seu comentário no espaço abaixo

Questão 10 - espaço para o cálculo

a)

$$v = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{2E}{\rho}\right)^{1/5} t^{2/5}\right] = \left(\frac{2E}{\rho}\right)^{1/5} \times \frac{2}{5} \times t^{\left(\frac{2}{5}-1\right)} \rightarrow v = \frac{2}{5}\left(\frac{2E}{\rho}\right)^{1/5} t^{-3/5}$$

Fazendo $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$

Podemos reescrever v, como:

$$v = \frac{2}{5}\left(\frac{2 \times 4\pi R^3 E}{3M}\right)^{1/5} t^{-3/5} \rightarrow v = \frac{2}{5}\left(\frac{8\pi}{3}\frac{R^3 E}{M}\right)^{1/5} t^{-3/5}$$

Ou também: $R = \frac{5}{2}vt$

b)

$$\rho = 10^{-24}\frac{g}{cm^3} = 1000 \times 10^{-2}\ \frac{kg}{m^3} = 10^{-2}\ \frac{kg}{m^3}$$

$$t_1 = 10^3\ anos = 10^3 \times 365 \times 24 \times 3600\ s = 3{,}1536 \times 10^{10}\ s$$

$$t_2 = 10^6\ anos = 10^6 \times 365 \times 24 \times 3600\ s = 3{,}1536 \times 10^{13}\ s$$

Substituindo os valores:

$$R_1 = \left(\frac{2 \times 10^{42}}{10^{-21}}\right)^{1/5} (3{,}1536 \times 10^{10})^{2/5} \rightarrow R_1 \cong 7{,}24 \times 10^{16}\ m \equiv 2{,}36\ pc \rightarrow R_1 \approx 10^0\ pc$$

$$v_1 = \frac{2}{5}\left(\frac{2 \times 10^{42}}{10^{-21}}\right)^{1/5} (3{,}1536 \times 10^{10})^{-3/5} \rightarrow v_1 \cong 9{,}18 \times 10^5\ \frac{m}{s} \rightarrow v_1 \approx 10^3\frac{km}{s}$$

$$R_2 = \left(\frac{2 \times 10^{42}}{10^{-21}}\right)^{1/5} (3{,}1536 \times 10^{13})^{2/5} \rightarrow R_2 \cong 1{,}15 \times 10^{18}\ m \equiv 37{,}21\ pc \rightarrow R_2 \approx 10^2\ pc$$

$$v_2 = \frac{2}{5}\left(\frac{2 \times 10^{42}}{10^{-21}}\right)^{1/5} (3{,}1536 \times 10^{13})^{-3/5} \rightarrow v_2 \cong 1{,}45 \times 10^4\ \frac{m}{s} \rightarrow v_2 \approx 10^1\frac{km}{s}$$

c) A expansão do remanescente de uma supernova tem aceleração negativa, ou seja, ele continua a se expandir, mas sua velocidade de expansão diminui com o tempo.

Questão 11	a) distância	$\cong 5{,}1\ pc$
	b) M_{Altair}	$M \cong +2{,}3$
	c) razão	$\cong 10{,}28 \approx 10$
	d) nome da região	Sequência Principal
	e) (razão)	$\cong 9{,}86 \times 10^{-3} \approx 0{,}01$

Questão 11 - espaço para o cálculo

Resposta:

a)

$$D(pc) = \frac{1}{p\ ('')} \rightarrow d = \frac{1}{0{,}196''} \cong 5{,}1\ pc$$

b)

$$M = m - 5\log D + 5$$

$$M = 0{,}8 - 5\log(5{,}1) + 5 \rightarrow M \cong +2{,}3$$

c)

$$M - M_{\odot} = -2{,}5\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \leftrightarrow \frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0{,}4(M-M_{\odot})}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0{,}4(2{,}3-4{,}83)} \rightarrow \frac{L}{L_{\odot}} \cong 10{,}28 \approx 10$$

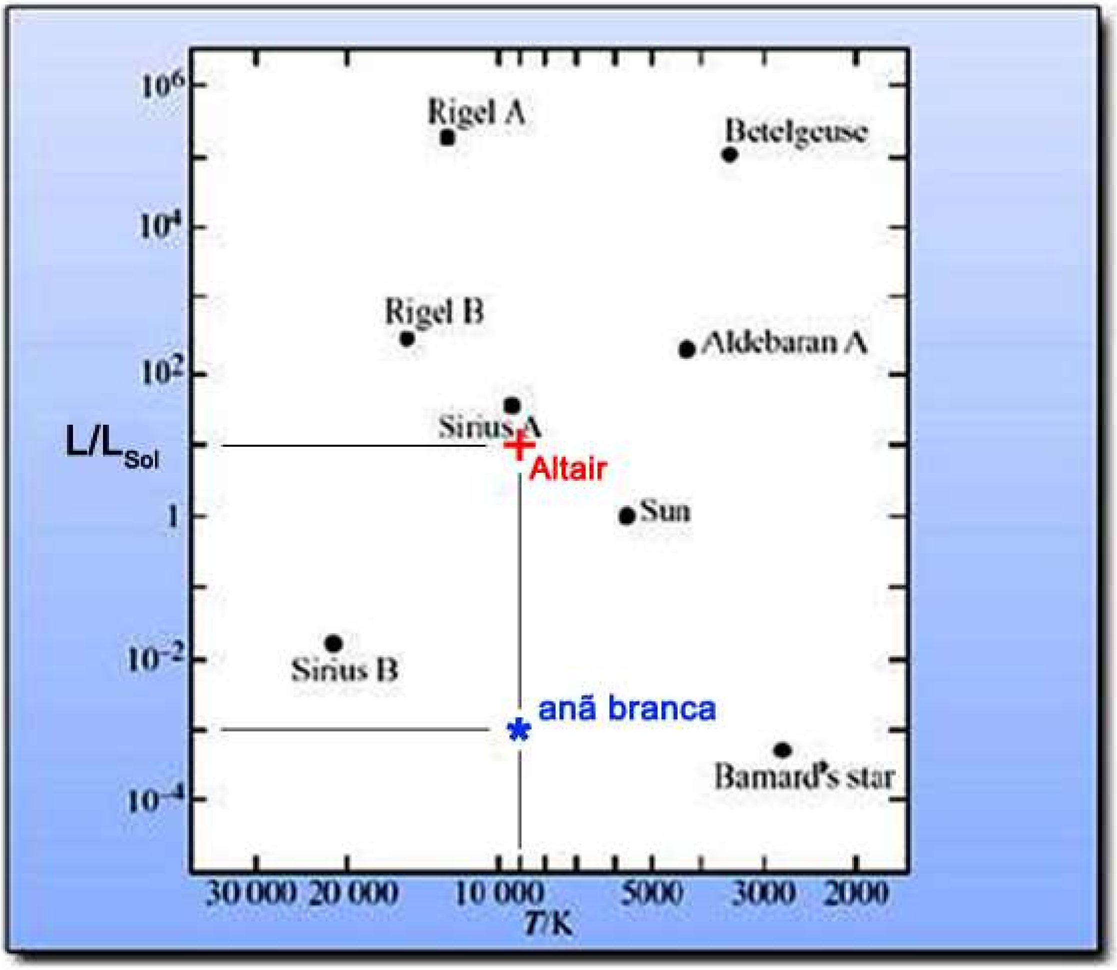
d) e e)

A estrela se encontra na região das Anãs Brancas. Ao possuir a mesma temperatura superficial, emite a mesma quantidade de energia por unidade de superfície (Lei de Stefan para a radiação de um corpo negro). Isso implica que ao ser menos luminosa, deve ter uma superfície menor e, portanto, seu raio deve ser menor. Para calcular quantas vezes menor é o raio da estrela em relação ao raio de Altair, temos:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$\frac{L_*}{L_{Altair}} = \left(\frac{R_*}{R_{Altair}}\right)^2 \leftrightarrow \frac{R_*}{R_{Altair}} = \sqrt[2]{\frac{L_*}{L_{Altair}}} = \sqrt[2]{\frac{10^{-3}}{10{,}28}} \cong 9{,}86 \times 10^{-3} \approx 0{,}01$$

Questão 11 (d) e (e)



Questão 12	número de fótons	$10^4 \dfrac{fótons}{s}$

Questão 12 - espaço para o cálculo

Considerando a magnitude aparente do Sol m_{Sol} = -26,7, temos:

$$m_1 - m_{Sol} = -2{,}5 \log\frac{f_1}{f_{Sol}} \rightarrow \log\frac{f_1}{f_{Sol}} = \frac{m_{Sol} - m_1}{2{,}5} = \frac{-26{,}7 - 6{,}0}{2{,}5} = \frac{-32{,}7}{2{,}5}$$

$$\log\frac{f_{Sol}}{f_1} = \frac{32{,}7}{2{,}5} = 13{,}08$$

$$\frac{f_{Sol}}{f_1} = 10^{13{,}08} \rightarrow f_1 = \frac{f_{Sol}}{10^{13{,}08}}$$

O fluxo solar à distância da Terra vale $\frac{L_{Sol}}{4\pi d^2} = \frac{3{,}83\times 10^{26} W}{4\pi(149{,}6\times 10^9\ m)^2} \cong 1{,}36 \times 10^3\ Wm^{-2}$

Substituindo:

$$f_1 = \frac{1{,}36 \times 10^3}{10^{13{,}08}} \rightarrow f_1 = 1{,}13 \times 10^{-10}\ Wm^{-2}$$

O número N de fótons que chegam à pupila do observador a cada segundo será:

$$N = \frac{(fluxo\ da\ estrela) \times (área\ da\ pupila)}{(energia\ do\ fóton)}$$

A energia de um fóton de λ = 550 nm vale:

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow E_f = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ Js\ \times\ 3{,}00 \times 10^8\ ms^{-1}}{550 \times 10^{-9}\ m} \rightarrow E_f \cong 3{,}62 \times 10^{-19}\ J$$

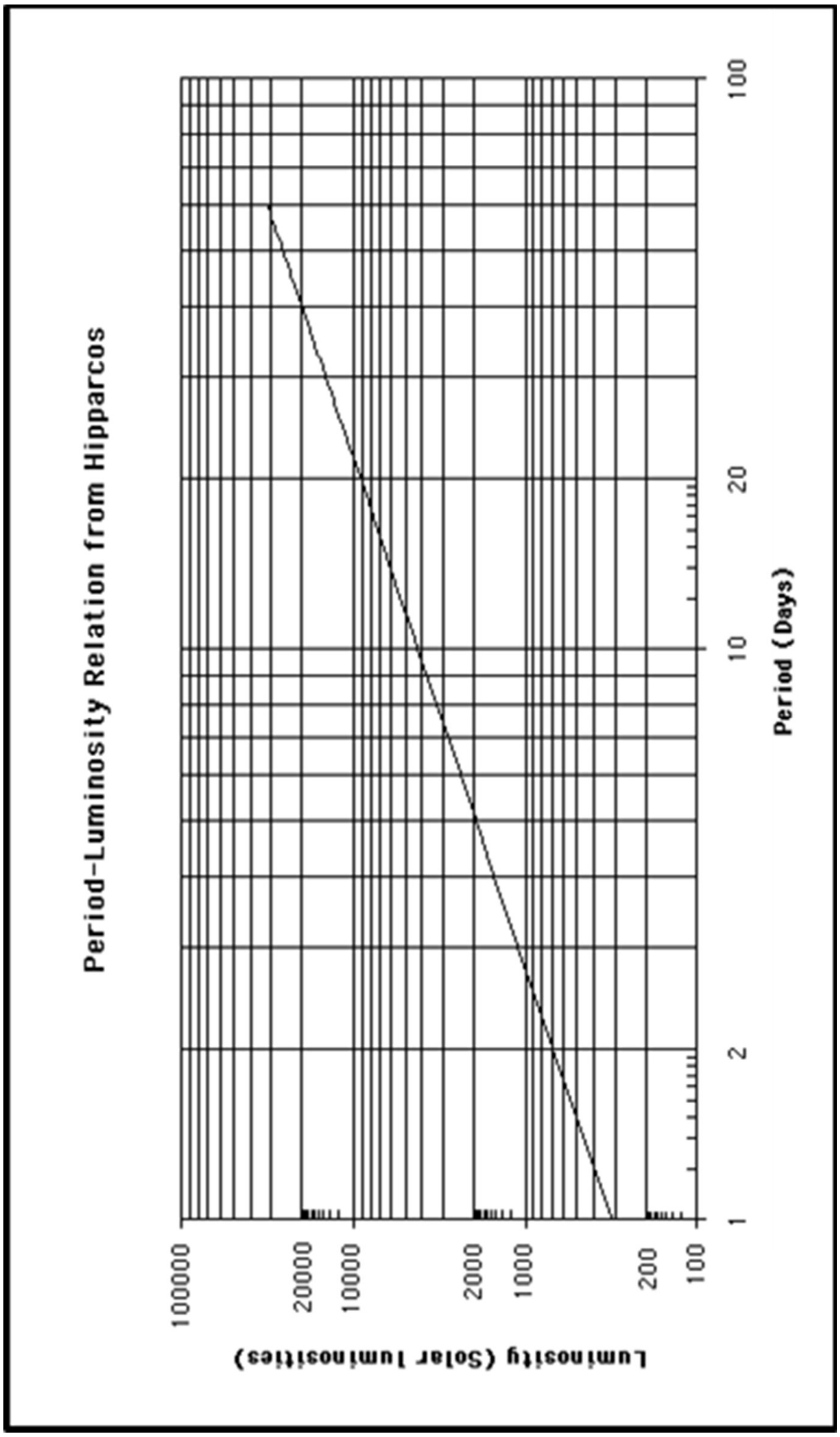
Substituindo:

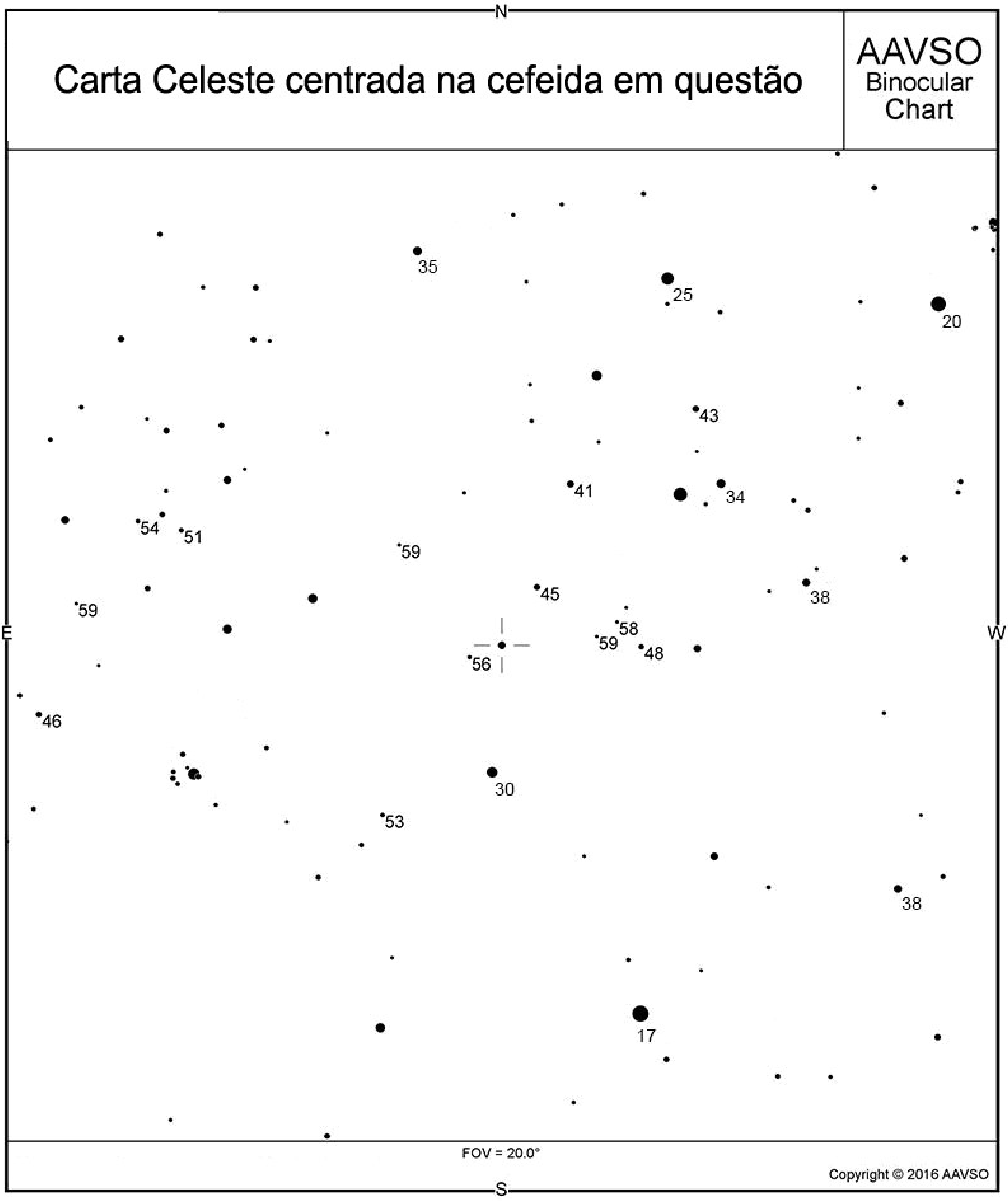
$$N = \frac{1{,}13 \times 10^{-1}\ \ Wm^{-2} \times \pi(3 \times 10^{-3}\ m)^2}{3{,}62 \times 10^{-19}\ J} \rightarrow N \cong 8{,}83 \times 10^3 \rightarrow N = 10^4\ \frac{fótons}{s}$$

A questão pede a ordem de grandeza (10^n) do número de fótons. Portanto o estudante que der uma resposta diferente de uma potência de 10, mesmo que correta, perderá pontos.

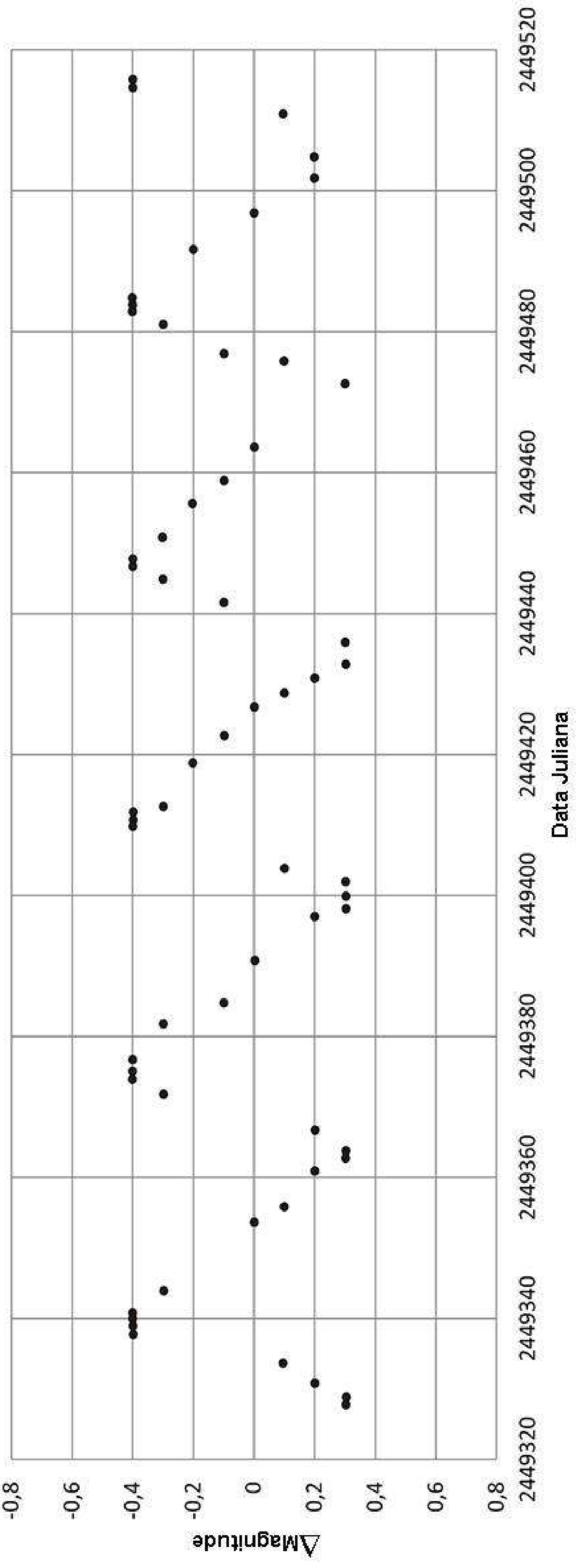
Questão 13	a) distância ao Sol		$682{,}34\ pc \leq d \leq 1009{,}25\ pc$
	b)	T_{eff} (max)	$\cong 5772{,}5\ K$
		T_{eff} (min)	$\cong 4427{,}5\ K$
	c) razão		$\cong 1{,}9$

Questão 13 - espaço para o cálculo





N
Carta Celeste centrada na cefeida em questão
AAVSO
Binocular
Chart
35
25
20
43
41
34
54
51
59
45
38
59
58
59
48
56
E
W
46
30
53
38
17
FOV = 20.0°
Copyright © 2016 AAVSO
S



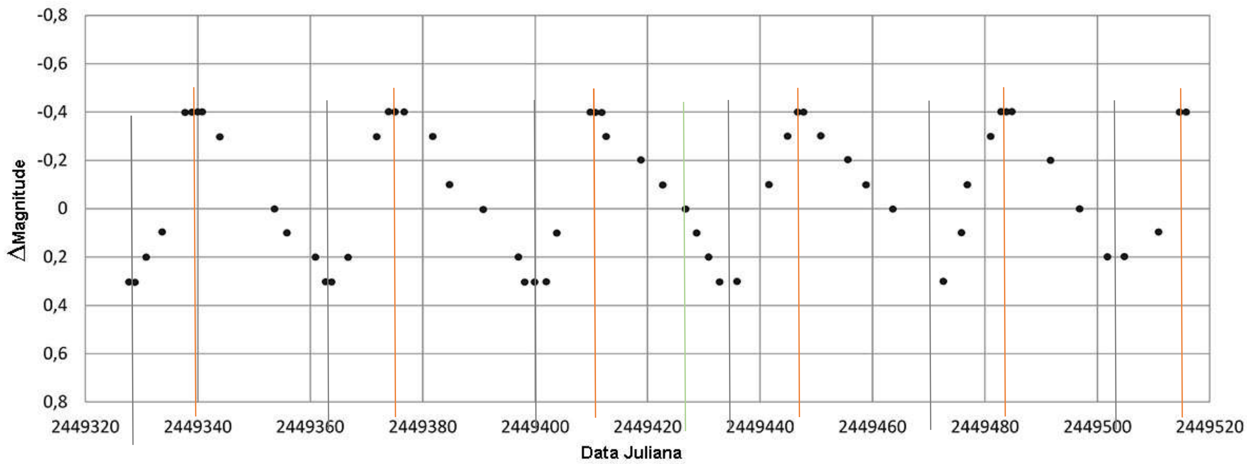
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
ΔMagnitude
2449320
2449340
2449360
2449380
2449400
2449420
2449440
2449460
2449480
2449500
2449520
Data Juliana

Questão 13 - espaço para o cálculo

Respostas:

a) Com as informações dadas acima, determine, o mais precisamente possível, a distância ao Sol desta cefeida, em PARSECS. Considere a magnitude absoluta do Sol como $M_{\odot} = +4{,}8$.

Para começar precisaremos determinar o PERÍODO de variação do brilho e a LUMINOSIDADE a partir da figura 4.



O estudante deverá achar o período através das Datas Julianas dos máximos ou dos mínimos, usando uma régua. O valor conhecido do período desta cefeida (l Car) é de 35,5 dias.

Serão considerados corretos períodos entre 30 e 40 dias (30 ≤ P ≤ 40)

Pelo gráfico da figura 2 obtemos que

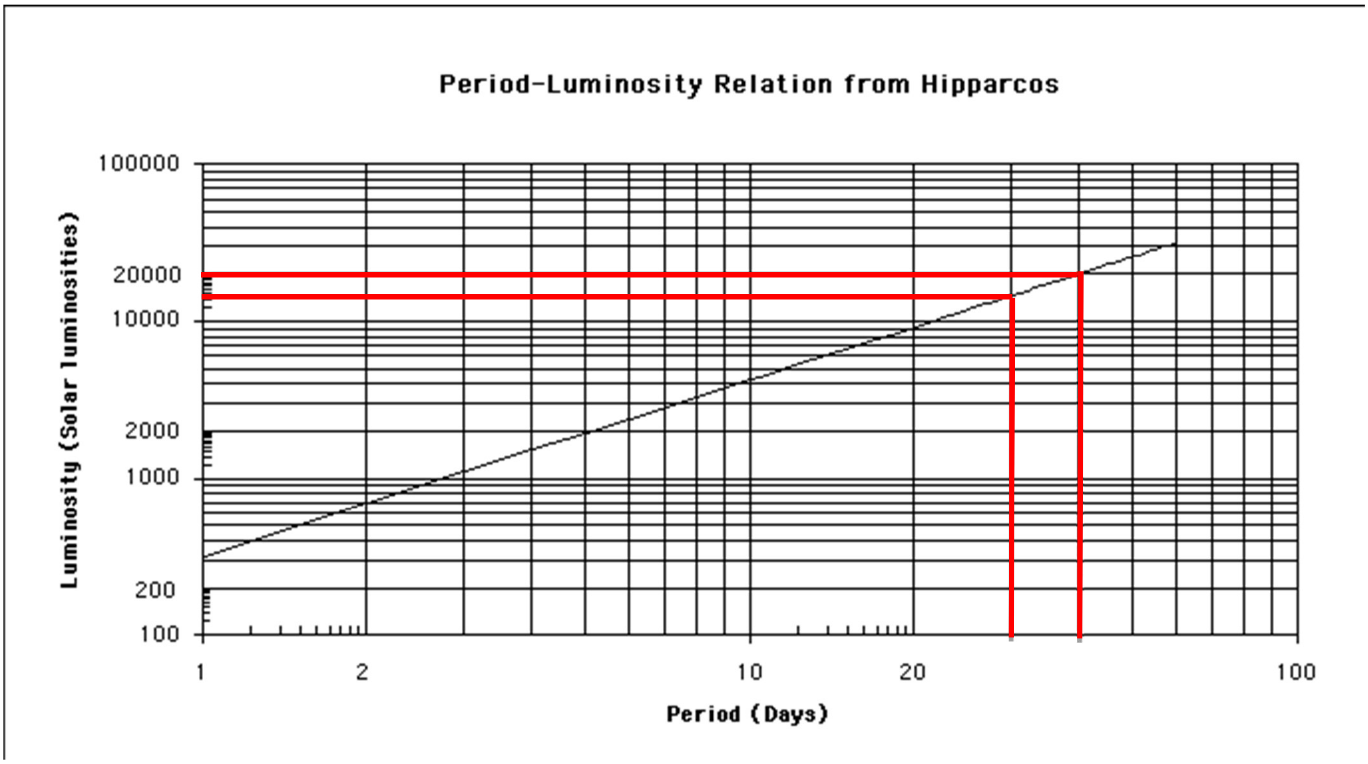
Para P = 30 temos **L/L_{Sol}= 12000** e para P = 40 temos **L/L_{Sol}= 20000**

Mas $\frac{L}{L_{Sol}} = 2{,}5^{(M_{Sol}-M)} => M = M_{Sol} - 2{,}5\log\frac{L}{L_{Sol}}$

Assim:

Para **P = 30 dias** → M = 4,83 – 2,5*log(12000) ≈ **–5,37**

Para **P = 40 dias** → M = 4,83 – 2,5*log(20000) ≈ **–5,92**



Pela figura 3 o estudante deverá obter a <u>magnitude aparente média</u> da cefeida através da comparação com as estrelas cujas magnitudes estão marcadas na Carta.

Assim, serão consideradas corretas as magnitudes entre 4,1 e 3,8 (3,8 ≤ m ≤ 4,1).

$M \;=\; m - 5logD \;+\; 5 => D \;=\; 10^{\left(\frac{m-M+5}{5}\right)}$

D$_{max}$→Para M = -5,92 e m = 4,1 →$D \;=\; 10^{\left(\frac{4,1+5,92+}{5}\right)} \cong 10^{3,01} \cong \mathbf{1009,25\ pc}$

D$_{min}$→Para M$_{min}$ = -5,37 e m = 3,8→$D \;=\; 10^{\left(\frac{3,8+5,37+5}{5}\right)} \cong 10^{2,84} \cong \mathbf{682,34\ pc}$

$$682{,}34\ pc \leq D \leq 1009{,}25\ pc$$

b) De acordo com algumas medidas interferométricas, o diâmetro desta cefeida varia de cerca de 160 a 197 vezes o diâmetro do Sol. Supondo que sua temperatura efetiva média é de aproximadamente 5100 K, determine os valores mínimos e máximos de temperatura efetiva durante um período de pulsação.

Quando o raio é mínimo, temos a temperatura efetiva máxima e vice-versa e como a dependência de L cresce com a 4ª potência de T, temos que $L_{max} \propto T_{max}$ e vice-versa. Então podemos dizer que, em primeira aproximação, temos:

$$L_{min} \;=\; 4\pi(R_{max})^2\sigma(T_{min})^4$$

$$L_{max} \;=\; 4\pi(R_{min})^2\sigma(T_{max})^4$$

$$\Delta m = -2{,}5log\frac{L_{min}}{L_{max}}$$

Pela AMPLITUDE dada pela curva de luz da Figura 4, temos: Δm = 0,3 – (– 0,4) = 0,7

Substituindo na última equação:

$$0{,}7 = -2{,}5 log\left(\frac{L_{min}}{L_{max}}\right) \rightarrow \frac{L_{min}}{L_{max}} = 10^{\left(\frac{0{,}7}{-2{,}5}\right)} \cong 0{,}5248$$

Das duas primeiras equações, temos:

$$\frac{L_{min}}{L_{max}} = \frac{(R_{max})^2 (T_{min})^4}{(R_{min})^2 (T_{max})^4} \rightarrow 0{,}5248 = \left(\frac{197}{160}\right)^2 \left(\frac{T_{min}}{T_{max}}\right)^4$$

$$\frac{T_{min}}{T_{max}} = \sqrt[4]{0{,}3462} \rightarrow \frac{T_{min}}{T_{max}} \cong 0{,}767$$

Como a temperatura média é dada como sendo <T> = 5100 K, então:

$$< T >= \frac{T_{max} + T_{min}}{2} => \frac{T_{max} + 0{,}767\ T_{max}}{2} = \frac{1{,}767\ T_{max}}{2} = 5100\ K$$

Ou seja: $T_{max} = \frac{10200\ K}{1{,}767} \cong 5772{,}5\ K$

$T_{min} = 0{,}767 \times 5772{,}5\ K \cong 4427{,}5\ K$

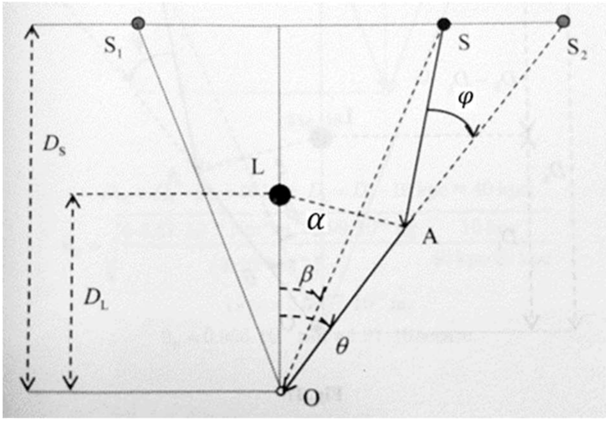
c) Considere que a variação de brilho desta cefeida possa ser acompanhada utilizando um simples binóculo. Calcule a razão entre os valores máximo e mínimo do brilho (fluxo) aparente.

Do gráfico da variação de magnitude (figura 4) tiramos que Δm = 0,7. Aplicando a relação de fluxo *versus* magnitude, temos:

$$\frac{F_{max}}{F_{min}} = \frac{L_{max}}{L_{min}} = 10^{\left(\frac{0{,}7}{2{,}5}\right)} \cong 1{,}9$$

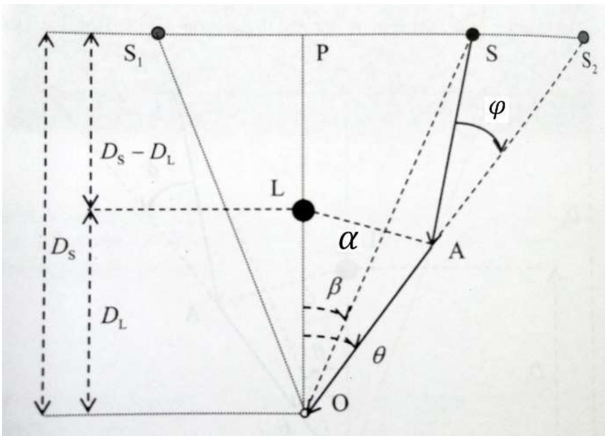
Questão 14	a) (demonstração)	demonstre no espaço abaixo
	b) raio do Anel de Einstein	0,202 *mas*
	c) (avaliação)	Faça sua avaliação no espaço abaixo

Questão 14 - espaço para o desenho



Resposta:

a) (0,5 ponto) A figura abaixo, para ângulos pequenos, traz a geometria do problema:



$$PS_1 = PS + SS_2$$

$$PS_1 = \; D_S \tan\theta \,, PS = D_S \tan\beta \;\; e \; SS_2 = (SA)\tan\varphi$$

Então, substituindo: $D_S \tan\theta = D_S \tan\beta + (SA)\tan\varphi$

Para ângulos pequenos valem as igualdades: $\tan\theta \approx \theta$, $\tan\beta \approx \beta$ e $\tan\varphi \approx \varphi \rightarrow D_S\theta = D_S\beta + (SA)\varphi$

No limite do alinhamento, temos também: $(SA) \approx (PL) = D_S - D_L$

Substituindo:

$$D_S(\theta - \beta) = (D_S - D_L)\varphi \rightarrow \theta - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S}\varphi$$

O parâmetro de impacto é dado por: $\varphi = \frac{4G}{\alpha c^2}$

Substituindo:

$$\theta - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S}\frac{4GM}{\alpha c^2}$$

Ainda do esquema acima: $\alpha = (OL)\theta = D_L\theta$

Substituindo:

$$\theta - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S}\frac{4GM}{D_L\theta c^2}$$

Reescrevendo:

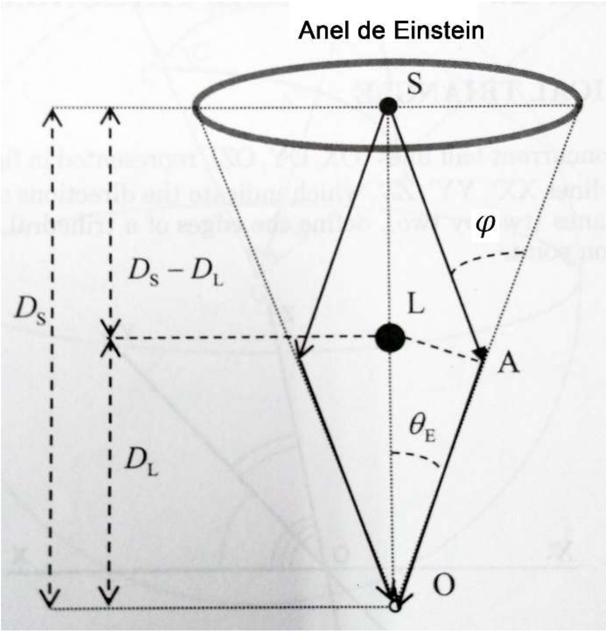
$$\theta^2 - \beta\theta = \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}\frac{4GM}{c^2}$$

No caso do alinhamento perfeito (β = 0), temos:

$$\theta^2 = \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}\frac{4GM}{c^2}$$

Então:

$$\theta = \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_S - D_L}{D_S D_L}}$$



b) (0,3 ponto) $D_{SL} = D_S - D_L = 10$ kpc e $D_L = D_S - 10$ kpc $= 40$ kpc

Substituindo os valores, temos:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2}\frac{10\,kpc}{40\,kpc \times 50\,kpc}}$$

$$\theta_E = \sqrt{5{,}90 \times 10^3 \frac{1}{200\,kpc}}$$

$$1\ kpc = 1000\ pc \times 3{,}26\frac{aL}{pc} \times 9{,}45 \times 10^{15}\frac{m}{aL} \cong 3{,}08 \times 10^{19}\ m$$

Substituindo:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{5{,}90 \times 10^3}{6{,}16 \times 10^{21}}} \rightarrow \theta_E = \sqrt{9{,}58 \times 10^{-19}}$$

$$\theta_E \approx 9{,}79 \times 10^{-10}\ radianos \approx (2{,}02 \times 10^{-4})'' = 0{,}202\ mas$$

c) (0,2 ponto) A resolução espacial do Hubble:

$$\theta_{Hubble} = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 1{,}22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{2{,}4} \cong 2{,}80 \times 10^{-7}\ radianos \approx (57{,}75 \times 10^{-3})'' = 57{,}75\ mas \approx 60\ mas$$

$$\theta_{Hubble} > \theta_E$$

Portanto, o Telescópio Espacial Hubble não consegue resolver este Anel de Einstein