



**TREINAMENTO 2 - PROVA TEÓRICA**  
**SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA**  
**XIII IOAA e XI OLAA de 2019**

---

NOME:

**PROVA TEÓRICA**  
**CADERNO DE QUESTÕES**

**Instruções**

- A duração da prova é de 4,5 horas;
- A prova é individual e sem consultas;
- Suas respostas deverão estar nas folhas de respostas correspondentes a cada questão. Use o verso da folha se necessário;
- Os cálculos podem ser a lápis, mas a resposta deve ser a caneta;
- A prova contém três tipos de questões:
  - **5 questões** curtas valendo **1 ponto** cada
  - **5 questões** médias valendo **2 pontos** cada
  - **3 questões** longas valendo **5 pontos** cada
- Questões sem os respectivos cálculos não serão consideradas.

## Parte I - Questões Curtas

### Questão 1

Um telescópio refrator de razão focal  $f/5$  possui uma lente objetiva com o menor diâmetro possível para resolver a cratera lunar Osíris, cujo diâmetro é  $\varnothing = 0,96$  km. O comprimento focal da ocular utilizada é de 25 mm e seu campo de visão é de  $45^\circ$ .

Desconsiderando a turbulência atmosférica e assumindo o comprimento de onda  $\lambda = 550$  nm:

- Calcule o diâmetro  $D$  da lente objetiva do telescópio;
- Calcule o campo de visão do telescópio (FOV).

### Questão 2

Um grupo de astrônomos tem à disposição dois telescópios: um acima da atmosfera terrestre e outro no laboratório de pesquisas. Ambos são apontados simultaneamente para a estrela Procyon,  $\alpha$  *CMi*, com o intuito de se medir a profundidade óptica atmosférica do zênite ( $\tau_z$ ) no local do centro de observações. O telescópio fora da atmosfera terrestre mediu a magnitude bolométrica da estrela e obteve o valor  $m_{bol1} = 0,40$ , enquanto o do observatório mediu  $m_{bol2} = 0,80$ , apontando para a estrela quando ela estava com altura  $h = 56^\circ$ . Realizando-se os cálculos, eles obtiveram um valor de  $\tau_z$  muito discrepante do real, que deveria ser de  $\tau_z = 0,12$ . Então, um dos astrônomos percebeu que a observação terrestre foi feita através de uma janela dupla, isto é, composta por duas lâminas de vidro.

Determine a porcentagem de luz que foi transmitida pelas janelas e que chegou ao detector do telescópio.

### Questão 3

Um astronauta parte da Terra em uma nave com velocidade constante  $v_a = 0,60c$ , em direção à estrela Canopus,  $\alpha$  *Car*, cuja distância ao nosso planeta é de 310 anos-luz. Simultaneamente à partida da nave, um próton deixa a superfície do Sol com energia cinética de 0,94 GeV, também rumo à Canopus.

Sendo  $\Delta t'_a$  o tempo da viagem realizada pela nave, medido no referencial do astronauta; e  $\Delta t'_p$ , o tempo da viagem realizada pelo próton, medido no referencial dele:

- Determine a razão  $\Delta t'_a / \Delta t'_p$ ;
- Compare com a razão  $\Delta t_a / \Delta t_p$  (tempos de viagem no referencial da Terra) e faça um comentário sucinto sobre isso.

Desconsidere qualquer interação magnética do próton durante sua jornada.

### Questão 4

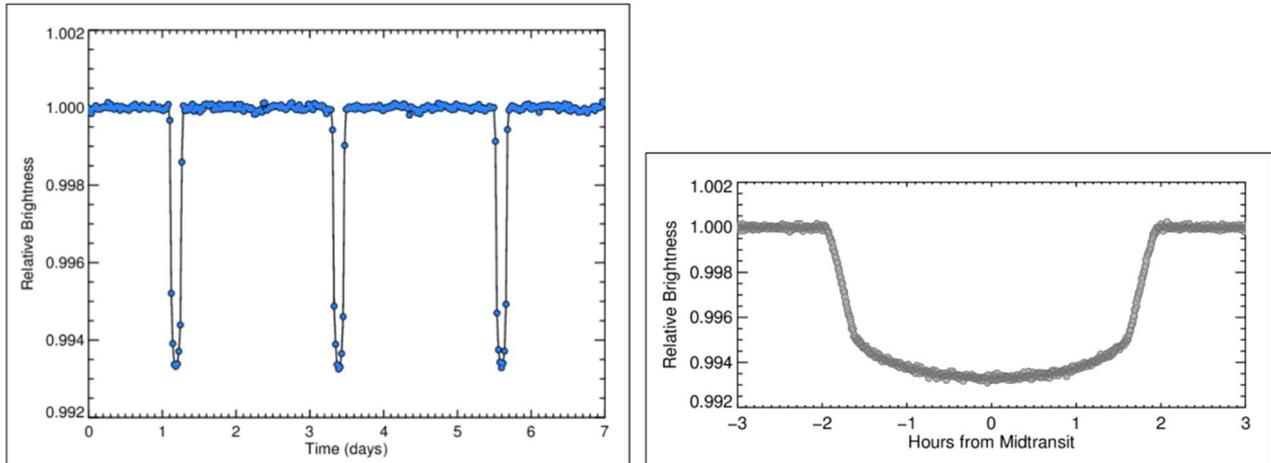
O satélite de monitoramento terrestre *Cloudsat* observa a superfície terrestre a partir de uma órbita polar de  $h = 500$  km de altitude. Um de seus instrumentos é equipado com um radar de microondas operando na faixa de  $\nu = 94$  GHz, com potência de pico  $P = 1500$  W distribuída uniformemente em uma banda de  $\Delta\nu = 1$  GHz de largura.

Calcule a densidade de fluxo  $S$  máxima desse instrumento quando posicionado diretamente acima do observador. Considere que não há absorção atmosférica, e que a potência é irradiada uniformemente em um hemisfério.

### Questão 5

HAT-P-7 é uma estrela tipo F7V onde um exoplaneta foi descoberto pela missão espacial Kepler em 2008. As propriedades dessa estrela são: massa  $M = 1,53 M_{\text{Sol}}$ , raio  $R = 1,98 R_{\text{Sol}}$ , paralaxe  $\pi = 2,99 \times 10^{-3}''$  e magnitude aparente  $m_V = 10,46$ .

As figuras abaixo mostram a curva de luz do sistema e uma ampliação da curva de luz do trânsito primário.



Utilize as imagens maiores do caderno de respostas e calcule:

- o raio do exoplaneta e
- seu raio orbital.

## Parte II - Questões Médias

### Questão 6

O Telescópio Espacial Hubble (HST, sigla em inglês), lançado em 1990, será algum dia descomissionado. Na ocasião ele irá disparar seus retrofoguetes de volta à atmosfera da Terra fazendo ele cair inofensivamente no Oceano Pacífico. Vamos estudar a dinâmica desta operação.

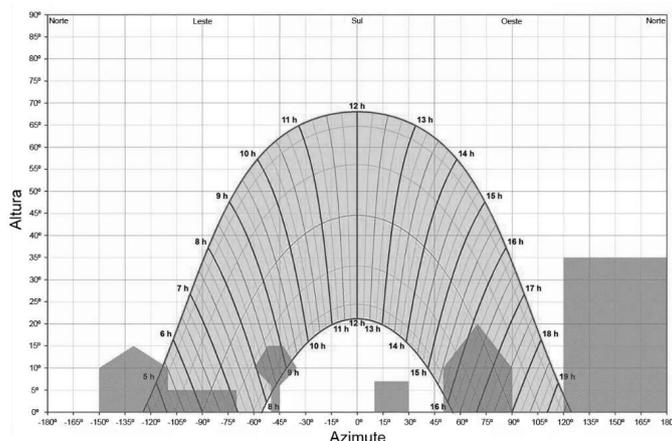
Suponha que o HST esteja atualmente em uma órbita circular ao redor da Terra e que seus retrofoguetes possam disparar precisamente na direção oposta ao seu movimento. O período orbital do HST é de 95,6 minutos.

- Qual é o raio  $a$  da órbita do HST?
- Qual é a velocidade orbital  $v_0$  do HST?
- Qual deve ser o  $\Delta v$  mínimo necessário para derrubar o HST na superfície da Terra? Explique sucintamente por que tal trajetória seria imprudente. Desconsidere a resistência do ar.
- A NASA sugere que o HST deve impactar o oceano em um ângulo de, pelo menos,  $75^\circ$  a partir da vertical. Qual deve ser, então, o  $\Delta v$  necessário para fazer isso? Desconsidere a resistência do ar.

Dica: considere o problema dos itens c) e d) como um problema de órbita de transferência de Hohmann.

### Questão 7

A imagem a seguir traz as coordenadas de azimute e altura do Sol, ao longo do ano, de uma determinada cidade.



Utilize a imagem maior do caderno de respostas e responda:

- Qual a latitude desta cidade?
- Por quanto tempo o Sol fica acima do horizonte no dia do Solstício de Verão?
- Qual é o azimute do pôr do Sol e a que horas ele acontece no dia do Solstício de Inverno?
- Qual é o comprimento da sombra de uma pessoa de 1,70 m de altura, parada em pé sobre um plano horizontal, no dia do Equinócio, às 15h?

### Questão 8

Um astrônomo descobre um sistema binário, composto de uma estrela  $A$  de baixa massa a orbitar ao redor de uma companheira massiva  $B$  ( $m_A \ll m_B$ ). Ele consegue medir a variação da velocidade radial da estrela  $A$  através do deslocamento Doppler das linhas espectrais. A Tabela abaixo apresenta os resultados das medições. Todas as observações foram feitas em 17/7/2009. Os horários são em UT.

tempo (UT)	velocidade (km/s)	tempo (UT)	velocidade (km/s)
01:47:44	-292	02:37:21	98
01:41:31	-180	02:43:34	186
01:35:18	-60	02:49:51	290
01:53:57	-421	02:56:04	336
01:59:45	-438	03:02:22	344
02:06:13	-417	03:08:35	350
02:12:26	-361	03:14:48	294
02:18:41	-266	03:21:01	186
02:24:54	-163	03:27:15	130
02:31:07	-32	03:33:28	-40

- Faça um gráfico da velocidade radial em função do tempo e obtenha o período orbital da estrela  $A$  (utilize uma folha de papel milimetrado para isso);
- Utilize essa informação para calcular a massa da estrela  $B$ ;
- O gráfico é simétrico com relação ao eixo temporal? Se sim, explique o que isso significa. Se não, explique a razão da assimetria.

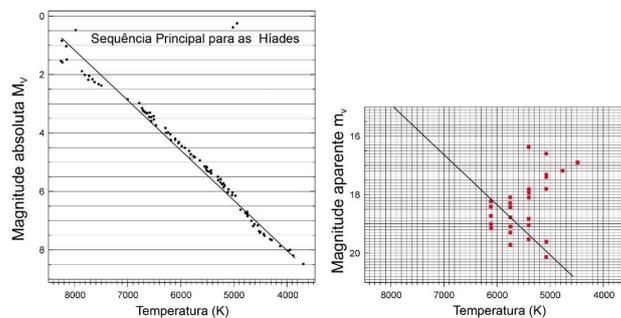
## Questão 9

O termo "aglomerados estelares" é usado para dois tipos diferentes de grupos de estrelas: aglomerados abertos e aglomerados globulares. Os aglomerados abertos são coleções erráticas contendo entre cem a algumas milhares de estrelas relativamente jovens. As Plêiades (M45) são um exemplo típico deste tipo de aglomerado. Estes aglomerados são encontrados no disco da nossa galáxia, a Via Láctea e muitas vezes contêm nuvens de gás e poeira, onde novas estrelas se formam. Já um aglomerado globular consiste em um grupo esférico de até um milhão de estrelas e estão entre as estruturas mais antigas da nossa Via Láctea.

Todas as estrelas reunidas em um aglomerado globular compartilham uma história comum e diferem uma da outra apenas em sua massa. Portanto, aglomerados globulares são locais ideais para estudar a evolução das estrelas. Nesta questão você determinará algumas propriedades de um aglomerado globular específico, o M12.

M12 está localizado na constelação de Ophiuchus. A magnitude visual aparente de todo o aglomerado globular é de +6,7 e a estrela mais brilhante do aglomerado tem uma magnitude visual aparente de +12.

A figura a seguir traz o diagrama Hertzsprung-Russell para medidas feitas nos aglomerados das Híades e de M12. As linhas representam a interpolação para as estrelas da para a Sequência Principal dos dois aglomerados.



Em primeira aproximação podemos considerar que a forma da sequência principal é a mesma para todos os aglomerados estelares, seja qual for sua idade, e assumir que suas sequências principais são "paralelas".

a) Sendo assim, obtenha o módulo da distância ( $m_V - M_V$ ) para M12 utilizando o ajuste para as Híades como uma Sequência Principal Padrão. Use a imagem maior na folha de resposta e use o valor médio de, pelo menos 2 (dois) pontos por gráfico.

b) Utilize o módulo da distância para determinar a distância D de M12.

c) A distância encontrada no item anterior não levou em consideração a "extinção interestelar", devido ao gás e poeira da nossa galáxia, que reduz a intensidade da luz do aglomerado que chega até nós. De forma que o módulo da distância precisa ser corrigido para encontrarmos a distância correta. Na literatura encontramos que para M12 o fator de correção da extinção vale  $A = 0,67$  magnitude.

Utilize o módulo da distância corrigido para M12 e recalcule sua distância. Qual foi o percentual de correção?

d) Para estimar o número total de estrelas, N, de um aglomerado globular, precisamos fazer algumas suposições:

- i. O aglomerado consiste em uma mistura de todos os tipos de estrelas, mas assumimos que a "estrela média" é uma estrela semelhante ao Sol, ou seja, a magnitude absoluta das estrelas é a mesma que a do Sol.
- ii. Assumimos que cada estrela contribui com a sua luminosidade para a luminosidade total do aglomerado. Na realidade, poeira ou outras estrelas pode ocultar algumas estrelas parcial ou totalmente.

Sendo assim, estime a ordem de grandeza do número de estrelas de M12, sabendo que sua magnitude visual absoluta vale  $M_{M12} = -7,32$ .

### **Questão 10**

Certa noite, após corrigir as provas da equipe brasileira na IOAA, ao chegar em seu quarto no hemisfério Norte, Eugênio percebe que consegue observar o quadrilátero de Pégasus tangenciando a base da janela do quarto (de modo que Algenib fique na iminência de desaparecer sob a base) apenas deitando no chão de modo que seu olho fique a uma distância de 1,27 m da parede que contém a janela. Sabendo que a base dessa janela está a uma distância de 59,055 polegadas do chão, que a estrela mais alta é Alferatz e que a mais baixa é Algenib, determine:

- a) A distância zenital de Algenib;
- b) A latitude do quarto de Eugênio;
- c) A altura da janela em relação à sua base para que se possa ser possível observar as quatro estrelas do quadrilátero através dela. Considere que a largura já é suficientemente grande para que se veja as quatro estrelas.

#### **Dados da questão:**

Coordenadas das estrelas:

Algenib ( $\gamma$  Peg) :  $\delta = 15^{\circ}18'2,4''$  ;  $H = 18^{\circ}04'01''$

Markab ( $\alpha$  Peg) :  $\delta = 15^{\circ}19'08,5''$ ;

Scheat ( $\beta$  Peg) :  $\delta = 28^{\circ}11'50,7''$ ;

Apheratz ( $\alpha$  And) :  $\delta = 29^{\circ}12'24''$ ;  $H = 19^{\circ}16'15''$

## Parte III - Questões Longas

### Questão 11

A primeira indicação de que poderia haver um buraco negro no centro da Via Láctea veio quando uma fonte altamente incomum de emissão de rádio foi localizada na constelação do Sagitário. Esta fonte foi chamada de "Sagitário A\*" (SgrA\*). Logo ficou claro que a fonte desconhecida não poderia ser uma estrela e especulou-se que a fonte misteriosa pode ser um buraco negro no centro da Via Láctea, uma vez que matéria circulando um buraco negro em alta velocidade poderia dar conta da emissão de rádio incomum.

Observações de estrelas perto do centro do Via Láctea são difíceis, por conta da quantidade grandes de estrelas e nuvens de poeira que obscurecem nossa visão daquela região. Felizmente, observações no comprimento de onda no infravermelho são muito menos obscurecidas pelas nuvens de poeira do que no visível. Uma equipe de astrônomos, utilizando o Very Large Telescope (VLT) do ESO fez imagens em infravermelho do centro da Via Láctea ao longo de muitos anos.

Em imagens sucessivas, tiradas em momentos diferentes, percebe-se que as estrelas perto do centro da Via Láctea se movem um pouco. Uma estrela em particular, chamada S2, mudou muito de posição ao longo dos anos.

A tabela a seguir traz as coordenadas da estrela S2 em função do tempo.

Data (ano)	x (")	$\Delta x$ (")	y (")	$\Delta y$ (")
1992,226	0,104	0,003	-0,166	0,004
1994,321	0,097	0,003	-0,189	0,004
1995,531	0,087	0,002	-0,192	0,003
1996,256	0,075	0,007	-0,197	0,010
1996,428	0,077	0,002	-0,193	0,003
1997,543	0,052	0,004	-0,183	0,006
1998,365	0,036	0,001	-0,167	0,002
1999,465	0,022	0,004	-0,156	0,006
2000,474	-0,000	0,002	-0,103	0,003
2000,523	-0,013	0,003	-0,113	0,004
2001,502	-0,026	0,002	-0,068	0,003
2002,252	-0,013	0,005	0,003	0,007
2002,334	-0,007	0,003	0,016	0,004
2002,408	0,009	0,003	0,023	0,005
2002,575	0,032	0,002	0,016	0,003
2002,650	0,037	0,002	0,009	0,003
2003,214	0,072	0,001	-0,024	0,002
2003,353	0,077	0,002	-0,030	0,002
2003,454	0,081	0,002	-0,036	0,002

Na coluna 1 temos a data em que a posição da estrela S2 foi medida (por exemplo: 2000,500 significa exatamente a metade do ano 2000).

Nas colunas de 2 a 5 temos as posições x e y medidas da estrela e suas incertezas, em unidades de segundo de arco.

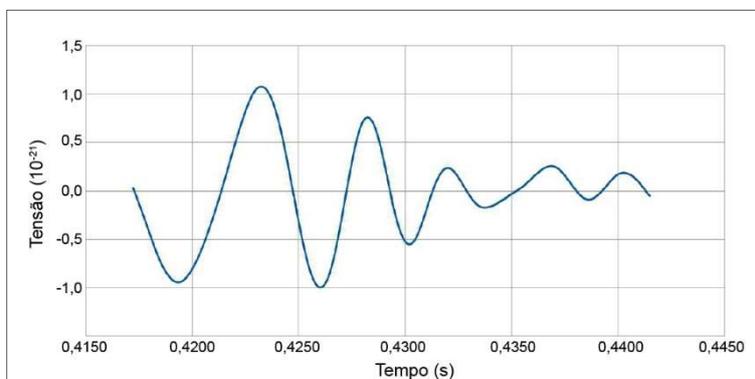
Considere o buraco negro localizado na origem do sistema de coordenadas (0,0; 0,0).

- Marque no gráfico da folha de resposta os pontos correspondentes às coordenadas x e y da estrela S2 dadas na tabela. Desconsidere as incertezas para montar o gráfico;
- Desenhe uma elipse que melhor se ajusta à estas medições. Note que a elipse não precisa passar exatamente pelos pontos por conta das incertezas nas posições;
- Meça o semi-eixo maior **a** em segundos de arco;
- Converta a medida do semi-eixo maior **a** para dia-luz, usando o fato de que a esta distância 2 segundos de arco correspondem a 82 Dias-Luz no Centro da Via Láctea;
- Através do gráfico, estime o período orbital **P** de S2 em torno do buraco negro;
- Estime a massa **M** do buraco negro central da Via Láctea, em termos de massas solares  $m_{sol}$ .

## Questão 12

A primeira detecção direta de ondas gravitacionais foi feita pelo avançado *Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory* (LIGO), em 14 de setembro de 2015. O sinal, conhecido por GW150914, era forte o suficiente para ser evidente entre os dados filtrados pelo detector de tensão.

Mesmo sem conhecer as complexidades dos detectores do LIGO, nem como a interferometria ou a relatividade geral funcionam, podemos analisar certas características do sistema do qual as ondas se originaram. O gráfico a seguir traz os dados do detector do LIGO, em Hanford, Washington.



A figura descreve os momentos finais exatos antes que dois buracos negros se fundirem entre si. A **tensão** (eixo vertical) é uma medida (adimensional) do alongamento do espaço causado pelo sistema dos buracos negro, definida como a mudança no comprimento dividido pelo comprimento inicial do espaço. Por exemplo: se 1 metro de espaço se tornou 1,5 metro, a tensão foi de 0,5.

A primeira parte do gráfico, onde as ondas gravitacionais atingem a amplitude de pico, descreve o final do estágio "*inspiral*", quando as órbitas dos buracos negros, em torno um do outro, encolhe ao mínimo. Isto é seguido pelo que é conhecido como estágio "*ringdown*", onde a amplitude decai, e os dois buracos negros fundem-se gradualmente em um só.

Considere os dois buracos negros como sendo idênticos buracos negros de Schwarzschild (isto é, não rotativos, sem carga, girando em torno um do outro em uma órbita circular "comum", cujo raio da órbita está diminuindo lentamente).

a) Através do gráfico, estime a frequência das ondas gravitacionais, assim como a frequência angular da órbita na amplitude máxima. Utilize o gráfico maior na folha de resposta.

b) A taxa de perda de energia orbital através de ondas gravitacionais, numa aproximação não relativística, pode ser calculada usando os resultados derivados por Einstein, através da seguinte equação, que relaciona a frequência das ondas gravitacionais na máxima amplitude ( $f_{max}$ ) ao instante da máxima amplitude ( $t_{max}$ ), à massa dos buracos negros ( $M$ ) e outras constantes:

$$(f_{max})^{-\frac{8}{3}} = \left(\frac{8\pi}{5}\right)^{\frac{8}{3}} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{\frac{5}{3}} (t_{fusão} - t_{max})$$

Aqui,  $t_{fusão}$  é o tempo teórico de quando os buracos negros se fundem completamente. Considere  $t_{fusão} = 0,4620$  s, que neste caso está além da escala do gráfico.

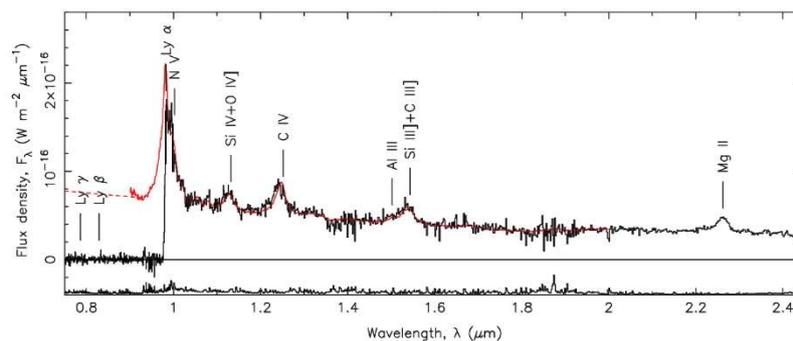
Sendo assim, determine a massa  $M$  de cada buraco negro em termos de massas solares;

c) Determine o raio  $r$  da órbita no ponto de máxima amplitude;

d) Comente e justifique/refute se esse sistema poderia ser realmente um sistema binário composto de anãs brancas ou de estrelas de nêutrons, em oposição ao de buracos negros.

### Questão 13

Em Junho de 2011, cientistas anunciaram a descoberta do quasar mais longínquo até então, com redshift  $z > 7$ . O quasar ULAS J1120+0641 possui luminosidade  $L = 6,3 \times 10^{13} L_{sol}$ . A figura a seguir mostra seu espectro na região do infravermelho.



Use o gráfico maior na folha de resposta e para este problema apenas, utilize o seguinte valor para a constante de Hubble:  $H_0 = 67,8$  km/s/Mpc.

a) Calcule o *redshift*  $z$  do quasar, sabendo que o comprimento de onda de laboratório da linha Lyman- $\alpha$  é  $\lambda_0 = 1216$  Å;

b) Calcule a magnitude aparente do quasar como visto da Terra. Despreze a extinção intergaláctica.

Dica: A distância comóvel (ou, distância própria dividida pelo fator de escala) pode ser calculada como  $d_C(z) = d_H \times \chi(z)$ , onde  $\chi(z) = 2$  é um fator adimensional para este quasar e  $d_H$  é o raio de Hubble (distância além da qual os objetos se afastam a  $v > c$ , devido à expansão cosmológica do Universo).

c) Estime a idade do Universo na época da equivalência matéria-radiação. Considere que a equivalência matéria-energia escura ocorreu há  $4,05 \times 10^9$  anos.

Dica: Em um Universo dominado por radiação:  $a(t) \propto t^{1/2}$ ;

Em um Universo dominado por matéria:  $a(t) \propto t^{2/3}$ ;

Em um Universo dominado por energia escura:  $a(t) \propto \exp\left(t\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)$ .

d) A equação de Friedmann pode ser escrita como:

$$H^2 = H_0^2 \left[ \frac{\rho}{\rho_{c,0}} + \frac{a_0^2}{a^2} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \right) \right]$$

onde  $\rho$  é a densidade do Universo no instante  $t$ ,  $\rho_0$  é a densidade atual do Universo e  $\rho_{c,0}$  é a densidade crítica atual do Universo.

Demonstre que esta equação pode ser reescrita como:

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{k,0} + \Omega_{\Lambda,0} a^2}$$

Dica: Use a definição do parâmetro de Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

onde  $\dot{a}(t)$  é a taxa de variação do fator de escala.

e) A equação do item (d) pode ser derivada em relação ao tempo, obtendo-se

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2} H_0^2 (2\Omega_{r,0} a^{-3} + \Omega_{m,0} a^{-2} - 2\Omega_{\Lambda,0} a)$$

A partir desse resultado, estime o fator de escala  $a(t)$  no qual o nosso Universo passou de uma expansão desacelerada para uma expansão acelerada.

Nota: Por convenção,  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$  e  $\ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2}$