TREINAMENTO 2 - PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA e XI OLAA de 2019

NOME:

PROVA TEÓRICA – GABARITO

Instruções

- Coloque seu nome em TODAS as folhas de resposta
- A duração da prova é de 4,5 horas;
- A prova é individual e sem consultas;
- Suas respostas deverão estar nas folhas de respostas correspondentes a cada questão. Use o verso da folha se necessário;
- Os cálculos podem ser a lápis, mas a resposta deve ser a caneta;
- A prova contém três tipos de questões:
  - 5 questões curtas valendo 1 ponto cada
  - 5 questões médias valendo 2 pontos cada
  - 3 questões longas valendo 5 pontos cada
- Questões sem os respectivos cálculos não serão consideradas.

Questão 1	D	$2,68 \times 10^{-1}\,m \approx 0,27\,m$
	FOV	$50' \approx 0,83°$

Questão 1 - espaço para o cálculo

a)

$$\theta = 1,22\frac{\lambda}{D} \rightarrow \frac{\emptyset}{d_{Lua}} = 1,22\frac{\lambda}{D} \leftrightarrow D = 1,22\frac{\lambda d_{Lua}}{\emptyset}$$

Substituindo-se os valores:

$$D = 1,22\frac{550 \times 10^{-9} \times 3,84 \times 10^{8}}{9,6 \times 10^{2}} \rightarrow D \cong 2,68 \times 10^{-1}\,m \approx 0,27\,m$$

b)

Com base na razão focal e no diâmetro da objetiva, é possível determinar a distância focal f_{ob} da objetiva:

$$\frac{f_{ob}}{D} = 5 \rightarrow f_{ob} = 5 \times 0,27 = 1,35\,m$$

Dividindo a distância focal da objetiva pela da ocular, é possível obter o aumento A:

$$A = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = \frac{1,35}{0,025} = 54$$

Dividindo o campo de visão da ocular pelo aumento, é possível obter o campo de visão do telescópio:

$$FOV = \frac{FOV_{oc}}{A} = \frac{45° \times 60}{54} \rightarrow FOV = 50' \approx 0,83°$$

Questão 2	Porcentagem da luz transmitida	80%

Questão 2 - espaço para o cálculo

O fluxo F de uma estrela observada a uma distância zenital z em um local cuja profundidade óptica é τ_Z vale:

$$F = F_0 e^{-\tau_z \sec z}$$

Onde F_0 é o fluxo medido acima da atmosfera.

Como a janela absorve luz, apenas uma fração η da luz é transmitida, de forma que:

$$F' = \eta F = \eta F_0 e^{-\tau_z \sec z}$$

A diferença entre as magnitudes será:

$$m_{bol1} - m_{bol2} = -2{,}5 \log\left(\frac{F_0}{F'}\right)$$

$$\frac{0{,}40 - 0{,}80}{-2{,}5} = \log\left(\frac{F_0}{\eta F_0 e^{-\tau_z \sec z}}\right) \rightarrow 0{,}16 = \log 1 - \log(\eta e^{-\tau_z \sec z}) = -\log \eta + \tau_z \sec z \log e$$

$$\rightarrow \eta = 10^{(\tau_z \sec z \log e\, -\, 0{,}16)}$$

τ_Z = 0,12

z = 90° - h = 34°

Substituindo-se os valores:

$$\eta = 10^{(0{,}12 \sec 34° \log e\, -\, 0{,}16)} \rightarrow \eta \cong 0{,}80$$

Porcentagem da luz transmitida foi de 80%

Nome:

Questão 3	$\Delta t'_a/\Delta t'_p$	2,31
	$\Delta t_a/\Delta t_p$	1,44
	comentário	(na folha de resposta)

Questão 3 - espaço para o cálculo e comentário

Através das transformações de Lorentz, temos:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$$

Então:

$$\frac{\Delta t_a}{\Delta t_p} = \frac{\gamma_a}{\gamma_p}\frac{\Delta t'_a}{\Delta t'_p}$$

Precisamos calcular a velocidade do próton de acordo com a sua energia total. A energia total do próton será sua energia de repouso mais sua energia cinética:

$$E = E_0 + K \rightarrow \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K \rightarrow m_0 c^2(\gamma - 1) = K \rightarrow \gamma = 1 + \frac{K}{m_0 c^2}$$

K_p = 0,94 GeV

$$\gamma_p = 1 + \frac{0{,}94 \times 10^9 \times 1{,}6 \times 10^{-1}}{1{,}67 \times 10^{-27} \times (3{,}00 \times 10^8)^2} \rightarrow \gamma_p \cong 2{,}00$$

Então a velocidade do próton será:

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - v_p^2/c^2}} \rightarrow v_p = \frac{c}{\gamma_p}\sqrt{\gamma_p^2 - 1} \rightarrow v_p = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

O Fator de Lorentz para o astronauta será:

$$\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}6^2}} \rightarrow \gamma_a = 1{,}25$$

$$\frac{\Delta t_a}{\Delta t_p} = \frac{d/v_a}{d/v_p} = \frac{v_p}{v_a} = \frac{\sqrt{3}/2}{0{,}6} \cong 1{,}44$$

O tempo de viagem do astronauta é cerca de 44% maior do que o tempo de viagem do próton, porém por conta das altas velocidade, temos:

$$\frac{\Delta t'_a}{\Delta t'_b} = \frac{\gamma_p}{\gamma_a}\frac{\Delta t_a}{\Delta t_p} = \frac{2{,}00}{1{,}25} \times 1{,}44 \rightarrow \frac{\Delta t'_a}{\Delta t'_b} \cong 2{,}31$$

Apesar da contração do comprimento fazer com que para ambos a viagem pareça menos longa, do ponto de vista do tempo próprio de cada um, para o astronauta será uma viagem 131% mais longa do que a viagem do próton.

Questão 4	S	$9{,}55 \times 10^{-19}\, Wm^{-2}Hz^{-1} \equiv 9{,}55 \times 10^{7}\, Jy$

Questão 4 - espaço para o desenho e o cálculo

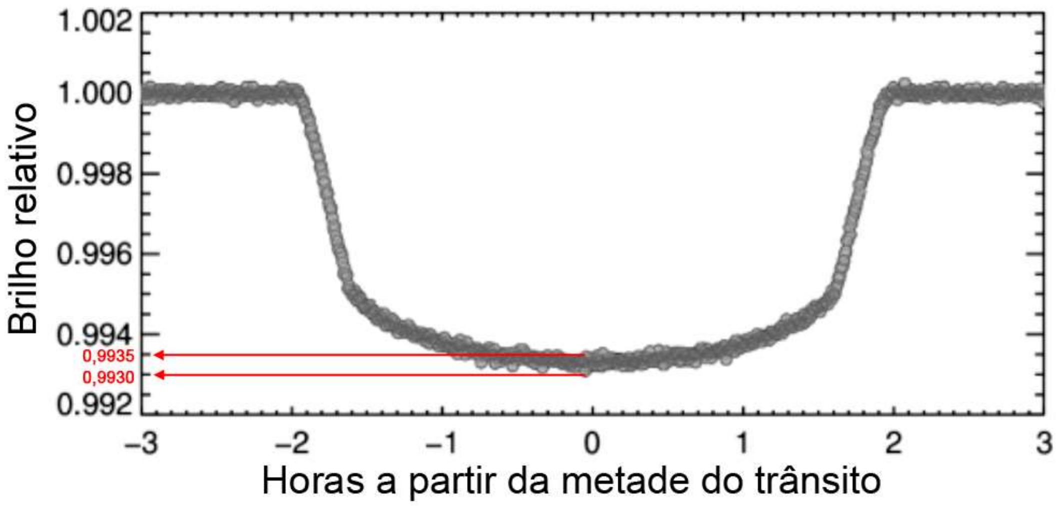
A densidade de fluxo é dada por:

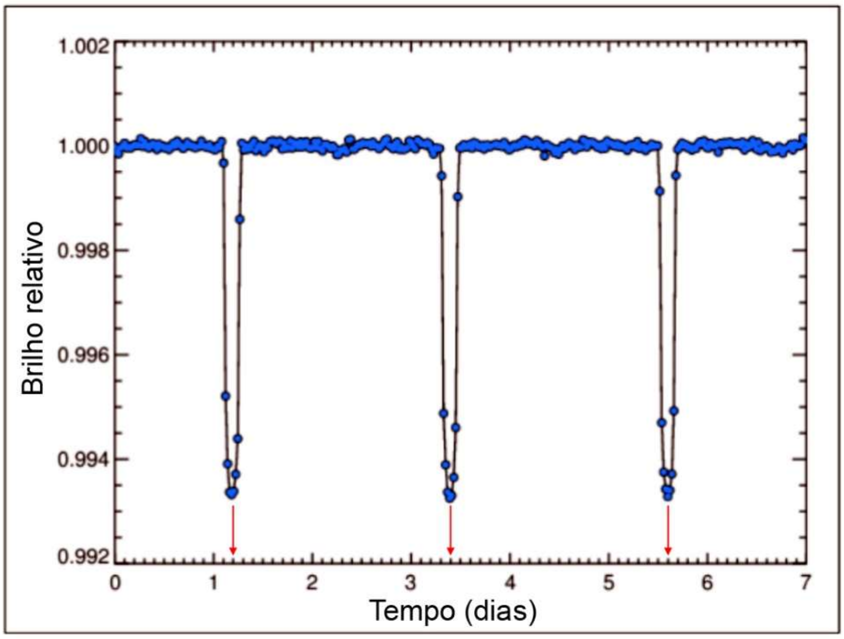
$$S = \frac{P}{\Omega h^2 \Delta\nu} = \frac{1500\ W}{2\pi(5 \times 10^5)^2(10^9\ Hz)} \rightarrow S \cong 9{,}55 \times 10^{-19}\, Wm^{-2}Hz^{-1} \equiv 9{,}55 \times 10^{7}\, Jy$$

Nome:

Questão 5	raio do exoplaneta	$1{,}02 \times 10^8\ m \leq r \leq 1{,}36 \times 10^8\ m$ $0{,}15\ R_{Sol} \leq r \leq 0{,}20\ R_{Sol}$
	raio orbital	$5{,}71 \times 10^9\ m \equiv 3{,}81 \times 10^{-2}\ U.A.$

Questão 5 - espaço para o cálculo





a) O raio do planeta pode ser calculado a partir do decréscimo de brilho durante o trânsito primário. A razão entre o brilho da estrela e o brilho durante o trânsito é igual às razões entre as áreas da estrela e área da estrela menos a do planeta. Da imagem ampliada da curva de luz, temos que o brilho relativo no ponto de mínimo vale: [0,9930 ; 0,9935].

Para 0,9930:

$$\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{0{,}9930}{1}$$

Resolvendo para *r*, temos:

$$r = R\sqrt{1 - 0{,}9930} = 1{,}98 \times 6{,}96 \times 10^8 \sqrt{1 - 0{,}9930} \rightarrow r \cong 1{,}15 \times 10^8\ m\ \approx 0{,}17\ R_{Sol}$$

Para 0,9935:

$$r = R\sqrt{1 - 0{,}9935} = 1{,}98 \times 6{,}96 \times 10^8 \sqrt{1 - 0{,}9935} \rightarrow r \cong 1{,}11 \times 10^8\ m\ \approx 0{,}16\ R_{Sol}$$

b) O período orbital pode ser obtido pelo intervalo entre os trânsitos primários do exoplaneta na primeira figura. Seu período orbital, portanto, é:

$$< P >= 5{,}6 - 3{,}4 = 3{,}4 - 1{,}2 = 2{,}20\ dias$$

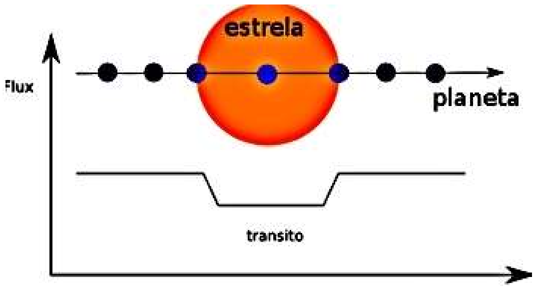
Pela Lei de Kepler generalizada e desprezando-se a massa do planeta, temos:

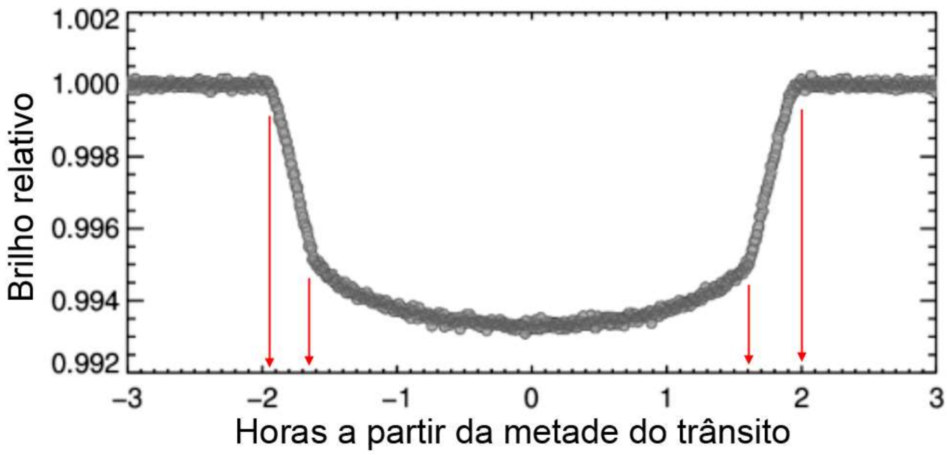
$$< P >^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{GM < P >^2}{4\pi^2}}$$

Substituindo-se os valores, temos:

$$a = \sqrt[3]{\frac{(6{,}67 \times 10^{-11})(1{,}53 \times 1{,}99 \times 10^{30})(2{,}20 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2}} \rightarrow a \cong 5{,}71 \times 10^9\ m \equiv 3{,}81 \times 10^{-2}\ U.A.$$

Outro método para encontrarmos o raio do exoplaneta é através da parte linear da queda do brilho relativo, identificando-a como a entrada e a saída do exoplaneta da frente do disco estelar:





Do gráfico temos que este evento dura entre 0,3 h e 0,4 h.

$$t = \frac{2r}{v} = \frac{2r}{\left(\frac{2\pi a}{P}\right)} = \frac{rP}{\pi a} \rightarrow r = \frac{\pi a t}{P}$$

Para t = 0,3 h

$$r = \frac{\pi(5{,}71 \times 10^9)(0{,}3)}{(2{,}2 \times 24)} \rightarrow r \cong 1{,}02 \times 10^8\ m \approx 0{,}15\ R_{Sol}$$

Para t = 0,4 h

$$r = \frac{\pi(5{,}71 \times 10^9)(0{,}4)}{(2{,}2 \times 24)} \rightarrow r \cong 1{,}36 \times 10^8\ m \approx 0{,}20\ R_{Sol}$$

Questão 6	raio da órbita	$6{,}93 \times 10^6\ m$
	velocidade orbital	$7{,}59 \times 10^3\ m/s \cong 2{,}73 \times 10^4\ km/h$
	Δv mínimo	$\Delta v = 1{,}70 \times 10^2\ m/s = 170\ m/s$
	explicação	(na folha de resposta)
	Δv	$\Delta v = 1{,}46 \times 10^3\ m/s = 1460\ m/s$

Questão 6 - espaço para o cálculo

a) Da Terceira Lei de Kepler e desprezando a massa do HST, temos:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}}$$

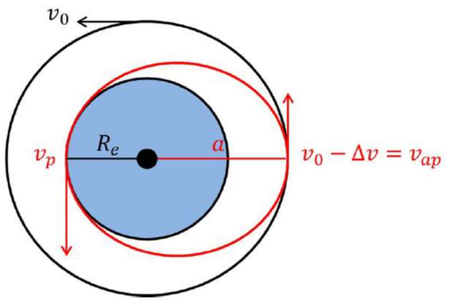
Substituindo-se os valores:

$$a = \sqrt[3]{\frac{(6{,}67 \times 10^{-1}\ )(5{,}97 \times 10^{24})(95{,}6 \times 60)^2}{4\pi^2}} \rightarrow a \cong 6{,}93 \times 10^6\ m$$

b)

$$v_0 = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi(6{,}93 \times 10^6)}{(95{,}6 \times 60)} \rightarrow v_0 \cong 7{,}59 \times 10^3\ m/s \cong 2{,}73 \times 10^4\ km/h$$

c) O problema pode, de fato, ser visualizado como uma órbita de transferência de Hohmann, com esquema a seguir, fora de escala:



Da conservação da energia orbital U, temos:

$$U = -\frac{GMm}{2\left(\frac{a+R_e}{2}\right)} = \frac{1}{2}mv_{ap}^2 - \frac{GMm}{a}$$

Resolvendo para a velocidade de aproximação v_{ap}:

$$v_{ap}^2 = 2GM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+R_e}\right) \rightarrow v_{ap} = \sqrt{\frac{2GMR_e}{a(a+R_e)}}$$

Substituindo-se os valores:

$$v_{ap} = \sqrt{\frac{2(6{,}67 \times 10^{-11})(5{,}97 \times 10^{24})(6{,}37 \times 10^6)}{6{,}93 \times 10^6(6{,}93 \times 10^6 + 6{,}37 \times 10^6)}} \rightarrow v_{ap} \cong 7{,}42 \times 10^3\ m/s$$

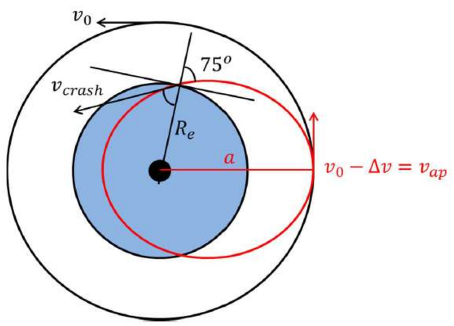
Então:

$$\Delta v = (7{,}59 \times 10^3\ m/s) - (7{,}42 \times 10^3\ m/s) \rightarrow \Delta v = 1{,}70 \times 10^2\ m/s = 170\ m/s$$

Comentário: Tal trajetória iria “roçar” à superfície da Terra, como visto no esquema. Isso daria pouco controle sobre o local de queda do HST.

Nome:

d) O diagrama a seguir traz o cenário sugerido pela NASA:



Da conservação da energia orbital:

$$\frac{1}{2}mv_{queda}^2 - \frac{GMm}{R_e} = \frac{1}{2}mv_{ap}^2 - \frac{GMm}{a} \rightarrow v_{queda}^2 = v_{ap}^2 + 2GM\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{a}\right)$$

Note que entre o vetor $\vec{v}_{ap}$ e o vetor $\vec{v}_{queda}$ houve uma rotação de 90°+15°=105°. De forma que pela conservação do momento angular L, temos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow |\vec{L}| = mvr\sin\theta$$

$$L = mv_{ap}a\sin 90° = mv_{queda}R_e\sin 105° \rightarrow v_{queda} = \frac{a}{R_e\sin 105°}v_{ap} \rightarrow v_{queda}^2 = \left(\frac{a}{R_e\sin 105°}\right)^2 v_{ap}^2$$

Rearranjando e substituindo:

$$\left(\frac{a}{R_e\sin 105°}\right)^2 v_{ap}^2 = v_{ap}^2 + 2GM\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{a}\right)$$

$$v_{ap}^2\left[1 - \left(\frac{a}{R_e\sin 105°}\right)^2\right] = 2GM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_e}\right)$$

$$v_{ap} = \sqrt{\frac{2GM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_e}\right)}{1 - \left(\frac{a}{R_e\sin 105°}\right)^2}} \rightarrow v_{ap} = \sqrt{\frac{2GM(R_e - a)}{aR_e\left(1 - \frac{a^2}{R_e^2\sin^2 105°}\right)}}$$

Substituindo-se os valores:

$$v_{ap} = \sqrt{\frac{2(6{,}67 \times 10^{-11})(5{,}97 \times 10^{24})(6{,}37 \times 10^6 - 6{,}93 \times 10^6)}{(6{,}93 \times 10^6)(6{,}37 \times 10^6)\left(1 - \frac{(6{,}93 \times 10^6)^2}{(6{,}37 \times 10^6)^2(\sin^2 105°)}\right)}} \rightarrow v_{ap} \cong 6{,}13 \times 10^3\ m/s$$

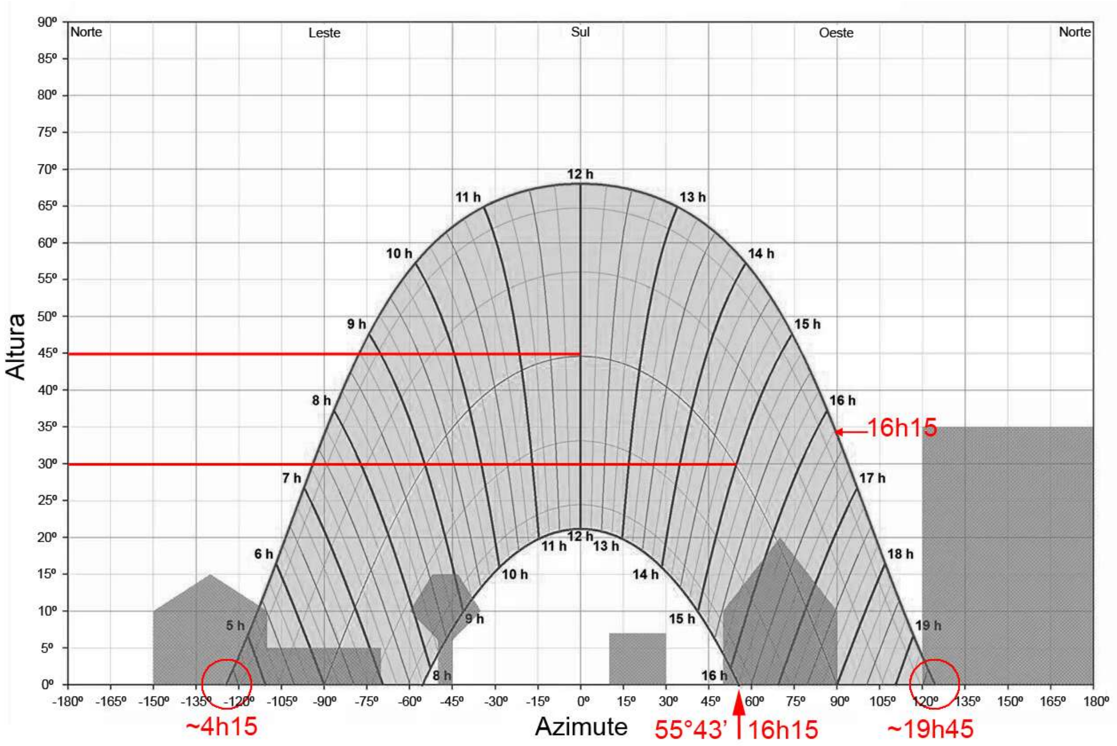
Então:

$$\Delta v = (7{,}59 \times 10^3\ m/s) - (6{,}13 \times 10^3\ m/s) \rightarrow \Delta v = 1{,}46 \times 10^3\ m/s = 1460\ m/s$$

O estudante não perderá pontos se o utilizar 75º para o ângulo entre o vetor $\vec{v}_{queda}$ e R, pois sen(75°) = sen(105°).

Questão 7	latitude	45° Norte ou +45°
	duração	15 horas e 30 minutos
	azimute e hora	$\cong 55{,}7143° \approx 55°43'$ e às 16h15
	comprimento da sombra	$2{,}94\ m$

Questão 7 - espaço para o cálculo



a) Vemos no gráfico que a passagem meridiana no dia do Equinócio acontece com o Sol a ~45° de altura. Neste dia o Sol está sobre o Equador Celeste. A distância zenital do Equador Celeste é equivalente à altura do Polo e o Sol cruza o meridiano ao Sul do zênite. Portanto o Polo elevado é o Norte. Então, a latitude da cidade será:

φ = 90° - 45° = 45° Norte ou +45°

(sem o sinal positivo ou a indicação do Norte o estudante perderá ponto)

b) No dia do Solstício de Verão o Sol nasce aproximadamente às 4h15 e se põe aproximadamente às 19h45, portanto o dia claro tem:

19h45 - 4h15 = 15 horas e 30 minutos de duração

c) De 45° até 60° temos ~ 0,7 cm

De 45° até o ponto do pôr do Sol temos ~ 0,5 cm

Portanto o azimute do pôr do Sol será:

$$45° + \frac{0{,}5\ cm \times 15°}{0{,}7\ cm} \cong 55{,}7143° \approx 55°43'$$

O pôr do Sol no dia do Solstício de Inverno acontece às 16h15

d) Às 15h no dia do Equinócio o Sol está a 30° de altura, portanto o comprimento da sombra será:

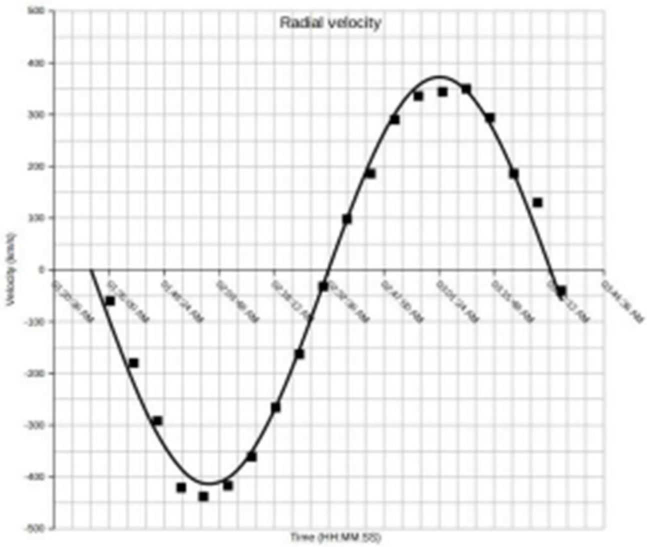
$$d = \frac{1{,}70\ m}{\tan 30°} \rightarrow d \cong 2{,}94\ m$$

Nome:

Questão 8		
	gráfico	(faça no papel milimetrado)
	período orbital	120 min
	massa da estrela	$1{,}04 \times 10^{30}\ kg \approx 0{,}52\ M_{Sol}$
	o gráfico é simétrico? sim ou não?	não
	explicação	(escreva no espaço abaixo)

Questão 8 - espaço para o cálculo e explicação

a) Pelo gráfico abaixo obtém-se o período orbital T_A = 120 min



b) Pelo gráfico acima obtém-se a semi amplitude da velocidade orbital: v_A = 393 km/s.

Igualando as forças centrípetas e gravitacionais temos:

$$\frac{m_A v_A^2}{r} = \frac{G M_B m_A}{r^2} \rightarrow M_B = \frac{v_A^2 \times r}{G}$$

Como $v_A = \frac{2\pi r}{T_A} \leftrightarrow r = \frac{v_A T_A}{2\pi}$

Então:

$$M_B = \frac{v_A^3 T_A}{2\pi G}$$

Substituindo-se os valores:

$$M_B = \frac{(393 \times 10^3)^3 \times 120 \times 60}{2\pi \times 6{,}67 \times 10^{-11}} \rightarrow M_B \cong 1{,}04 \times 10^{30}\ kg \approx 0{,}52\ M_{Sol}$$

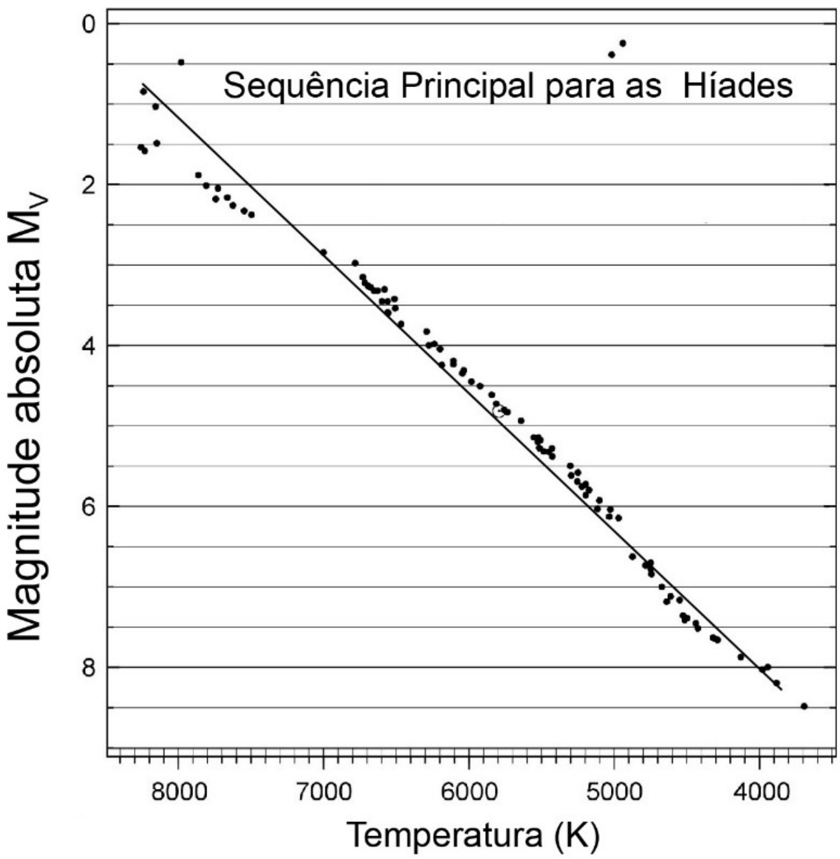
Com um erro de ± 3 min no período e ± 10 km/s na velocidade, então os valores aceitáveis para M_B serão: [0,93 ; 1,15] × 10^{30} kg

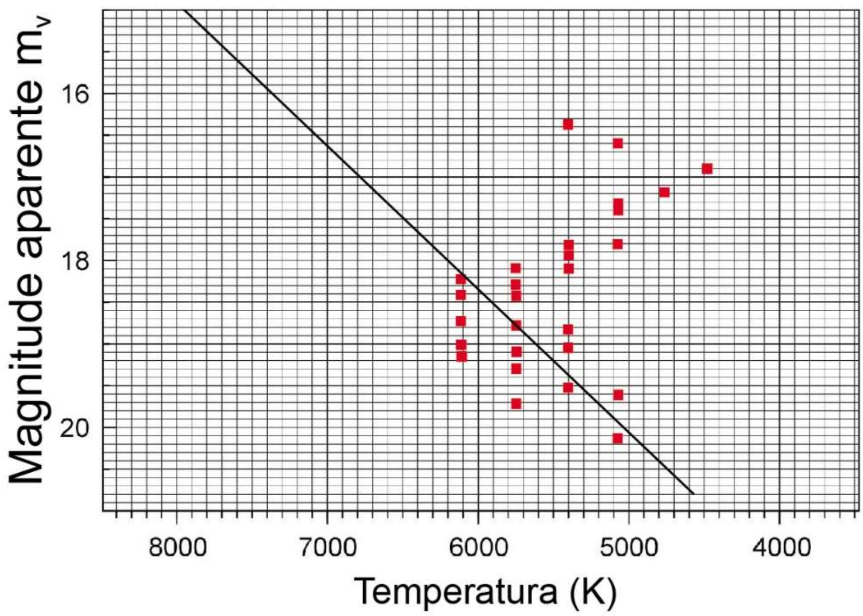
c) O gráfico não é simétrico pois o sistema como um todo está se movendo em nossa direção. Analisando o gráfico pode-se concluir que a velocidade de aproximação do sistema é ~ 21 km/s.

Nome:

<table>
<tr><td rowspan="6">Questão 9</td><td>módulo da distância</td><td>13,7 ≤ (m-M) ≤ 13,9</td></tr>
<tr><td>distância</td><td>$5{,}50\times10^3$ pc ≤ D ≤ $6{,}03\times10^3$ pc</td></tr>
<tr><td rowspan="3">distância corrigida e
Δ%</td><td>$4{,}04\times10^3$ pc ≤ D ≤ $4{,}43\times10^3$ pc</td></tr>
<tr><td>$-36{,}14\% \leq \Delta\% \leq -36{,}12\%$
$26{,}53\% \leq \Delta\% \leq 26{,}55\%$</td></tr>
<tr><td>N</td><td>$10^5\ estrelas$</td></tr>
</table>

Questão 9 - espaço para o cálculo

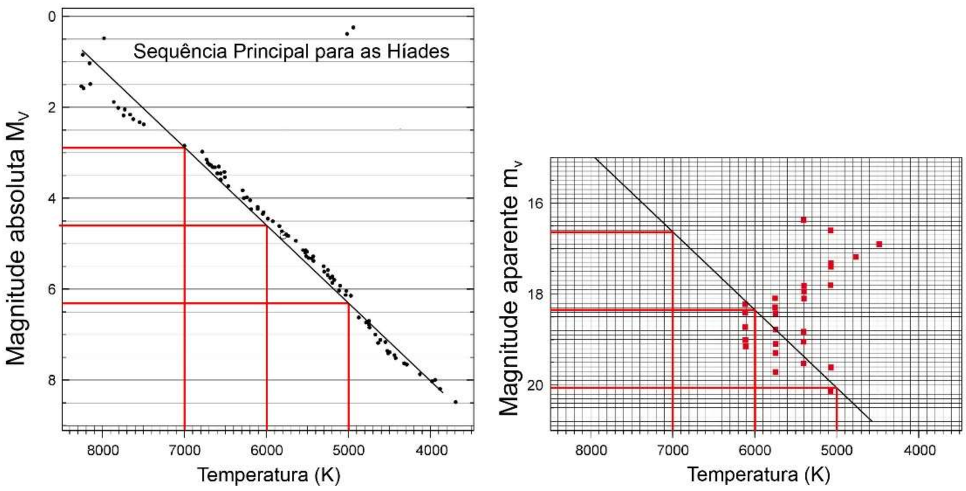




Nome:

a) O texto afirma que as sequências principais são paralelas para os dois aglomerados, de forma que, então, basta escolher duas ou três temperaturas e com uma régua medir as respectivas magnitudes e fazer uma média das diferenças.

Das médias das diferenças tiramos que o módulo da distância está entre 13,7 e 13,9



b)

$$m - M = 5\log D - 5 \leftrightarrow D = 10^{\left(\frac{m-M+5}{5}\right)}$$

Para n - m = 13,7 → D ≈ 5,50×10³ pc

Para n - M = 13,9 → D ≈ 6,03×10³ pc

c) Com o fator de correção o módulo da distância será m - M - A

$$D = 10^{\left(\frac{m-M-0{,}67+5}{5}\right)}$$

Para n - m = 13,7 → D ≈ 4,04×10³ pc

$$correção = \frac{4{,}04-5{,}50}{4{,}04} \cong -36{,}14\% \text{ ou } correção = \frac{5{,}50-4{,}04}{5{,}50} \cong 26{,}55\%$$

Para n - M = 13,9 → D ≈ 4,43×10³ pc

$$correção = \frac{4{,}43-6{,}03}{4{,}43} \cong -36{,}12\% \text{ ou } correção = \frac{6{,}03-4{,}43}{6{,}03} \cong 26{,}53\%$$

d)

$$M_{M12} - M_{Sol} = -2{,}5\log\left(\frac{L_{M12}}{L_{Sol}}\right) \leftrightarrow \frac{L_{M12}}{L_{Sol}} = 10^{\left(\frac{M_{M12}-M_{Sol}}{-2{,}5}\right)}$$

$$\frac{L_{M12}}{L_{Sol}} = \frac{N \times L_{Sol}}{L_{Sol}} \to N = 10^{\left(\frac{7{,}32+4{,}83}{2{,}5}\right)} \cong 7{,}24 \times 10^4 \approx 10^5\ estrelas$$

Questão 10	distância zenital	40° 15’ 12,5’’
	latitude	52° 54’ N
	altura	0,93 m = 93 cm

Questão 10 - espaço para o cálculo

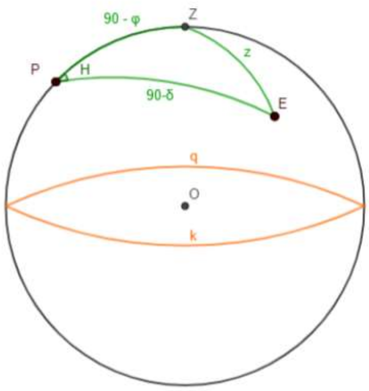
a) Inicialmente encontremos qual o valor da distância zenital de Algenib:
Altura da base da janela = $\frac{59,005}{39,37} = 1,5$ metros

$$tg(90 - z) = \frac{1,5}{1,27} \rightarrow (90 - z) = arctg\frac{1,5}{1,27} \rightarrow (90 - z) = 49^o44'47,5"$$

Portanto,

$$z = 40^o15'12,5" \quad (1)$$

b) Veja o triângulo esférico abaixo:



Aplicando a lei dos cossenos temos:

$$cos(z) = cos(90 - \delta)cos(90 - \phi) + sen(90 - \delta)cos(90 - \phi)cos =$$

$$= sen(\delta)sen(\phi) + cos(\delta)cos(\phi)cos(H) =$$

$$= sen(\delta)(\sqrt{1 - (cos(\phi))^2}) + cos(\delta)cos(\phi)cos(H)$$

$$(cos(z) - cos(\delta)cos(\phi)cos(H))^2 = sen^2(\delta) - sen^2(\delta)cos^2(\phi)$$

$$cos^2(z) - 2cos(z)cos(\delta)cos(\phi) + cos^2(\delta)cos^2(\phi)cos^2(H) - sen^2(\delta) + sen^2(\delta)cos^2(\phi) = 0$$

Organizando e resolvendo a equação do segundo grau em $cos^2(\phi)$ temos:

$$cos^2(\phi)(sen^2(\delta) + cos^2(\delta)cos^2(H)) - 2cos(z)cos(\delta)(cos(\phi)) + cos^2((z) - sen^2(\delta) = 0$$

$$cos(\phi) = \frac{2cos(z)cos(\delta) + / - \sqrt{4(cos^2(z)cos^2(\delta) - sen^2(\delta) + (cos^2(\delta)cos^2(H))(cos^2(z) - sen^2(\delta)))}}{2(sen^2(\delta) + cos^2(\delta)cos^2(h))}$$

Desse modo, obtemos doi spossíveis valores para a latitude : -20°46’0.4” e 52°54’00”. Como o problema diz que Eugênio se encontra no hemisfério Norte, a laitude será 52°42’.

Nome:

c)Aplicando Lei dos cossenos para encontrar z de Alpheratz:

$$cos(z) = cos(90-\delta)cos(90-\phi) + sen(90-\delta)sen(90-\phi)cos(H)$$

$$cos(z) = sen(\delta)sen(\phi) + cos(\delta)cos(\phi)cos(H)$$

$$cos(z) = sen(29^o12'24")sen(52^o54'0'")+cos(29^o12'24")cos(52^o54'00")cos(19^o16'15")$$

$$z = 27^o35'58"$$

Portanto 90-z = 62°24'2"

Calculando a altura da janelaem relação ao chão:

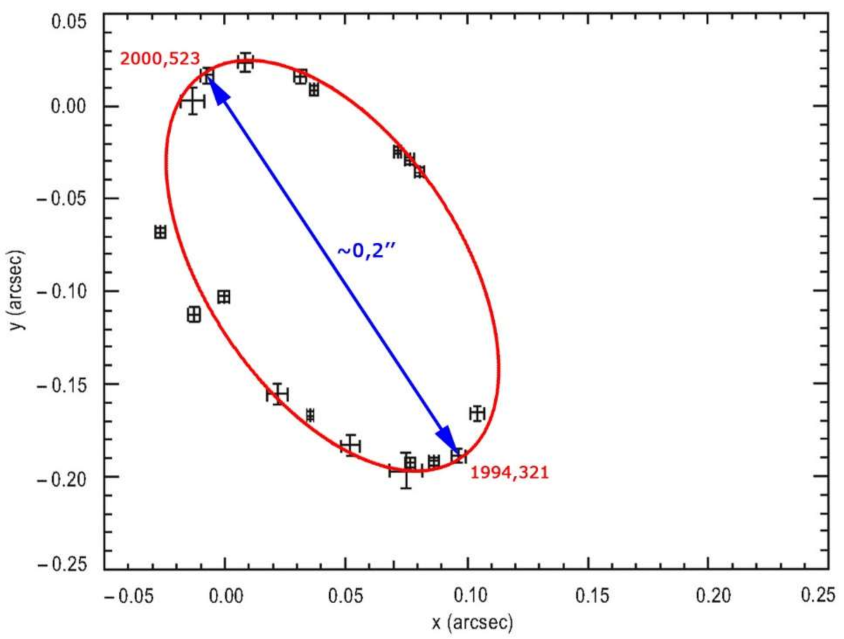
$$tg(62^o24'2") = \frac{x}{1,27} \rightarrow x = 2,43m$$

Portanto,a altura mínima que essa janela deverá ter sera de $2,43 - 1,5 = 0,93m$, ou seja, 93 cm.

Questão 11	gráfico	(na folha de resposta)
	desenho	(na folha de resposta)
	semi-eixo maior (“)	$\approx 0{,}1''$
	semi-eixo maior (dia-luz)	$4{,}1\ dias - luz$
	período orbital	$12{,}404\ anos$
	massa	$2{,}33 \times 10^6\ m_{Sol}$

Questão 11 - espaço para o cálculo

a) e b)



c) Com uma régua podemos estimar o valor do eixo maior da elipse medindo a distância dos pontos extremos e através de uma regra de três simples converter a medida em segundos de arco.

$$semi - eixo\ maior\ \boldsymbol{a} \approx 0{,}1''$$

d) Se 2’’ correspondem à 82 dias-luz, então 0,1’’ correspondem à:

$$\boldsymbol{a} = \frac{0{,}1 \times 82}{2} = 4{,}1\ dias - luz$$

e) A diferença de datas dos pontos extremos nos dá o semi-período orbital de S2:

$$\frac{P}{2} = 2000{,}523 - 1994{,}321 = 6{,}202\ anos \rightarrow P = 12{,}404\ anos$$

f) Desprezando a massa da estrela:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \leftrightarrow M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}$$

$a = 4{,}1 \times 24 \times 3600 \times 3 \times 10^8 \cong 1{,}063 \times 10^{14}\ m$

$P = 12{,}404 \times 365 \times 24 \times 3600 \cong 3{,}912 \times 10^8\ s$

Substituindo-se os valores:

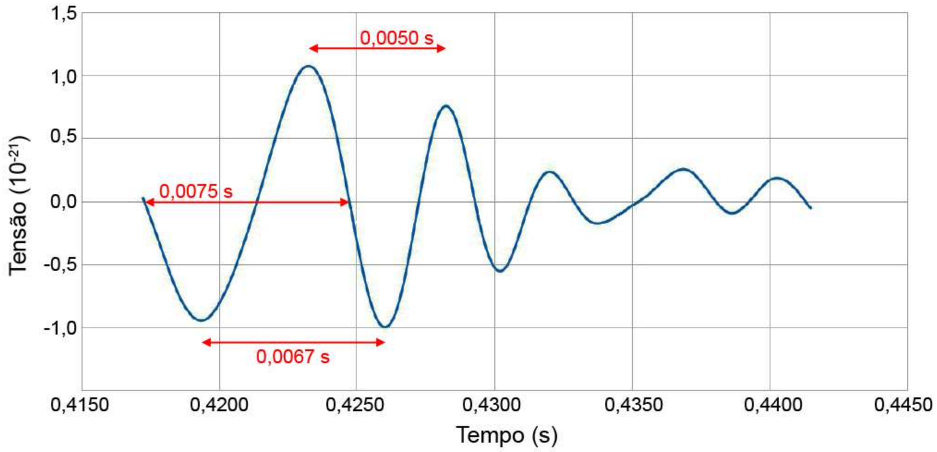
$$M = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11}}\frac{(1{,}063 \times 10^{14})^3}{(3{,}912 \times 10^8)^2} \rightarrow M \cong 4{,}65 \times 10^{36}\ kg$$

$$M = \frac{4{,}65 \times 10^{36}}{1{,}99 \times 10^{30}} \cong 2{,}33 \times 10^6\ m_{Sol}$$

Nome:

Questão 12	frequência	$200{,}0\ Hz \geq f_{og} = \frac{1}{T_{og}} \geq 133{,}3\ Hz$
	frequência angular	$418{,}9\ \frac{rad}{s} \leq \omega \leq 628{,}3 \frac{rad}{s}$
	massa	$22{,}46\ M_{Sol} \leq M \leq 42{,}99\ M_{Sol}$
	raio da órbita	$124\ km \leq r \leq 812\ km$
	comentário	(na folha de resposta)

Questão 12 - espaço para o cálculo e comentário



Os estudantes podem usar qualquer medida de comprimento de onda (crista-crista, cruzamento no ponto zero ou vale-vale) para determinar a resposta, mas tem que ser em torno da região de amplitude máxima.

a) O intervalo aceito de respostas para o período T_{og} das ondas gravitacionais é:

$$0{,}0050\ s \leq T_{og} \leq 0{,}0075\ s$$

Isso corresponde a uma faixa de frequência f_{og} de:

$$200{,}0\ Hz \geq f_{og} = \frac{1}{T_{og}} \geq 133{,}3\ Hz$$

b) Como o sistema binário é composto por dois buracos negros de massa igual, o sistema retorna a uma configuração idêntica após meia órbita. Portanto, a frequência orbital real ω é a metade da frequência das ondas gravitacionais. Então:

$$\omega = 2\pi f_{orbital} = \pi f_{og}$$

Assim o intervalo aceito de respostas para ω é:

$$(\pi 133{,}3\ Hz)\ 418{,}9\ \frac{rad}{s} \leq \omega \leq 628{,}3 \frac{rad}{s}\ (\pi 250{,}0\ Hz)$$

c) Rearrumando a equação, temos:

$$(f_{max})^{-\frac{8}{3}} = \left(\frac{8\pi}{5}\right)^{\frac{8}{3}} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{\frac{5}{3}} \left(t_{fusão} - t_{max}\right)$$

$$\left(\frac{GM}{c^3}\right)^5 = \left(\frac{5}{8\pi f_{max}}\right)^8 \left(t_{fusão} - t_{max}\right)^{-3}$$

$$M = \left(\frac{5}{8\pi f_{max}}\right)^{\frac{8}{5}} \left(t_{fusão} - t_{max}\right)^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{c^3}{G}\right)$$

Do gráfico, tiramos por regra de três simples, o instante de amplitude máxima t_{max}:

$$t_{max} = 0{,}4200\ s + 0{,}005\ s \times \frac{1{,}63\ cm}{2{,}51\ cm} \rightarrow t_{max} \cong 0{,}4232\ s$$

Substituindo-se os valores,

Para f_{og} = 133,3 Hz:

$$M = \left[\frac{5}{8\pi(133{,}3)}\right]^{\frac{8}{5}} (0{,}4620 - 0{,}4232)^{-\frac{3}{5}} \left[\frac{(3{,}00 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}}\right]$$

$$M \cong 8{,}55 \times 10^{31}\ kg \rightarrow M = \frac{8{,}55 \times 10^{31}}{1{,}99 \times 10^{30}} \rightarrow M \cong 42{,}99\ M_{Sol}\ \approx 43\ M_{Sol}$$

Para f_{og} = 200,0 Hz:

$$M = \left[\frac{5}{8\pi(200{,}0)}\right]^{\frac{8}{5}} (0{,}4620 - 0{,}4232)^{-\frac{3}{5}} \left[\frac{(3{,}00 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}}\right]$$

$$M \cong 4{,}47 \times 10^{31}\ kg \rightarrow M = \frac{4{,}47 \times 10^{31}}{1{,}99 \times 10^{30}} \rightarrow M \cong 22{,}46\ M_{Sol}\ \approx 22\ M_{Sol}$$

Assim o intervalo aceito de respostas para *M* é:

$$22{,}46\ M_{Sol} \leq M \leq 42{,}99\ M_{Sol}$$

d) A força gravitacional entre os buracos negros fornece a força centrípeta para seu movimento orbital mútuo (no referencial do baricentro), assim:

$$M\omega^2 r = \frac{GM^2}{(2r)^2} \rightarrow r = \left(\frac{GM}{4\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Para M = $8{,}55\times10^{31}$ kg e ω = 418,9 rad/s:

$$r = \left[\frac{(6{,}67 \times 10^{-11})(8{,}55 \times 10^{31})}{4(418{,}9)^2}\right]^{\frac{1}{3}} \rightarrow r \cong 8{,}12 \times 10^5\ m = 812\ km$$

Para M = $4{,}47\times10^{31}$ kg e ω = 628,3 rad/s:

$$r = \left[\frac{(6{,}67 \times 10^{-11})(4{,}47 \times 10^{31})}{4(628{,}3)^2}\right]^{\frac{1}{3}} \rightarrow r \cong 1{,}24 \times 10^5\ m = 124\ km$$

Assim o intervalo aceito de respostas para *r* é:

$$124\ km \leq r \leq 812\ km$$

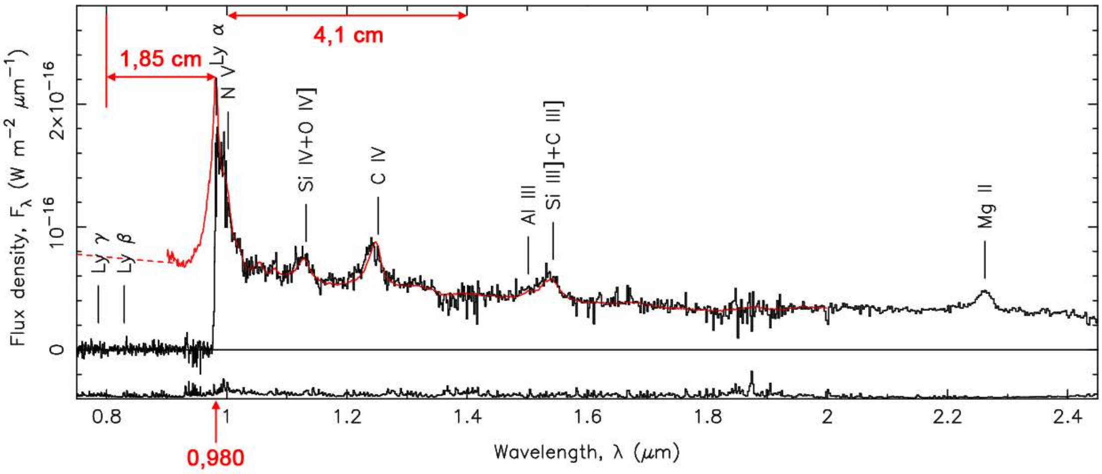
e) Anã brancas têm diâmetros da ordem da do diâmetro da Terra (12740 km), muito maior que o raio orbital que acaba de ser calculado. Então, não é possível ser este um sistema binário de anãs brancas.

Embora uma estrela de nêutrons tenha o diâmetro da ordem de dezenas de km, o limite de massa para uma estrela de nêutrons é de, no máximo, 3 massas solares, bem menor do que a massa calculada (entre 16 e 22 massas solares). Então, não é possível ser este um sistema binário de estrelas de nêutrons

Isso sugere que o sistema é, muito provavelmente, um sistema binário de buracos negros.

Questão 13		
	redshift	7,06
	magnitude aparente	19,6 (d_L) ou 15,1 (d_C)
	idade	$7{,}63 \times 10^4\ anos$
	demonstração	(na folha de resposta)
	fator de escala	0,61

Questão 13 - espaço para o cálculo e demonstração



Medindo com uma régua o gráfico maior no caderno de respostas, temos que Δ0,4 μm corresponde a 4,1 cm, e que a distância da linha Lyman-α até 0,8 μm vale ~1,85 cm. Então a linha Lyman-α medida corresponde a:

$$\lambda_{Ly\alpha} = 0{,}8 + \frac{0{,}4 \times 1{,}85}{4{,}1} \cong 0{,}980\ \mu m \equiv 9800\ \text{Å}$$

O comprimento de onda das linhas espectrais é deslocado para o vermelho por um fator de (1 + z), isto é:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_0} = 1 + z \rightarrow z = \frac{9800}{1216} - 1 \rightarrow z \cong 7{,}06$$

b) Definindo *v* = *c* na Lei de Hubble–Lemaître, o raio o Hubble será:

$$v = H_0 D \rightarrow c = H_0 d_H \rightarrow d_H = \frac{3{,}00 \times 10^8\ m\ s^{-1}}{67{,}8 \times 10^3\ m\ s^{-1}\ Mpc^{-1}} \rightarrow d_H \cong 4425\ Mpc$$

Como $d_C = d_H \times \chi$

d_C = 4425 Mpc × 2 → d_C = 8850 Mpc

$d_C = 8850\ Mpc = 8850 \times 10^6 \times 206265 \times 149{,}6 \times 10^9 \cong 2{,}73 \times 10^{26}\ m$

Devido à expansão cosmológica, o comprimento de onda da luz recebida é aumentado e o fluxo de fótons é reduzido, cada qual introduz um fator (1 + z). Conseqüentemente,

$$F = \frac{L_{bol}}{4\pi d_c^2 (1+z)^2} = \frac{6{,}3 \times 10^{13}\ L_{Sol}}{4\pi d_L^2}$$

Assim, comparando as magnitudes aparentes do Sol e do quasar pela Equação de Pogson:

$$m_{quasar} - m_{Sol} = -2{,}5 \log \frac{F_{quasar}}{F_{Sol}} = \frac{\dfrac{6{,}3 \times 10^{13}\, L_{Sol}}{4\pi d_L^2}}{\dfrac{L_{Sol}}{4\pi d_{Sol}^2}}$$

$$m_{quasar} = m_{Sol} - 2{,}5 \log \frac{(6{,}3 \times 10^{13}) d_{Sol}^2}{d_L^2}$$

$d_L = d_C(1+z) = 8850\ Mpc \times 8{,}06 = 71331\ Mpc$

$d_L = 71331\ Mpc = 71331 \times 10^6 \times 206265 \times 149{,}6 \times 10^9 \cong 2{,}19 \times 10^{27}\ m$

Substituindo-se os valores:

$$m_{quasar} = -26{,}7 - 2{,}5 \log \frac{(6{,}3 \times 10^{13})(149{,}6 \times 10^9)^2}{(2{,}19 \times 10^{27})^2} \rightarrow m_{quasar} \cong 19{,}6$$

Se o estudante usar d_C ao invés de d_L:

$$m_{quasar} = -26{,}7 - 2{,}5 \log \frac{(6{,}3 \times 10^{13})(149{,}6 \times 10^9)^2}{(2{,}73 \times 10^{26})^2} \rightarrow m_{quasar} \cong 15{,}1$$

c) O tempo de Hubble para o modelo de expansão linear do Universo é

$$t_H \approx \frac{1}{H_0} = \frac{1}{67{,}80\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}} = \frac{3{,}08 \times 10^{16} \times 10^6\ m}{68{,}80 \times 10^3\ m\ s^{-1}} \rightarrow t_H \cong 4{,}48 \times 10^{17}\ s \approx 14{,}2 \times 10^9\ anos$$

Portanto, a idade do Universo na equivalência matéria-energia escura é

$$t_{m-\Lambda} = (14{,}2 - 4{,}05) \times 10^9\ anos = 10{,}15 \times 10^9\ anos$$

Como o Universo é plano, e o parâmetro de densidade atual de radiação $\Omega_{r,0}$ é desprezível, temos

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{total,0} = 1 \rightarrow 0{,}31 + \Omega_{\Lambda,0} = 1 \rightarrow \Omega_{\Lambda,0} \cong 0{,}69$$

Na equivalência matéria-energia escura, $\Omega_\Lambda = \Omega_m$

$$\Rightarrow \Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{m,0} a^{-3} \rightarrow a_{m-\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{0{,}31}{0{,}69}\right)^{1/3} \rightarrow a_{m-\Lambda} \cong 0{,}766$$

Na equivalência radiação-matéria, $\Omega_r = \Omega_m$

$$\Omega_{r,0} a^{-4} = \Omega_{m,0} a^{-3} \rightarrow a_{r-m} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{9{,}1 \times 10^{-5}}{0{,}31} \cong 2{,}94 \times 10^{-4}$$

o que corresponde a um *redshift* **z ~ 3400**. Entre as equivalências matéria-energia escura e radiação-matéria, o Universo foi dominado pela matéria, portanto $a(t) \propto t^{2/3}$:

$$\frac{a_{r-m}}{a_{m-\Lambda}} = \left(\frac{t_{r-m}}{t_{m-\Lambda}}\right)^{2/3}$$

Rearranjando os termos temos:

$$t_{r-m} = \left(\frac{a_{r-m}}{a_{m-\Lambda}}\right)^{3/2} t_{m-\Lambda} = \left(\frac{2{,}94 \times 10^{-4}}{0{,}766}\right)^{3/2} (10{,}15 \times 10^9) \rightarrow t_{r-m} \cong 7{,}63 \times 10^4\ anos$$

d) Por definição, $a_0 = 1$, então

$$H^2 = H_0^2\left[\frac{\rho}{\rho_{c,0}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}}\right)\right]$$

Escrevendo o parâmetro de densidade Ω_X como $\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_{c,0}}$ onde X= m, r, Λ temos

$$H^2 = H_0^2\left[\Omega + \frac{1}{a^2}(1 - \Omega_0)\right]$$

onde o índice 0 indica o valor atual do parâmetro de densidade.

Como a densidade total do Universo ρ é igual à soma das densidades dos três componentes, temos

$$\Omega_X = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$$

$$\Omega_{X,0} = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$$

E, portanto,

$$H^2 = H_0^2\left(\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \frac{1}{a^2}(1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})\right)$$

Entretanto as densidades de cada componente mudam com o tempo, portanto os parâmetros de densidade variam como:

$\Omega_m = \Omega_{m,0}\, a^{-3}$

$\Omega_r = \Omega_{r,0}\, a^{-4}$ (o fator extra a^{-1} é devido ao *redshift*)

$\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda,0}$ (a densidade da energia escura permanece constante)

Substituindo na equação de curvatura espacial, sendo $\Omega_{total,0} = 1$ (universo plano com curvatura nula) temos:

$$\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$$

aplicando na equação de Friedmann

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2})$$

Pela definição do parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$\therefore\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2})$$

multiplicando por a^2 e tirando a raiz temos finalmente

$$\dot{a} = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}a^{-2} + \Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{k,0} + \Omega_{\Lambda,0}a^2}$$

e) Quando ä = 0, o Universo passa de uma expansão desacelerada (ä < 0) para acelerada (ä > 0)

$$2\Omega_{r,0}a^{-3} + \Omega_{m,0}a^{-2} - 2\Omega_{\Lambda,0}a = 0$$

Como $\Omega_{r,0}$ é desprezível (~10^{-5}), podemos escrever a relação acima como

$$\Omega_{m,0}a^{-2} - 2\Omega_{\Lambda,0}a = 0$$

$$\Omega_{m,0}a^{-2} = 2\Omega_{\Lambda,0}a$$

$$a^3 = \frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}}$$

Usando as densidades de matéria e energia escura dadas na tabela de constantes, $\Omega_{m,0}$ ~ 0.31 e $\Omega_{\Lambda,0}$ ~ 0.69, temos:

$$a = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{2(1-\Omega_{m,0})}\right)^{1/3} \rightarrow a \cong 0{,}61$$

Nome: