OBM 2017 Nível 3 Problema 4

Por Bruno Feltran

Problema 4. Vemos, nas figuras 1 e 2 a seguir, exemplos de bloqueio de tela de um telefone celular que só funciona com uma senha que não é digitada, mas desenhada com segmentos de reta. Esses segmentos formam uma linha poligonal com vértices em um reticulado. Ao desenhar o padrão correspondente à senha, o dedo deve permanecer todo o tempo tocando a tela. Toda a linha poligonal corresponde a uma sequência de algarismos e essa sequência é que é, de fato, a senha. O traçado das poligonais obedece às regras a seguir:

i. O traçado começa por um dos pontos destacados, os quais correspondem aos algarismos de 1 a 9 (figura 3).

ii. Cada segmento do padrão deve ter como um dos seus extremos (aquele em que terminamos de traçar o segmento) um ponto que ainda não foi usado.

iii. Se um segmento liga dois pontos e contém um terceiro (o seu ponto médio), então o algarismo correspondente a esse terceiro ponto é incluído na senha. Isso não acontece quando esse ponto/algarismo já foi usado.

iv. Toda senha tem pelo menos quatro algarismos.

figura 1

figura 2

figura 3

Assim, toda linha poligonal é associada a uma sequência de quatro ou mais algarismos, os quais aparecem na senha na mesma ordem em que são visitados. Na figura 1 acima, por exemplo, a senha é 218369, caso o primeiro ponto visitado tenha sido o 2. Note que o segmento ligando os pontos associados aos algarismos 3 e 9 inclui o ponto associado ao algarismo 6. Se o primeiro ponto visitado fosse o 9, então a senha seria 963812. Se o primeiro ponto visitado fosse o 6, então a senha seria 693812. Note que o 6 seria pulado, já que não poderia repetir. Por outro lado, a linha poligonal da figura 2 é associada a uma única senha. Determine o menor n ($n \geq 4$) tal que dado qualquer subconjunto de n algarismos de 1 a 9 é possível elaborar uma senha que envolva exatamente esses algarismos em alguma ordem.

Solução. A resposta é $n = 6$. Para provar que $n > 5$, note que $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ não forma uma senha, uma vez que cada uma das pontas só pode se ligar com seu oposto ou com o 5 central.
Agora basta provar que cada conjunto de 6 algarismos forma uma senha. Para isso, vamos dividir em casos. Para cada conjunto, vamos analisar quantos dígitos há em cada linha, notando a simetria entre as linhas de baixo e de cima.

- **Caso 1:** *3 pontos na linha de cima e 3 na do meio.*

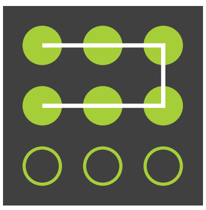

Figura 1: Um único subcaso

◦ **Caso 2:** 3 *pontos na linha de cima e* 3 *na de baixo.*

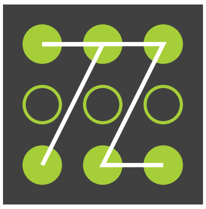

Figura 2: Um único subcaso

◦ **Caso 3:** 3 *pontos na linha de cima,* 2 *na do meio e* 1 *na de baixo.*

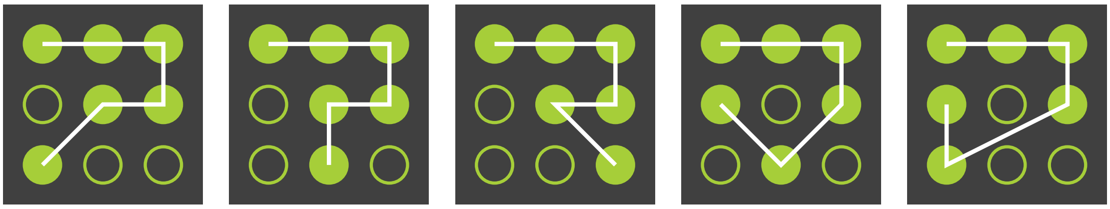

Figura 3: Cinco subcasos

◦ **Caso 4:** 3 *pontos na linha de cima,* 1 *na do meio e* 2 *na de baixo.*

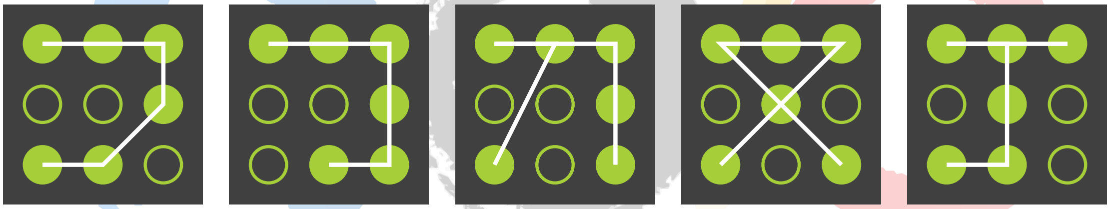

Figura 4: Cinco subcasos

◦ **Caso 5:** 2 *pontos na linha de cima,* 3 *na do meio e* 1 *na de baixo.*

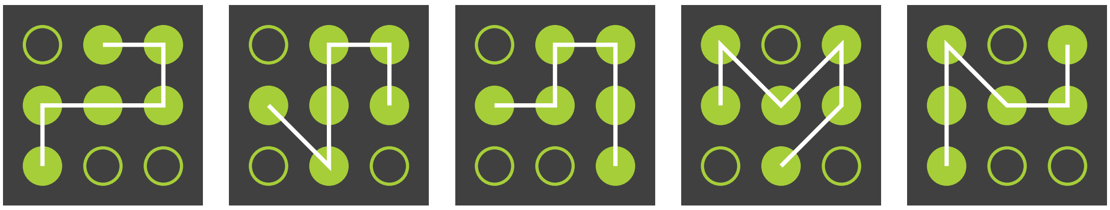

Figura 5: Cinco subcasos

◦ **Caso 6:** 2 *pontos na linha de cima,* 2 *na do meio e* 2 *na de baixo.*

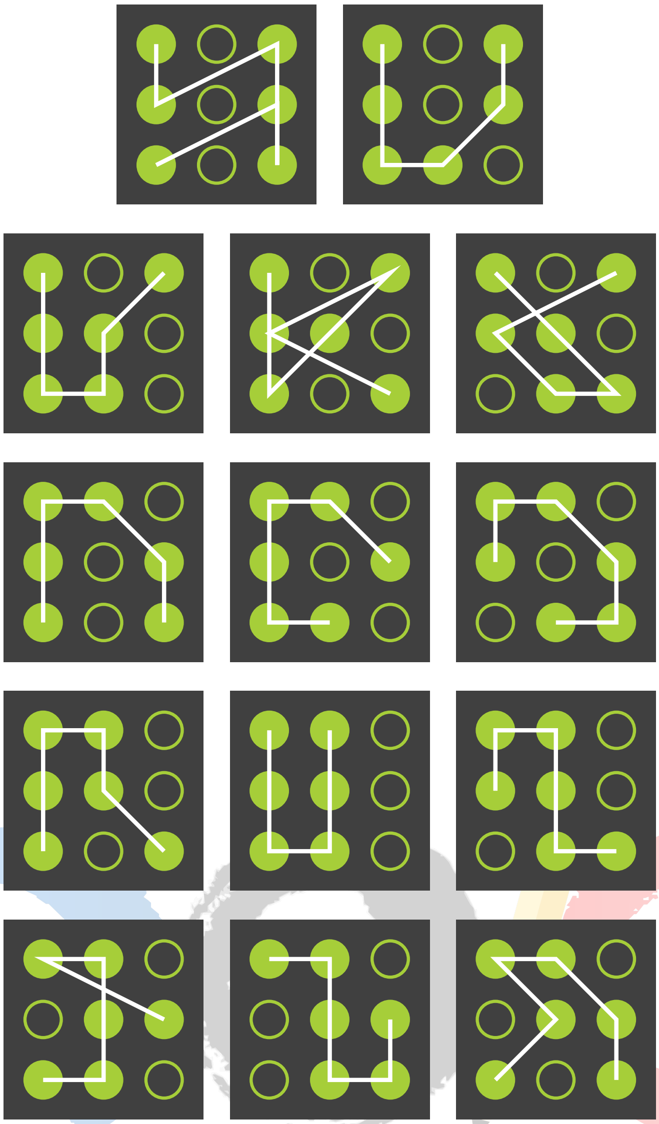

Figura 6: Catorze subcasos