Soluções da OBM Nível 1

Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Uma *potência de* 2 é um número da forma 2^k em que k é um inteiro não negativo. Por exemplo, as três menores potências de 2 são $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$. Um número é chamado *especial* quando a soma dos seus algarismos é uma potência de 2. Por exemplo, 2024 é especial, pois $2+0+2+4 = 8 = 2^3$. Dizemos que um número *supera* outro quando o primeiro é maior que o segundo e a soma dos algarismos do primeiro é maior que a soma dos algarismos do segundo. Por exemplo, 2029 supera 2024, pois $2029 > 2024$ e $2+0+2+9 > 2+0+2+4$.

a) Qual é o menor inteiro positivo que é especial e supera 2024?

b) Qual é o menor inteiro positivo que é especial e supera a resposta correta do item anterior?

Solução.

a) 2059 é especial pois $2+0+5+9 = 16 = 2^4$ e supera 2024 pois $2059 > 2024$ e $16 > 2+0+2+4 = 8$. Vamos provar que esse é o menor número especial que supera 2024.

Obviamente, qualquer número com uma quantidade maior de algarismos será maior que 2059.

A maior soma dos algarismos que um número de 4 dígitos pode ter é $9+9+9+9 = 36$.

Logo, como $32 = 2^6$ é a maior potência de 2 menor que 36 ($2^6 = 64$), um número de 4 algarismos que é especial e supera 2024 deve ter soma dos algarismos 16 ou 32.

Se esse número tivesse soma dos algarismos 32, seu primeiro algarismo seria pelo menos 5, senão a soma dos seus algarismos seria no máximo $4+9+9+9 = 31$. Mas então esse número é pelo menos 5000, e portanto é maior que 2059.

Logo o menor número especial que supera 2024 deve ter soma dos algarismos 16.

Se seu primeiro algarismo fosse 3 ou maior, então ele seria pelo menos $3000 > 2059$. Analogamente vemos que se seu segundo algarismo fosse 1 ou maior ele seria maior que 2059, e se seu terceiro algarismo fosse 6 ou maior ele também seria maior que 2059. Logo os dois primeiros algarismos desse número são 2 e 0, enquanto o terceiro é no máximo 5. Logo a soma dos três primeiros algarismos é no máximo 7, forçando o último algarismo a ser $16-7 = 9$, e consequentemente forçando o terceiro algaristo a ser de fato 5.

Portanto o menor número especial que supera 2024 é 2059, como queríamos.

b) Pelo raciocínio do item anterior, um número que supera 2059 e é especial deve ter soma dos algarismos 32 (pois a soma dos algarismos de 2059 é 16 e a próxima potência de 2 é 64 que é maior que $9+9+9+9 = 36$, e como veremos há um exemplo com 4 algarismos).

Como mencionado no item anterior, o primeiro algarismo de um número de 4 dígitos cuja soma dos algarismos é 32 é pelo menos 5.

Note que 5999 supera 2059 pois $5999 > 2059$ e $5+9+9+9 = 32 > 16$.

Obviamente, qualquer número com uma quantidade maior de algarismos será maior que 5999.

Qualquer outro número especial que supere 2059 será maior que 5999 pois seu primeiro algarismo será pelo menos 6 (e consequentemente o número será pelo menos $6000 > 5999$).

Portanto 5999 é o menor número especial que supera 2059, que é a resposta do item anterior.

□

Problema 2 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Nesse problema usaremos algumas peças do jogo de xadrez.

- O *cavalo* (C) é uma peça que ataca quadrados que estão a um movimento em L da sua casa atual. Esse movimento percorre dois quadrados numa direção e um quadrado na direção perpendicular. Uma propriedade importante é que o cavalo consegue pular peças, ou seja, ele pode atacar uma casa mesmo que existam peças no caminho. Veja a primeira figura abaixo em que temos um cavalo no canto inferior esquerdo que ataca 2 quadradinhos (•).

- A *torre* (T) é uma peça que ataca todos os quadradinhos que estão na mesma linha ou na mesma coluna. Diferentemente do cavalo, a torre não pode pular peças. Na segunda figura a seguir, temos uma torre atacando 4 quadradinhos (•).

	•	
		•
C		

•		
•		
T	•	•

Ao colocar algumas peças de xadrez num tabuleiro 3×3, dizemos que essa configuração é *completa* quando cada um dos 9 quadradinhos está ocupado por exatamente uma peça ou está sendo atacado por pelo menos uma das peças. Não é permitido colocar mais de uma peça em um mesmo quadradinho.

No primeiro exemplo a seguir, temos uma configuração completa com 3 torres. No segundo, uma configuração que não é completa usando 3 torres.

T	•	•
T	•	•
T	•	•

T	•	•
T	T	•
•	•	

a) Qual é o número mínimo de cavalos necessários para fazer uma configuração completa em um tabuleiro 3×3 apenas com cavalos? Lembre-se de mostrar um exemplo com esse número mínimo de cavalos e demonstrar que não existe configuração completa com menos cavalos.

b) Quantas configurações completas diferentes existem em um tabuleiro 3×3 usando apenas uma torre e dois cavalos? Configurações obtidas com rotações ou reflexões devem ser consideradas diferentes. Por exemplo, as quatro configurações a seguir são consideradas todas distintas.

	C	
T		
	C	

	T	
C		C

	C	
		T
	C	

C		C
	T	

Solução.

a) É fácil ver não há nenhuma casa em que um cavalo possa ser colocado de modo a atacar o centro, logo deve haver um cavalo no centro. Note também que este cavalo não ataca nenhuma casa.

Mas no tabuleiro 3×3, um cavalo ataca no máximo duas casas, assim para ocupar e/ou atacar as outras 8 casas serão necessários ao menos outros 3 cavalos (2 não bastam pois estaria ocupando e/ou atacando no máximo $(1 + 2) \cdot 2 = 6$ casas).

Logo são necessários ao menos 4 cavalos. Abaixo vemos um exemplo de configuração completa com 4 cavalos.

•	•	•
C	C	•
C	C	•

b) É fácil ver que uma torre ocupa e/ou ameaça até 5 casas.

Assim, caso um cavalo ficasse na casa do meio, a torre não poderia atacá-la, pois senão a quantidade total de casas ocupadas/ameaçadas seria menor que $1 + 5 + 3 = 9$ (uma vez que o segundo cavalo ocupa/ameaça até 3 casas) por conta de uma mesma casa ser ameaçada/ocupada por mais de uma peça.

T	•	•
•	C	
•		

Mas então, restam exatamente 3 casas para o segundo cavalo ocupar/vigiar, e entre elas há casas adjacentes. Portanto este caso não é possível (uma vez que um cavalo não pode atacar uma casa adjacente á sua), isto é, não pode haver um cavalo na casa do meio.

Como não há nenhuma casa em que um cavalo possa ser colocado de modo a ameaçar a casa do meio, a torre deve ocupá-la ou ameaçá-la.

Vamos primeiro analisar o caso em que a torre ocupa a casa central.

Nesse caso, um cavalo posicionado em uma casa branca aumentaria a quantidade de casas atacadas/ocupadas em somente 1, pois apenas iria atacar casas cinzas, que já estão todas sendo atacadas pela torre. Isso não é possível caso o segundo cavalo fosse também posicionado em uma casa branca seriam atacadas/ocupadas no máximo $5 + 1 + 1 = 7$ casas, e caso ele fosse posicionado sobre uma casa cinza, que já é atacada pela torre, seriam atacadas/ocupadas no máximo $5+1+2 = 8$ casas.

Logo o primeiro cavalo deve ser posicionado sobre uma casa cinza. Há 4 maneiras disso acontecer. Mas após isso, a posição do segundo cavalo já estará determinada, pois irão haver duas casas brancas na linha/coluna que contém a casa do primeiro cavalo e não contém o centro, e é fácil ver que a única casa em que o outro cavalo pode ser posicionado para atacar essas duas (já que pelo parágrafo acima não pode ocupar) é a casa oposta a posição do primeiro cavalo.

	•	•
C	T	•
	•	•

Logo há 4 configurações nesse caso.

Vamos agora considerar o caso em que a torre ataca a casa central, e consequentemente deve estar em uma casa cinza.

Como há 4 casas cinza, há 4 possíveis posições para a torre.

É fácil ver que após posicionarmos a torre restarão duas casas brancas e duas cinza que ainda não estão sendo ocupadas/atacadas.

•		
T	•	•
•		

Como um cavalo ocupa uma casa de uma cor e ataca até duas casas de outra cor, percebemos que a maior quantidade de casas adicionais que um cavalo pode atacar/ocupar é 2, uma vez que as duas casas brancas não podem ser atacas por um mesmo cavalo pois estão na mesma linha/coluna, que é oposta aquela que a torre ocupa, e o mesmo pode ser dito sobre as cinzas.

Logo, nenhum cavalo pode estar em uma casa já atacada pela torre, pois senão no máximo $5 + 1 + 2 = 8$ casas seriam atacadas/ocupadas.

É fácil ver agora que qualquer maneira de colocar os cavalos nas 4 casas restantes resulta nas 9 casas sendo atacadas/ocupadas, com exceção de quando um cavalo ataca o outro.

Assim, há $4 \cdot (4 - 1 - 1) = 8$ possibilidades para colocar os dois cavalos de maneira ordenada. Como a ordem não importa, há $\frac{8}{2} = 4$ maneiras de se colocar os dois cavalos.

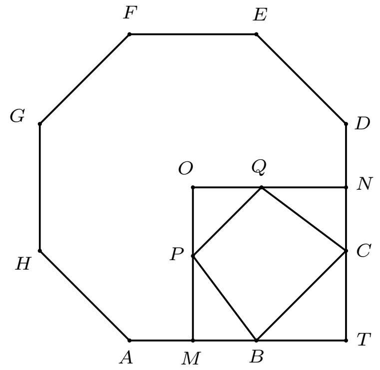
Pelo princípio multiplicativo há portanto $4 \cdot 4 = 16$ configurações nesse caso.

Há então no total $4 + 16 = 20$ configurações completas com uma torre e dois cavalos. $\square$

Problema 3 - Escrito por Tiago Trindade

Problema.

Na figura a seguir, $ABCDEFGH$ é um octógono regular de lado 6 cm e centro O. Os pontos M e N são os pontos médios de AB e CD, respectivamente. O ponto T é a interseção das retas AB e CD. Deste modo, $OMTN$ é um quadrado. Além disso, os comprimentos de BP e CQ são iguais a 5 cm. Sabe-se que um octógono regular tem ângulos internos de medida 135° e lados todos de mesma medida.

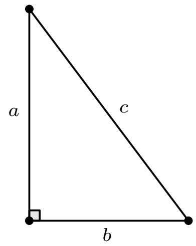


a) Determine a medida do segmento MP.

b) Determine o quadrado da medida do segmento BT, ou seja, BT^2.

c) Determine o quadrado da medida do segmento PQ, ou seja, PQ^2.

Nesse problema, você pode querer utilizar o Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo com lados a e b formando ângulo de 90° (catetos) e lado c oposto ao ângulo de 90° (hipotenusa), vale a relação $a^2 + b^2 = c^2$.



Solução.

a) Como $OMTN$ é um quadrado, o ângulo $\angle PMB$ é retângulo, e consequentemente $\triangle PMB$ é um triângulo retângulo em M.

Como M é ponto médio temos que $MB = \frac{AB}{2} = 3$ cm.

Deste modo, pelo Teorema de Pitágoras temos que $MB^2 + MP^2 = PB^2$. Substituindo os valores isso nos da que $3^2 + MP^2 = 5^2$, logo $MP^2 = 16$ e temos que $MP = 4$ cm.

b) Como $OMTN$ é um quadrado e MB e CN são ambos iguais a 3 (pois são pontos médios de lados do octógono regular de lado 6), BT e TC tem medidas iguais.

De modo análogo ao item anterior temos que $BT^2 + TC^2 = BC^2$, mas então $2BT^2 = 6^2$ e temos que $BT^2 = 18$ cm^2.

c) Note que $OP = OM - MP$.

Mas pelo item b) temos que $MT = MB + BT = 3 + \sqrt{18}$, e como $OMTN$ é um quadrado também temos que $OM = 3 + \sqrt{18}$.

Pelo item a), $MP = 4$.

Substituindo esses valores:

$$\begin{aligned} OP^2 &= (OM - MP)^2 \\ &= (\sqrt{18} - 1)^2 \\ &= 18 - 2\sqrt{18} + 1 \\ &= 19 - 6\sqrt{2} \quad \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Agora, como $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = 2OP^2$, temos $PQ^2 = 38 - 12\sqrt{2} \quad \text{cm}^2$. □

Problema 4 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Considere uma sequência cujo primeiro termo é um inteiro positivo dado $N > 1$. Considere a fatoração de N em primos. Se N é uma potência de 2, a sequência é formada por um único termo: N. Caso contrário, o segundo termo da sequência é obtido trocando o maior fator primo p de N por $p+1$ na fatoração em primos. Se o novo número não é uma potência de 2, repetimos o mesmo procedimento com ele, lembrando de fatorá-lo novamente em primos. Caso contrário, a sequência numérica termina. E assim sucessivamente.

Por exemplo, se o primeiro termo da sequência é $N = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, como o seu maior fator primo é $p = 5$, o segundo termo é $2^2 \cdot 3 \cdot (5+1)^2 = 2^4 \cdot 3^3$. Repetindo o procedimento, o maior fator primo do segundo termo é $p = 3$ e então o terceiro termo é $2^4 \cdot (3+1)^3 = 2^{10}$. Como obtivemos uma potência de 2, a sequência tem 3 termos: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^3$ e 2^{10}.

a) Quantos termos tem a sequência cujo primeiro termo é $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$?

b) Mostre que se um fator primo p deixa resto 1 na divisão por 3, então $\frac{p+1}{2}$ é um número inteiro que também deixa resto 1 na divisão por 3.

c) Apresente um termo inicial N menor do que 1.000.000 (um milhão) tal que a sequência iniciada por N tem exatamente 11 termos.

Solução.

a) Note que a quantidade de termos na sequência não depende do número inicial em si, mas somente de seus fatores primos, uma vez que em nenhum momento nos importamos com a potência de cada primo da fatoração de um termo da sequência.

Podemos então representar os termos da sequência como o conjunto do seus divisores primos. Assim, o primeiro termo será $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Quando um termo for uma potência de 2, o conjunto que o representa será $\{2\}$.

Mas note que ao trocar o maior primo $p \neq 2$ desse conjunto por pelos divisores primos de $p+1$ não estaremos adicionando nenhum divisor primo, uma vez que $p+1$ é par e consequentemente seu maior divisor primo é no máximo $\frac{p+1}{2} \leq p$ (uma vez que $1 \leq p$), e todos os primos até p já estão no conjunto.

Indutivamente provamos que ao trocar o maior divisor primo p do termo atual não adicionamos nenhum divisor primo e consequentemente a quantidade de divisores primos diminui em 1.

Portanto como inicialmente haviam 9 divisores primos a sequência terá 9 termos.

b) Como 2 é o único primo par e 2 não deixa resto 1 na divisão por 3 podemos concluir que p é ímpar, isto é, p deixa resto 1 na divisão por 2 também, e consequentemente p deixa resto 1 na divisão por 6 (escreva $p = 6k + r$ onde k e r são inteiros e $0 \leq r < 6$, logo $r \equiv 6k + r \equiv 1 \pmod 3$ donde $r = 1$ ou $r = 4$, mas também $6k + r \equiv 1 \pmod 2$ donde $r = 1$ ou $r = 3$ ou $r = 5$, e portanto $r = 1$).

Desta forma, $\frac{p+1}{2} = \frac{6k+2}{2} = 3k + 1$, isto é, $\frac{p+1}{2}$ deixa resto 1 na divisão por 3.

c) O raciocínio do item a) mostra que é interessante procurar primos p tais que $p+1$ tem vários divisores primos. Após tentarmos alguns números primos vemos que precisamos de algo mais.

Agora o item b) nos da a ideia de procurar primos p que deixam resto 1 na divisão por 3 tais que $2p - 1$ é primo (pois $y = \frac{x+1}{2} \iff 2y = x + 1 \iff x = 2y - 1$).

Para 7 temos que $2 \cdot 7 - 1 = 13$ é primo.

Para 19 temos que $2 \cdot 19 - 1 = 37$ é primo, e para 37 temos que $2 \cdot 37 - 1 = 73$ é primo.

Para 31 temos que $2 \cdot 31 - 1 = 61$ é primo.

Agora olhamos para a sequência com $N = 13 \cdot 61 \cdot 73$. Vamos ver quantos termos essa sequência tem, a representando como descrito no item a):

- $\{13, 61, 73\}$
- $\{2, 13, 37, 61\}$
- $\{2, 13, 37, 61\}$
- $\{2, 13, 31, 37\}$

- $\{2, 13, 19, 31\}$
- $\{2, 13, 19\}$
- $\{2, 5, 13\}$
- $\{2, 5, 7\}$
- $\{2, 5\}$
- $\{2, 3\}$
- $\{2\}$

A sequência terá 10 termos. Para acionar mais um termo basta adicionar um divisor primo a N que não apareceu em nenhum termo da sequência acima tal que todos os divisores primos de $N + 1$ aparecem todos na sequência.

Podemos tomar o primo 11, uma vez que $12 = 2^2 \cdot 3$ e tanto 2 e 3 aparecem na sequência.

Portanto podemos tomar $N = 11 \cdot 13 \cdot 61 \cdot 73 = 636779$, que é de fato menor que 1 milhão. $\square$

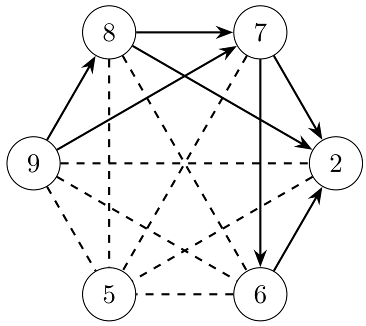
Problema 5 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Um campeonato é realizado entre seis times de futebol, em que cada um joga com cada um dos outros exatamente uma vez. Em uma partida de futebol, o vencedor ganha três pontos e o perdedor, zero ponto; caso a partida termine empatada, os dois times ganham um ponto. Sabe-se que, no final do campeonato, os seis times tiveram pontuações diferentes. Qual é o menor valor possível da quantidade de pontos do time que fez mais pontos?

Solução.

A resposta é 9.

Para este valor, considere o campeonato abaixo, onde os vértices representam times, e uma seta entre A e B indica que o time A ganhou de B, enquanto um tracejado indica que esses times empataram. A quantidade de pontos que cada time fez está escrita dentro de seu respectivo vértice.



Vamos agora provar que a resposta não pode ser menor que 8.

Com efeito, caso um jogo termine em empate, então a soma dos seus pontos é $1 + 1 = 2$. Caso um dos times vençam, então a soma dos seus pontos é $3 + 0 = 3$. Então para cada jogo que ocorreu, a soma dos seus pontos é ao menos 2.

Mas há $\binom{6}{2} = 15$ jogos, logo a soma dos pontos é ao menos $15 \cdot 2 = 30$.

Note que outra maneira de contar a soma dos pontos de todos os jogos é somar os pontos que cada time obteve.

Caso a resposta fosse menor que 8, então teríamos que a soma dos pontos de todos os times não ultrapassa $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 27$, o que é menor que 30. Logo isso não é possível.

Vamos agora mostrar que não é possível que a maior pontuação que um time obteve seja 8.

Note que caso isso ocorresse a soma das pontuações em todos os jogos seria no máximo $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 33$.

Mas o time que obteve 8 pontos deve ter ganho exatamente 2 jogos, pois caso tivesse ganhado 3 ou mais, sua pontuação seria no mínimo $3 \cdot 3 = 9$, e caso tivesse ganhado 1 ou menos, sua pontuação seria no máximo $1 \cdot 3 + 4 = 7$.

Como $8 = 2 \cdot 3 + 2$, esse time deve ter perdido um jogo.

Logo ocorreram ao menos 3 vitórias, donde a soma dos pontos de todos os times é ao menos $3 \cdot 3 + 12 \cdot 2 = 33$. Mas é claro, caso ocorresse outra vitória, a soma dos pontos seria maior que 33, o que não pode acontecer.

Portanto ocorreram exatamente 3 vitórias: um time ganhou do time que obteve 8 pontos, que por sua vez ganhou de outros 2 times.

Mas isso implica que qualquer time perdeu no máximo 1 jogo, e portando obteve ao menos 4 pontos. Isso é impossível pois há somente 5 números em $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, o que implica, pelo princípio da casa dos pombos, que dois times diferentes devem ter obtido a mesma pontuação.

Portanto o valor mínimo da maior quantidade de pontos que um time obteve é de fato 9, como queríamos. $\square$