Soluções da OBM Nível 2

Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Considere uma sequência cujo primeiro termo é um inteiro positivo dado $N > 1$. Considere a fatoração de N em primos. Se N é uma potência de 2, a sequência é formada por um único termo: N. Caso contrário, o segundo termo da sequência é obtido trocando o maior fator primo p de N por $p + 1$ na fatoração em primos. Se o novo número não é uma potência de 2, repetimos o mesmo procedimento com ele, lembrando de fatorá-lo novamente em primos. Caso contrário, a sequência numérica termina. E assim sucessivamente.

Por exemplo, se o primeiro termo da sequência é $N = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, como o seu maior fator primo é $p = 5$, o segundo termo é $2^2 \cdot 3 \cdot (5+1)^2 = 2^4 \cdot 3^3$. Repetindo o procedimento, o maior fator primo do segundo termo é $p = 3$ e então o terceiro termo é $2^4 \cdot (3+1)^3 = 2^{10}$. Como obtivemos uma potência de 2, a sequência tem 3 termos: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^3$ e 2^{10}.

a) Quantos termos tem a sequência cujo primeiro termo é $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$?

b) Mostre que se um fator primo p deixa resto 1 na divisão por 3, então $\frac{p+1}{2}$ é um número inteiro que também deixa resto 1 na divisão por 3.

c) Apresente um termo inicial N menor do que 1.000.000 (um milhão) tal que a sequência iniciada por N tem exatamente 11 termos.

Solução.

a) Note que a quantidade de termos na sequência não depende do número inicial em si, mas somente de seus fatores primos, uma vez que em nenhum momento nos importamos com a potência de cada primo da fatoração de um termo da sequência.

Podemos então representar os termos da sequência como o conjunto do seus divisores primos. Assim, o primeiro termo será $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Quando um termo for uma potência de 2, o conjunto que o representa será $\{2\}$.

Mas note que ao trocar o maior primo $p \neq 2$ desse conjunto por pelos divisores primos de $p + 1$ não estaremos adicionando nenhum divisor primo, uma vez que $p + 1$ é par e consequentemente seu maior divisor primo é no máximo $\frac{p+1}{2} \leq p$ (uma vez que $1 \leq p$), e todos os primos até p já estão no conjunto.

Indutivamente provamos que ao trocar o maior divisor primo p do termo atual não adicionamos nenhum divisor primo e consequentemente a quantidade de divisores primos diminui em 1.

Portanto como inicialmente haviam 9 divisores primos a sequência terá 9 termos.

b) Como 2 é o único primo par e 2 não deixa resto 1 na divisão por 3 podemos concluir que p é ímpar, isto é, p deixa resto 1 na divisão por 2 também, e consequentemente p deixa resto 1 na divisão por 6 (escreva $p = 6k + r$ onde k e r são inteiros e $0 \leq r < 6$, logo $r \equiv 6k + r \equiv 1 \pmod 3$ donde $r = 1$ ou $r = 4$, mas também $6k + r \equiv 1 \pmod 2$ donde $r = 1$ ou $r = 3$ ou $r = 5$, e portanto $r = 1$).

Desta forma, $\frac{p+1}{2} = \frac{6k+2}{2} = 3k + 1$, isto é, $\frac{p+1}{2}$ deixa resto 1 na divisão por 3.

c) O raciocínio do item a) mostra que é interessante procurar primos p tais que $p + 1$ tem vários divisores primos. Após tentarmos alguns números primos vemos que precisamos de algo mais.

Agora o item b) nos da a ideia de procurar primos p que deixam resto 1 na divisão por 3 tais que $2p - 1$ é primo (pois $y = \frac{x+1}{2} \iff 2y = x + 1 \iff x = 2y - 1$).

Para 7 temos que $2 \cdot 7 - 1 = 13$ é primo.

Para 19 temos que $2 \cdot 19 - 1 = 37$ é primo, e para 37 temos que $2 \cdot 37 - 1 = 73$ é primo.

Para 31 temos que $2 \cdot 31 - 1 = 61$ é primo.

Agora olhamos para a sequência com $N = 13 \cdot 61 \cdot 73$. Vamos ver quantos termos essa sequência tem, a representando como descrito no item a):

- $\{13, 61, 73\}$
- $\{2, 13, 37, 61\}$

- $\{2, 13, 37, 61\}$
- $\{2, 13, 31, 37\}$
- $\{2, 13, 19, 31\}$
- $\{2, 13, 19\}$
- $\{2, 5, 13\}$
- $\{2, 5, 7\}$
- $\{2, 5\}$
- $\{2, 3\}$
- $\{2\}$

A sequência terá 10 termos. Para acionar mais um termo basta adicionar um divisor primo a N que não apareceu em nenhum termo da sequência acima tal que todos os divisores primos de $N + 1$ aparecem todos na sequência.

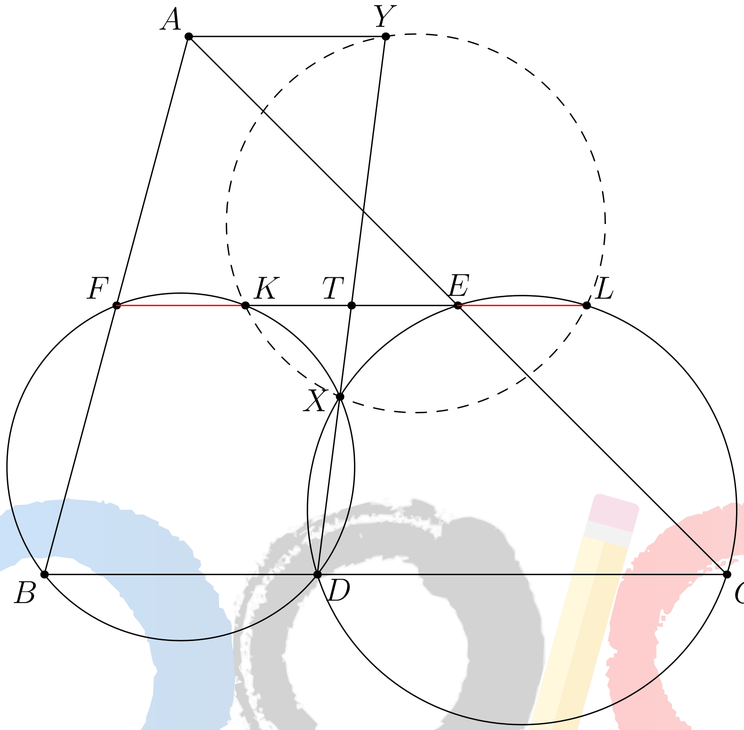
Podemos tomar o primo 11, uma vez que $12 = 2^2 \cdot 3$ e tanto 2 e 3 aparecem na sequência.

Portanto podemos tomar $N = 11 \cdot 13 \cdot 61 \cdot 73 = 636779$, que é de fato menor que 1 milhão. $\square$

Problema 2 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja ABC um triângulo escaleno. Sejam E e F os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente, e seja D um ponto qualquer no segmento BC. As circunferências circunscritas aos triângulos BDF e CDE intersectam a reta EF em $K \neq F$ e $L \neq E$, respectivamente, e intersectam-se em $X \neq D$. O ponto Y está sobre a reta DX de modo que AY é paralelo a BC. Prove que os pontos K, L, X e Y estão sobre uma mesma circunferência.

Solução. Seja $T = \overline{DX} \cap \overline{EF}$. Vamos provar que o triângulo ΔYKL é a reflexão de ΔDEF por T. Suponha sem perda de generalidade que $\angle ABC > \angle ACB$



Para começar, note que $FKDB$ e $ELCD$ devem ser trapézios isóceles, assim:

$$\begin{cases} FK & = BD - 2BF\cos\hat{B} = BD - AB\cos\hat{B} \\ EL & = DC - 2(DC - EC\cos\hat{C}) = AC\cos\hat{C} - DC \end{cases}$$

$$\implies FK - EL = BD + CD - AB\cos\hat{B} - AC\cos\hat{C} = BC - BC = 0 \implies FK = EL$$

Perceba que, como T está no eixo radical de (BFD) e (CED), então $TK \cdot TF = TE \cdot EL$. Juntando isso com a informação acima, é evidente que $TK = TE$ e $TF = TL$. Também, pela base média, $YT = TD$. Dessa forma, podemos concluir que $\Delta YKL \sim \Delta DEF$ a partir de uma reflexão por T. Usando o paralelismo da base média, podemos finalizar:

$$\angle KYL = \angle EDF = 180^\circ - \angle FDB - \angle EDC = 180^\circ - \angle KFD - \angle LCD = 180^\circ - \angle KXY - \angle LXY =$$

$$= 180^\circ - \angle KXL \quad \square$$

Problema 3 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Os números de 1 a 100 são colocados sem repetição em cada casinha de um tabuleiro 10×10. Um caminho crescente de tamanho k nesse tabuleiro é uma sequência de casinhas c_1, c_2, $\dots$, c_k tal que, para cada $i = 2, 3, \dots, k$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- as casinhas c_i e c_{i-1} compartilham um lado ou um vértice;
- o número em c_i é maior que o número em c_{i-1}.

Qual é o maior inteiro positivo k para o qual sempre podemos encontrar um caminho crescente de tamanho k, independentemente de como os números de 1 a 100 estão dispostos no tabuleiro?

Solução.

A resposta é $\boxed{4}$.

Primeiramente, ao selecionar qualquer sub-tabuleiro 2×2, é fácil ver que começando em sua casa de menor número e seguindo em cada passo para a próxima casa no sub-tabuleiro com o menor número que é maior que o número da casa atual obtemos um caminho crescente de tamanho 4.

Provaremos agora que no seguinte tabuleiro, não há nenhum caminho crescente de tamanho maior que 4.

97	98	93	94	89	90	85	86	81	82
99	100	95	96	91	92	87	88	83	84
77	78	73	74	69	70	65	66	61	62
79	80	75	76	71	72	67	68	63	64
57	58	53	54	49	50	45	46	41	42
59	60	55	56	51	52	47	48	43	44
37	38	33	34	29	30	25	26	21	22
39	40	35	36	31	32	27	28	23	24
17	18	13	14	9	10	5	6	1	2
19	20	15	16	11	12	7	8	3	4

Chamaremos de quadras os sub-tabuleiros 2×2 do tabuleiro acima que contém casas de uma mesma cor.

Vamos dividir a prova em 4 casos.

Ao começar em uma casa no canto inferior direito de uma quadra, é fácil ver que o caminho de tamanho máximo tem tamanho 1, pois não há nenhuma casa adjacente com um número maior.

Ao começar em uma casa no canto inferior esquerdo de uma quadra, é fácil ver que o tamanho do maior caminho é 2 pois apenas é possível ir para a casa diretamente a direita.

Ao começar no canto superior direito de uma quadra, há no máximo 5 opções de possíveis próximas casas de um caminho para escolher:

1. Canto inferior esquerdo da mesma quadra. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $2 + 1 = 3$.
2. Canto inferior direito da mesma quadra. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $1 + 1 = 2$.
3. Canto inferior esquerdo da quadra acima. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $2 + 1 = 3$.
4. Canto inferior direito da quadra acima. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $1 + 1 = 2$.
5. Canto inferior esquerdo da quadra que está acima e a direita da quadra da casa inicial. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $2 + 1 = 3$.

Ao começar no canto superior esquerdo de uma quadra, há no máximo 5 opções de possíveis próximas casas de um caminho para escolher:

1. Canto superior direito da mesma quadra. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $3 + 1 = 4$.

2. Canto inferior esquerdo da mesma quadra. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $2 + 1 = 3$.

3. Canto inferior direito da mesma quadra. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $1 + 1 = 2$.

4. Canto inferior esquerdo da quadra acima. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $2 + 1 = 3$.

5. Canto inferior direito da quadra acima. Nesse caso o maior tamanho de caminho possível é $1 + 1 = 2$.

Em qualquer caso, o maior tamanho possível de caminho não ultrapassa 4, como queríamos provar.

Problema 4 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Um número é chamado *trilegal* se seus algarismos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e se ele é divisível por 99. Quantos são os números trilegais de 10 algarismos?

Solução. Sejam a_1, a_2, …, a_{10} seus dígitos. Considere $p = a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ e $q = a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$. A condição de ser divisível por 99 é equivalente a ser divisível por 9 e 11. O critério de divisibilidade por 11 fica:

$$p - q = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

Evidentemente:

$$-10 = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \leq p - q \leq 3 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 10 \implies p = q$$

Também, a condição de divisibilidade por 9 fica:

$$a_1 + \cdots + a_{10} = p + q = 2p \equiv 0 \pmod 9 \iff 9 \mid p$$

No entanto, é tão claro quanto a luz de Cristo que $5 = 1 \cdot 5 \leq p \leq 3 \cdot 5 = 15 \implies p = 9$. Portanto a contagem final é de r^2 números trilegais, onde r é a quantidade de maneiras de somar 9 com 5 algarismos 1, 2 e 3 (tome uma maneira como os dígitos de índice par e outra como os dígitos de índice ímpar). Agora, basta calcular r.
Suponha que os dígitos 1, 2 e 3 aparecem x, y e z vezes, respectivamente. Então

$$\begin{cases} x + y + z & = 5 \\ x + 2y + 3z & = 9 \end{cases} \implies y + 2z = 4 \implies \begin{cases} x = 1, y = 4, z = 0 \\ x = 2, y = 2, z = 1 \\ x = 3, y = 0, z = 2 \end{cases}$$

Dessa forma, totalizamos $r = \left(\frac{5!}{1!4!0!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{3!0!2!}\right) = 5 + 30 + 10 = 45$. Portanto, a resposta é $45^2 = 2025$.

Problema 5 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Esmeralda escolhe dois inteiros positivos distintos a e b, com $b > a$, e escreve a equação $x^2 - ax + b = 0$ no quadro. Se a equação possui raízes inteiras positivas distintas c e d, com $d > c$, ela escreve a equação $x^2 - cx + d = 0$ no quadro. Ela repete o procedimento enquanto obtiver raízes inteiras positivas distintas. Caso ela escreva uma equação na qual isso não ocorre, ela para.

a) Mostre que Esmeralda pode escolher a e b de modo que ela vá escrever exatamente 2024 equações no quadro.

b) Qual é a maior quantidade de equações que ela pode escrever sabendo que um dos números escolhidos inicialmente é 2024?

Solução.

a) Sejam $(a_0, b_0) = (6, 9)$. Como $a_0^2 - 4b_0 = 36 - 36 = 0$, se a equação for $x^2 - a_0x + b_0$, Esmeralda irá parar.

Vamos definir as sequências (a_n) e (b_n) pelos termos iniciais acima, e $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n b_n$.

Obviamente a_n e b_n são inteiros maiores do que 2 para todo n.

Vamos provar que $a_n < b_n$ para todo n. Isso vale para $n = 0$. Suponha que $n > 0$, então

$$\begin{aligned}
&a_n < b_n \\
\iff\ &a_{n-1} + b_{n-1} < a_{n-1}b_{n-1} \\
\iff\ &b_{n-1} < a_{n-1}(b_{n-1} - 1) \\
\iff\ &\frac{b_{n-1}}{b_{n-1} - 1} < a_{n-1} \\
\iff\ &1 + \frac{1}{b_{n-1} - 1} < a_{n-1}
\end{aligned}$$

mas é claro, $1 + \frac{1}{b_{n-1}-1} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2 < a_{n-1}$, como queríamos.

Dessa forma, se Esmeralda escrever a equação $x^2 - a_{n+1}x + b_{n+1} = 0$ a próxima equação escrita será

$$\begin{aligned}
&x^2 - \frac{a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2}}{2}x + \frac{a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2}}{2} = 0 \\
\iff\ &x^2 - a_nx + b_n = 0
\end{aligned}$$

Portanto é suficiente escrever a equação $x^2 - a_{2023}x + b_{2023}$.

b) Vamos provar que a resposta é 4. Primeiramente note que esse número é de fato alcançado com a seguinte sequência de equações:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2024 + 199680 = 0 \\
&x^2 - 104 + 1920 = 0 \\
&x^2 - 24 + 80 = 0 \\
&x^2 - 4 + 20 = 0
\end{aligned}$$

Vamos agora provar que não é possível que Esmeralda escreva mais equações.

A estratégia será a seguinte: vamos começar a partir da equação final e então vamos encontrar os coeficientes das equações anteriores. Fazendo isso vamos conseguir limitar os possíveis valores dos coeficientes das equações finais e então dividiremos em casos.

Pelas relações de Girard (também conhecidas como equações de Vieta) usadas no último item, temos que uma equação que veio antes de $x^2 - a_nx + b_n = 0$ é $x^2 - (a_n + b_n)x + a_nb_n = 0$, sempre que $a_1 \geq 2$ e $b_0 > 2$ (essa última condição é necessária para garantir que $a_n + b_n < a_nb_n$).

Primeiramente, vamos lidar com os casos em que $a_0 \leq 2$ e $b_0 \leq 2$.

Mas evidentemente a_0 e b_0 são ambos não nulos, senão $b_1 = a_0b_0 = 0$, e também são ambos positivos, uma vez que se fossem ambos negativos $a_1 = a_0 + b_0$ seria negativo e seu um deles fosse positivo e o outro negativo $b_1 = a_0b_0$ seria negativo.

Como a_1 e b_1 são simétricos em a_0 e b_0, podemos supor que $a_0 \le b_0$.

Se $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ teremos a sequência

$$\begin{aligned}
&x^2 - x + 1 = 0\\
&x^2 - x + 2 = 0\\
&x^2 - 2x + 3 = 0\\
&x^2 - 5x + 6 = 0\\
&x^2 - 11x + 30 = 0\\
&x^2 - 41x + 330 = 0\\
&x^2 - 371x + 13530 = 0\\
&x^2 - 13901x + 5019630 = 0
\end{aligned}$$

e como $a_{n+1} \ge a_n$ e $b_{n+1} \ge b_n$, nenhum coeficiente será 2024 nesse caso.

Se $a_0 = 1$ e $b_0 > 1$ temos a sequência

$$\begin{aligned}
&x^2 - x + b_0 = 0\\
&x^2 - b_0x + (b_0 + 1) = 0\\
&x^2 - (2b_0 + 1)x + (b_0^2 + b_0) = 0\\
&x^2 - (b_0^2 + 3b_0 + 1)x + (2b_0^3 + 3b_0^2 + b_0) = 0\\
&x^2 - (2b_0^3 + 4b_0^2 + 4b_0 + 1)x + (2b_0^5 + 9b_0^4 + 13b_0^3 + 6b_0^2 + b_0) = 0
\end{aligned}$$

logo nesse caso $2b_0^3+4b_0^2+4b_0+1 < 2024$. Como essa expressão vale 2441 para $b_0 = 10$, e ela aumenta quando b_0 aumenta, temos $b_0 \le 9$.

Nota: Precisamos provar que de fato $a_n < b_n$ na sequência acima, mas isso é análogo ao que fizemos no item anterior. Isso é válido também para os próximos casos.

É fácil ver que $a_n \equiv 1 \pmod{b_0}$ para todo n. Dessa forma se $a_n = 2024$ devemos ter $2024 \equiv 1 \pmod{b_0}$. Os único inteiros b_0 entre 2 e 9 com essa propriedade é o 7. Mas nesse caso temos a sequência

$$\begin{aligned}
&x^2 - x + 7 = 0\\
&x^2 - 7x + 8 = 0\\
&x^2 - 15x + 56 = 0\\
&x^2 - 71x + 840 = 0\\
&x^2 - 911x + 59640 = 0\\
&x^2 - 60551x + 54332040 = 0
\end{aligned}$$

logo nesse caso nenhum coeficiente é 2024.

Dessa forma, algum b_n deverá ser igual a 2024. Mas é claro, $b_n = a_{n-1}b_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}b_{n-2} = \cdots = b_0a_0a_1a_2\cdots a_{n-1} = b_0a_0(b_0+1)a_2a_3\cdots a_{n-1}$ donde concluímos que tanto b_0 quanto b_0+1 dividem 2024. Entretanto $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ não tem dois divisores consecutivos além de 1 e 2 e 22 e 23, que não dão valores possíveis para b_0 já que $2 \le b_0 \le 9$.

Se $a_1 = 2$ e $b_0 = 2$ temos $2 + 2 = 2 \cdot 2$, isto é, a equação que leva a essa é $x^2 - 4x + 4$, que não é permitida.

Portanto, $a_0 \ge 2$ e $b_0 > 2$.

Dessa forma formamos as sequências (a_n) e (b_n):

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) &= (a_0 + b_0, a_0b_0)\\
(a_2, b_2) &= (a_0 + b_0 + a_0b_0, a_0b_0(a_0 + b_0))\\
(a_3, b_3) &= (a_0 + b_0 + a_0b_0 + a_0b_0(a_0 + b_0), a_0b_0(a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + a_0b_0))
\end{aligned}$$

Como $a_{n+1} = a_n+b_n > b_n$ e $b_{n+1} = a_nb_n > b_n$, caso mais de 4 equações fossem escritas deveríamos ter que

$$a_0^2b_0^2(a_0 + b_0) < a_0b_0(a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + a_0b_0) < 2024$$

Como $a_0 \leq b_0$, a desigualdade acima implica que $2a_0^5 < 2024$, donde $a_0 < 4$.

Portanto $a_0 = 2$ ou $a_0 = 3$.

Suponha agora que $a_0 = 2$.

Se $b_0 \geq 7$ então $a_0 b_0 (a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + a_0 b_0) \geq 14 \cdot 9 \cdot 23 = 2898 > 2024$. Logo nesse caso $b_0 \leq 6$.

Se $b_0 = 3$ temos a sequência

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 3 = 0 \\ &x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &x^2 - 11x + 30 = 0 \\ &x^2 - 41x + 330 = 0 \\ &x^2 - 371x + 13530 = 0 \\ &x^2 - 13901x + 5019630 = 0 \end{aligned}$$

e consequentemente nesse caso não temos nenhum coeficiente 2024.

Se $b_0 = 4$ temos a sequência

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 4 = 0 \\ &x^2 - 6x + 8 = 0 \\ &x^2 - 14x + 48 = 0 \\ &x^2 - 62x + 672 = 0 \\ &x^2 - 734x + 41664 = 0 \\ &x^2 - 42398x + 30581376 = 0 \end{aligned}$$

e consequentemente nesse caso não temos nenhum coeficiente 2024.

Se $b_0 = 5$ temos a sequência

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 5 = 0 \\ &x^2 - 7x + 10 = 0 \\ &x^2 - 17x + 70 = 0 \\ &x^2 - 87x + 1190 = 0 \\ &x^2 - 1277x + 103530 = 0 \\ &x^2 - 104807x + 132207810 = 0 \end{aligned}$$

e consequentemente nesse caso não temos nenhum coeficiente 2024.

Se $b_0 = 6$ temos a sequência

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 6 = 0 \\ &x^2 - 8x + 12 = 0 \\ &x^2 - 20x + 96 = 0 \\ &x^2 - 116x + 1920 = 0 \\ &x^2 - 2036x + 222720 = 0 \end{aligned}$$

e consequentemente nesse caso não temos nenhum coeficiente 2024.

Suponha agora que $a_0 = 3$.

Se $b_0 \geq 5$ então $a_0 b_0 (a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + a_0 b_0) \geq 15 \cdot 8 \cdot 23 = 2760 > 2024$, então basta verificar os casos em que $b_0 = 3$ e $b_0 = 4$.

Se $b_0 = 3$ temos a sequência

$$\begin{aligned}
&x^2 - 3x + 3 = 0\\
&x^2 - 6x + 9 = 0\\
&x^2 - 15x + 54 = 0\\
&x^2 - 69x + 810 = 0\\
&x^2 - 879x + 55890 = 0\\
&x^2 - 56769x + 49127310 = 0
\end{aligned}$$

e consequentemente nesse caso não temos nenhum coeficiente 2024.

Se $b_0 = 4$ temos a sequência

$$\begin{aligned}
&x^2 - 3x + 4 = 0\\
&x^2 - 7x + 12 = 0\\
&x^2 - 19x + 84 = 0\\
&x^2 - 103x + 1596 = 0\\
&x^2 - 1699x + 164388 = 0\\
&x^2 - 166087x + 279295212 = 0
\end{aligned}$$

e novamente não temos nenhum coeficiente 2024.

Portanto em nenhum caso temos um coeficiente 2024 como em um termo da sequência (a_n) ou (b_n) quando $n > 3$. Isso conclui a prova. $\square$

Construção do exemplo.

Observe a sequência das equações:

$$\begin{aligned}
&x^2 - a_0x + b_0 = 0\\
&x^2 - (a_0 + b_0)x + a_0b_0 = 0\\
&x^2 - (a_0 + b_0 + a_0b_0)x + a_0b_0(a_0 + b_0) = 0\\
&x^2 - (a_0 + b_0 + a_0b_0 + a_0b_0(a_0 + b_0))x + a_0b_0(a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + a_0b_0) = 0
\end{aligned}$$

Seja $S = a_0 + b_0$ e $P = a_0b_0$. Queremos que $S + P + PS = 2024$, ou equivalentemente $(S+1)(P+1) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$.

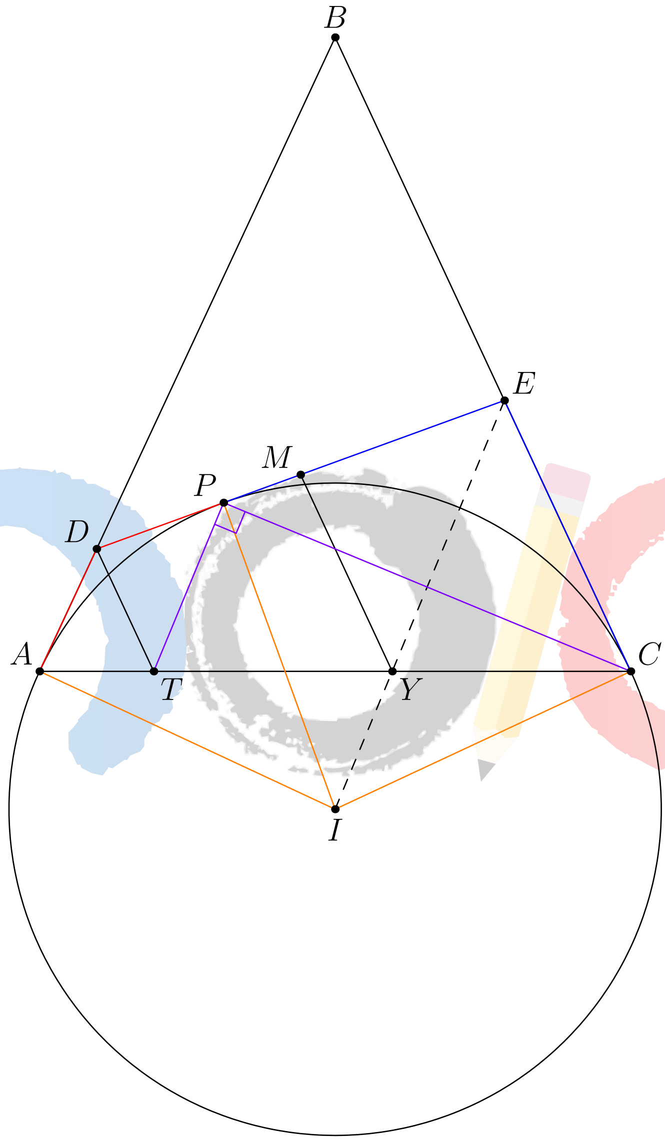
Vamos testar os pares de divisores na ordem natural:

1. $S + 1 = 1$ e $P + 1 = 2025$. Nesse caso $S = 0$, e não temos solução.
2. $S + 1 = 3$ e $P + 1 = 675$. Nesse caso $S = 2$, e temos $a_0 = b_0 = 1$.
3. $S + 1 = 5$ e $P + 1 = 405$. Nesse caso a_0 e b_0 serão raízes da equação $x^2 - 4x + 404 = 0$ cujo discriminante é $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 404 < 0$.
4. $S + 1 = 9$ e $P + 1 = 225$. Nesse caso a_0 e b_0 serão raízes da equação $x^2 - 8x + 224 = 0$ cujo discriminante é $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 224 < 0$.
5. $S + 1 = 15$ e $P + 1 = 135$. Nesse caso a_0 e b_0 serão raízes da equação $x^2 - 14x + 134 = 0$ cujo discriminante é $\Delta = 14^2 - 4 \cdot 134 < 0$.
6. $S + 1 = 25$ e $P + 1 = 81$. Nesse caso a_0 e b_0 serão raízes da equação $x^2 - 24x + 80 = 0$. Logo $a_0 = 4$ e $b_0 = 20$.

Problema 6 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = BC$. Seja D um ponto sobre o segmento AB, E um ponto sobre o segmento BC e P um ponto sobre o segmento DE, tal que $AD = DP$ e $CE = PE$. Seja M o ponto médio de DE. A reta paralela a AB por M intersecta AC em X e a reta paralela a BC por M intersecta AC em Y. As retas DX e EY intersectam-se em F. Prove que FP é perpendicular a DE.

Solução. Seja ω a circunferência que tangencia $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ em A e C, tendo centro I. Também, considere T como sendo a intersecção de $\overline{AC}$ com a paralela a $\overline{BC}$ por D. Claramente, DE também tangencia ω em P. Vamos provar que $I = F$, que trivialmente concluiria o problema.



Considere o ponto $Y' = \overline{EI} \cap \overline{AC}$, se provarmos que $Y = Y'$, ou seja, Y' é o ponto médio de TC (por base média), chegaríamos ao resultado desejado. Se conseguíssemos provar que $\angle TPC = 90°$, como $Y' \in \overline{AC}$ e $Y' \in \overline{EI}$ (que pela tangência é a mediatriz de $\overline{PC}$), teríamos que Y' deve ser o ponto médio de $\overline{TC}$, pois seria o circuncentro de um triângulo retângulo. Então, o problema se resume a provar que $\angle TPC = 90°$.

Antes de terminar, note que $DA = DT = DP$, logo D é o circuncentro de APT, seguindo que $\angle DPT = 90° - \angle PAT$. Para finalizar a demomonstração:

$$\angle TPC = 90° \iff 90° = \angle DPT + \angle EPC = 90° - \angle PAT + \angle EPC = 90° - \angle PIC/2 + \angle EPC = 90° \quad \square$$