Soluções da OBM Nível 3

Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Seja a_1 um inteiro maior ou igual a 2. Considere a sequência tal que o seu primeiro termo é a_1 e, sendo a_n o n-ésimo termo da sequência, vale que

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{p_k^{e_k-1}} + 1,$$

em que $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ é a fatoração em primos de a_n, com $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ e e_1, e_2, ..., e_k inteiros positivos.

Por exemplo, se $a_1 = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, os próximos dois termos da sequência são

$$a_2 = \frac{a_1}{23^{1-1}} + 1 = \frac{2024}{1} + 1 = 2025 = 3^4 \cdot 5^2;$$

$$a_3 = \frac{a_2}{5^{2-1}} + 1 = \frac{2025}{5} + 1 = 406.$$

Determine para quais valores de a_1 a sequência é eventualmente periódica e quais são todos os possíveis períodos.

Observação: Sendo p um inteiro positivo, uma sequência x_1, x_2, ... é *eventualmente periódica com período* p se p é o menor inteiro positivo para o qual existe um $N \geq 0$ satisfazendo $x_{n+p} = x_n$ para todo $n > N$.

Solução. Vamos provar por indução que para qualquer valor inicial a_1 (maior que 1) 3 fará parte da sequência, e consequentemente a sequência será periódica de período 2 (uma vez que $\frac{3}{3^{1-1}} + 1 = 4$ e $\frac{4}{2^{2-1}} + 1 = 3$).

Se $a_1 = 2$, então $a_2 = 3$.

Se $a_1 = 3$, não há nada a provar.

Se $a_1 = 4$, $a_2 = 3$.

Esse será o caso base da indução.

Suponha agora que isso é verdade para 1, ..., n (isto é, se $2 \leq a_1 \leq n$ então 3 faz parte da sequência (a_n)), e considere $a_1 = n + 1$.

Seja $M = \lceil \sqrt{a_1} \rceil$. Note que $M^2 \geq a_1$.

Vamos mostrar que se $a_k = M^2$, então $a_{k+1} < a_1$, e pela hipótese de indução 3 fará parte da subsequência iniciada no a_{k+1}, e consequentemente fará parte de (a_n).

Com efeito, se $M = 2^l$ para algum l inteiro positivo, então $a_{k+1} = \frac{2^l}{2^{l-1}} + 1 = 3$, como queríamos.

Note que todo primo na fatoração de M^2 tem expoente ao menos 2, então se M^2 não for potência de 2, o maior primo p_m em sua fatoração será ao menos 3 e teremos que

$$a_{k+1} = \frac{M^2}{p_m^{e_m-1}} + 1 \leq \frac{M^2}{3} + 1 < \frac{(\sqrt{a_1} + 1)^2}{3^{2-1}} + 1 = \frac{a_1 + 2\sqrt{a_1} + 4}{3}.$$

Agora basta mostrar que $\frac{a_1 + 2\sqrt{a_1} + 4}{3} \leq a_1$. Manipulando:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + 2\sqrt{a_1} + 4}{3} &\leq a_1 \\ \iff \sqrt{a_1} &\leq a_1 - 2 \\ \iff a_1 &\leq a_1^2 - 4a_1 + 4 \\ \iff 0 &\leq a_1^2 - 5a_1 + 4 \end{aligned}$$

Como o coeficiente líder é positivo, só precisamos mostrar que a_1 não está entre as raízes do polinômio $x^2 - 5x + 4$.

A maior das raízes desse polinômio é 4, então concluímos esse caso pois $a_1 \geq 5$.

Resta verificarmos o caso de M^2 não fazer parte da sequência (a_n).

Mas note que se a potência do maior primo dividindo a_k for 1, então $a_{k+1} = a_k + 1$, logo antes de chegarmos em M^2 isso deve parar de acontecer. Isto é, para um certo termo $a_k < M^2$ devemos ter que a potência do maior primo p_m dividindo a_k é maior que 1.

Se $p_m = 2$, a_k é potência de 2, e então como vimos antes, $a_{k+1} = 3$.

Caso contrário,

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{p_m^{e_m - 1}} + 1 \leq \frac{a_k}{3} + 1 < \frac{M^2}{3} + 1,$$

e como já vimos $\frac{M^2}{3} + 1 < a_1$, logo $a_{k+1} < a_1$, completando a prova. $\square$

Nota: é fácil provar que se $a_1 = n$ então a sequência "atinge" 3 em no máximo $\frac{4}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$ termos. (dica: $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq \int_{x=1}^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$)

Problema 2 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Uma *partição* de um conjunto A é uma família de subconjuntos não vazios de A, de modo que quaisquer dois subconjuntos distintos da família são disjuntos e a união de todos os subconjuntos é igual a A. Dizemos que uma partição de um conjunto de inteiros B é *afastada* se cada subconjunto que compõe a partição **não** contém inteiros consecutivos. Prove que, para todo inteiro positivo n, a quantidade de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é igual a quantidade de partições afastadas do conjunto $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$.
Por exemplo, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ *é uma partição afastada do conjunto* $\{1, 2, 3\}$. *Por outro lado,* $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ *é uma partição do mesmo conjunto, mas que não é afastada pois* $\{1, 2\}$ *contém inteiros consecutivos.*

Solução. Seja a_{ij} = quantidade de partições de $\{1, \ldots, i\}$ com j conjuntos e b_{ij} = quantidade de partições **afastadas** de $\{1, \ldots, i\}$ com j conjuntos.

Note que a maior quantidade de conjuntos que uma partição de $\{1, \ldots, n\}$ pode ter é n. Então em particular, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $j > i$.

Queremos provar que $\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i+1} b_{(i+1)j}$.

É fácil ver que isso é verdade para $i = 1$ e $i = 2$.

Note também que se $i > 1$ então não existem partições afastadas de $\{1, \ldots, i\}$ com 1 conjunto, pois esse conjunto teria que conter números consecutivos. Então para $i > 1$, $b_{i1} = 0$.

Agora, para $i > 1$ temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i+1} b_{(i+1)j} \\
\iff &\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = b_{i1} + \sum_{j=1}^{i} b_{(i+1)(j+1)} \\
\iff &\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i} b_{(i+1)(j+1)}
\end{aligned}$$

Se provarmos que cada termo das somas acima são iguais, as somas serão iguais. Vamos então provar que para $i > 1$, $a_{ij} = b_{(i+1)(j+1)}$.

Vamos proceder por indução em i. O caso base $i = 2$ já foi feito.

Suponha que isso é verdade para i (isto é, $a_{ij} = b_{(i+1)(j+1)}$ para qualquer $j \geq 0$).

Vamos agora calcular $a_{(i+1)j}$.

Se $i + 1$ está em um conjunto sozinho, então há $a_{i(j-1)}$ maneiras de arranjar os outros i números em $j - 1$ conjuntos para formar uma partição de $\{1, \ldots, i + 1\}$.

Caso contrário, há a_{ij} maneiras de arranjar os outros i números em j conjuntos, e j maneiras de escolher um desses conjuntos para colocar o $i + 1$.

Logo, $a_{(i+1)j} = a_{i(j-1)} + ja_{ij}$.

Vamos agora calcular $b_{(i+2)(j+1)}$.

A única diferença do que fizemos acima é que ao escolher o conjunto onde colocaremos o $i + 2$ teremos j possibilidades, pois um dos $j + 1$ conjuntos contém o número $i + 1$, que é o único número que não pode estar no mesmo conjunto que o $i + 2$.

Logo, $b_{(i+2)(j+1)} = b_{(i+1)j} + jb_{(i+1)(j+1)}$.

Mas agora, pela hipótese de indução, $b_{(i+1)j} + jb_{(i+1)(j+1)} = a_{i(j-1)} + ja_{ij}$. Juntando isso com o fato de que $a_{(i+1)j} = a_{i(j-1)} + ja_{ij}$, temos $a_{(i+1)j} = b_{(i+2)(j+1)}$, completando o passo indutivo. $\square$

Nota: A quantidade de partições de $\{1, \ldots, n\}$ é o enésimo número de Bell.

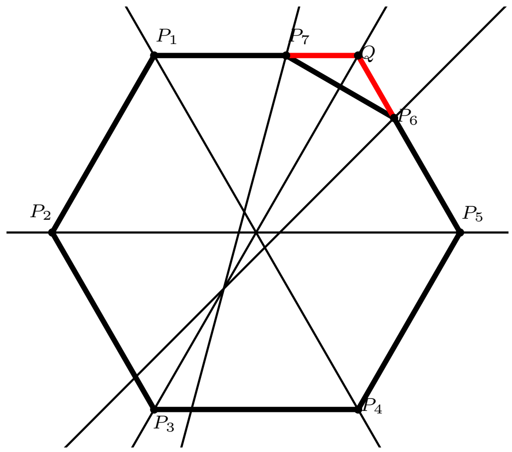
Problema 3 - Escrito por Matheus Alencar

Problema 3. Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Em um polígono convexo de n lados, todas as bissetrizes internas de seus n ângulos internos são traçadas. Determine, em função de n, o menor número possível de retas distintas determinadas por essas bissetrizes.

Solução.

Claro, é fácil notar que a resposta para n par é $\frac{n}{2}$. Cada bissetriz de ângulo pode conter no máximo 2 vértices do polígono, e um n-gono regular nos fornece $\frac{n}{2}$ bissetrizes.

Também é bastante simples construir um n-gono com $\frac{n+3}{2}$ bissetrizes para n ímpar: podemos simplesmente pegar um $(n-1)$-gono regular e remover um pequeno pedaço de dois lados consecutivos:



Na verdade, provaremos que a resposta é $\frac{n+1}{2}$ se $n \equiv 1 \pmod 4$ e $\frac{n+3}{2}$ se $n \equiv 3 \pmod 4$.

A ideia-chave para resolver este problema é lembrar de dois lemas de composição:

A composição de duas reflexões sobre as retas r e s é uma rotação de ângulo $2\measuredangle(r,s)$ com centro em $r \cap s$.

A composição de duas rotações φ_1, φ_2 com ângulos (orientados) θ_1, θ_2 é uma rotação φ com ângulo $\theta_1 + \theta_2$.

Primeiro, provemos que é impossível construir um n-gono com apenas $\frac{n+1}{2}$ bissetrizes se $n \equiv 3 \pmod 4$. Suponha, por contradição, que seja possível tal construção. Seja o polígono $P_1P_2P_3 \dots P_n$. Se usamos apenas $\frac{n+1}{2}$ bissetrizes, então $\frac{n-1}{2}$ delas devem conter 2 vértices do polígono. Sem perda de generalidade, suponha que a bissetriz do ângulo P_n seja a única que contém apenas um vértice do polígono. Definimos o Círculo de Andrey de um conjunto de linhas (nome brasileiro, rs) como um círculo que contém todos os pontos de interseção dessas linhas dentro de si.

Seja $\mathcal{C}$ o Círculo de Andrey das $\frac{n-1}{2}$ bissetrizes que possuem dois vértices do polígono, e R_1, R_2, $\dots$, R_{n-1} os pontos de interseção dessas retas com $\mathcal{C}$ (claro, associamos cada R_i ao vértice P_i):

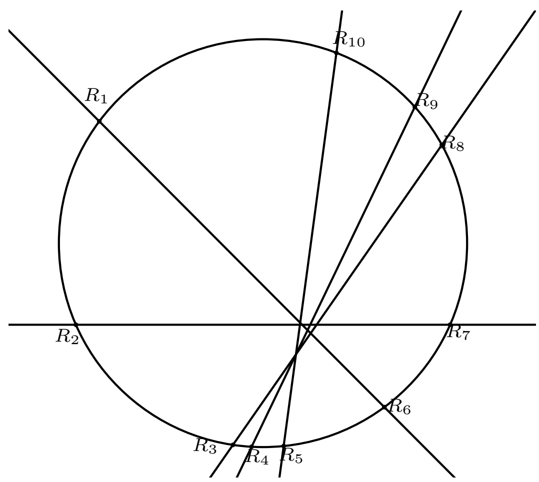


Figura 1: Caso para $n = 11$.

Não é difícil provar que a ordem em que contamos esses pontos de interseção também é a ordem em que aparecem na circunferência. Afinal, as direções das bissetrizes devem aparecer na mesma ordem das direções dos segmentos (se você gosta de vetores, pode ver isso observando os vetores $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ e notando que suas direções aparecem ordenadas, logo, suas bissetrizes também).

Agora podemos pensar na construção de $P_1P_2\dots P_n$ como uma série de reflexões sobre $\overleftrightarrow{R_iR_{i+\frac{n-1}{2}}}$ (considerando índices módulo $n-1$). Começamos na reta $\overleftrightarrow{P_1P_n}$, realizamos uma série de reflexões e chegamos a $\overleftrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

Agora, finalmente, o truque: analisamos essa composição de reflexões. Como $n-1$ é par, podemos agrupar as reflexões para mostrar que são rotações e que sua composição resulta em outra rotação.

Uma rotação de 360° é, naturalmente, a identidade. Portanto, não poderíamos ter essa composição de reflexões resultando em duas retas diferentes ($\overleftrightarrow{P_nP_1}$ e $\overleftrightarrow{P_{n-1}P_n}$).

Agora, para a construção para $n \equiv 1 \pmod 4$...

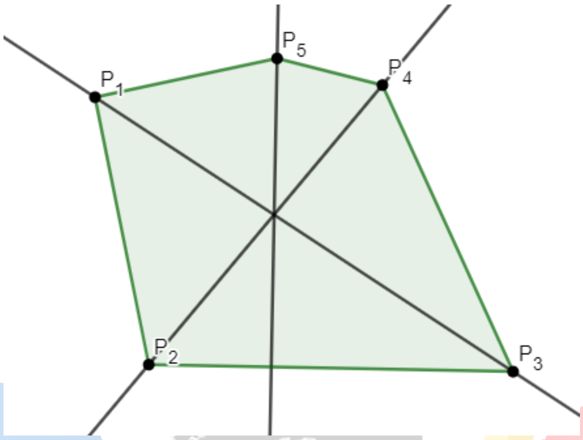


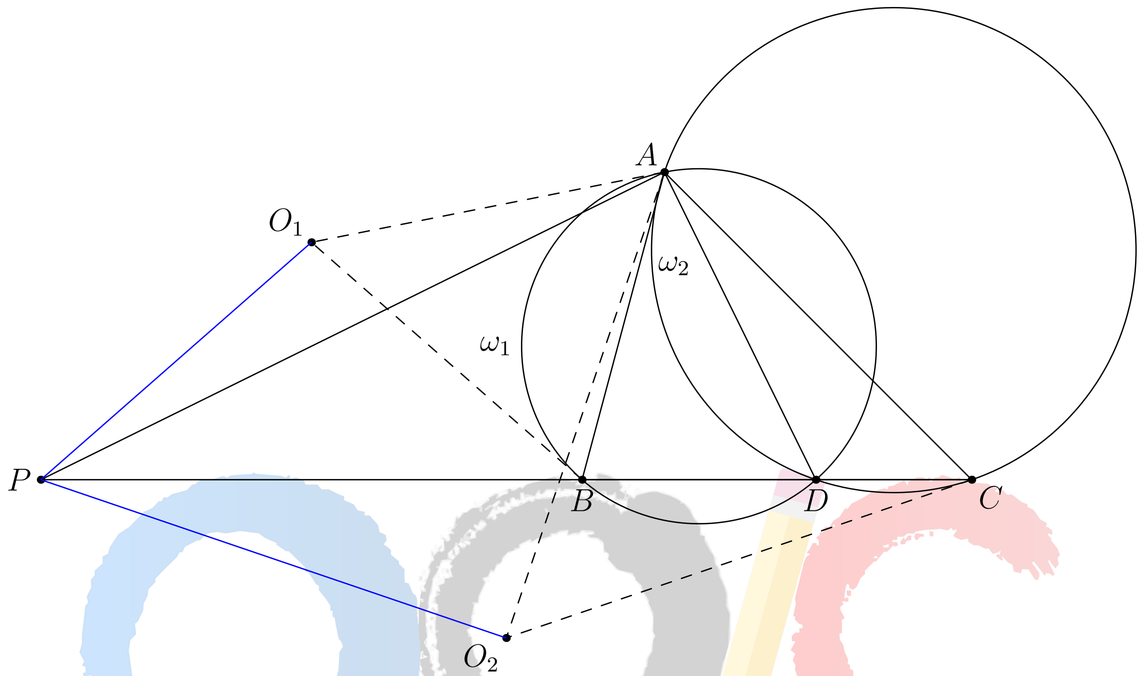
Figura 2: Caso $n = 5$.

Podemos inicialmente pegar as $\frac{n-1}{2}$ bissetrizes de um $(n-1)$-gono regular, girar uma delas um pequeno ângulo ϵ e refletir a linha original desse $(n-1)$-gono sobre todas elas. No final, o polígono continuará convexo, e a composição de todas essas reflexões resultará em uma rotação de 4ϵ graus. Deixo os detalhes desta construção como exercício para o leitor, mas o polígono resultante parecerá muito com um $(n-1)$-gono regular.

Problema 4 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que D é diferente do pé da altura por A. As retas tangentes por A e B à circunferência circunscrita ao triângulo ABD se encontram em O_1 e as retas tangentes por A e C à circunferência circunscrita ao triângulo ACD se encontram em O_2. Mostre que a circunferência de centro O_1 que passa por A, a circunferência de centro O_2 que passa por A e a reta BC têm um ponto em comum.

Solução. Esse problema admite várias soluções, mas vamos apresentar somente a mais direta.
A partir de uma boa figura, perceba que o ponto desejado é a intersecção da perpendicular a AD por A com BC, ou seja $P \in \overline{BC}$ e $\angle PAD = 90°$. Vamos provar que P pertence às duas circunferências.



Sejam ω_1 e ω_2 os circuncírculos de ABD e ACD, e Γ_1 e Γ_2 os círculos de centro O_1 e O_2 que passam por A. Para provar que $P \in \Gamma_1$ e $P \in \Gamma_2$ vamos usar ângulos orientados. Comece percebendo que, pelo teorema do bico, $O_1B = O_1A$ e $O_2C = O_2A$, logo $B \in \Gamma_1$ e $C \in \Gamma_2$. Agora, basta conseguirmos que $2\measuredangle APB = \measuredangle AO_1B$ e $2\measuredangle APC = \measuredangle AO_2C$. Vamos provar um e o outro será análogo.

$$2\measuredangle APB = 2(\measuredangle ADP + \measuredangle PAD) = 2\measuredangle ADP = 2\measuredangle ADB = 2\measuredangle O_1AB = \measuredangle AO_1B \quad \square$$

Assim, concluímos o problema.

Problema 5 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer reais x e y,

$$f(x^2y - y) = f(x)^2 f(y) + f(x)^2 - 1.$$

Passo a passo.

1. Encontre todas as soluções que são constantes, lineares, ou polinômio de grau 2.
2. Use a substituição $g(x) = f(x) + 1$.
3. Suponha agora que g não é constante.
4. Prove que g é par, isto é, $g(-x) = g(x)$, e que $g(0) = 0$.
5. Prove que g satisfaz a equação multiplicativa de Cauchy nos reais positivos, isto é, $g(xy) = g(x)g(y)$ para quaisquer reais positivos.
6. Analise $g(x^4 - 1)$.
7. Prove que $g(x) > 1$ para $x > 1$.
8. Restrinja agora o domínio de g para $\mathbb{R}_{\geq 1}$.
9. Faça a substituição $h(x) = \ln(g(e^x))$, e conclua que h satisfaz a equação de Cauchy, isto é, $h(x + y) = h(x) + h(y)$.
10. Use que $h(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ para concluir que h é linear, isto é, $h(x) = ax$ para alguma constante a.
11. Mostre que g é exponencial, isto é, $g(x) = x^t$.
12. Substitua $x = \sqrt{c}$, sendo c uma constante apropriada, em alguma expressão para encontrar o valor de t.
13. Use que g é par e que $g(0) = 0$ para expandir a expressão anterior para todos os reais.
14. Conclua.

Solução.

Seja $P(x, y)$ a proposição $f(x^2y - y) = f(x)^2 f(y) + f(x)^2 - 1$

$P(0, 0)$ nos dá

$$f(0) = f(0)^3 + f(0)^2 - 1.$$

Fatorando:

$$(f(0) - 1)(f(0) + 1)^2 = 0$$

Então ou $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.

Suponha que $f(0) = 1$.

$P(1, 0)$ nos dá

$$f(0) = f(1)^2 f(0) + f(1)^2 - 1$$

Simplificando temos

$$2 = 2f(1)^2$$

donde $f(1) = -1$ ou $f(1) = 1$.

$P(1, 1)$ nos dá

$$f(0) = f(1)^3 + f(1)^2 - 1$$

Fatorando:

$$f(1)^2(f(1) + 1) = 2$$

logo não podemos ter $f(1) = -1$ e portanto $f(1) = 1$.

$P(1, y)$ nos dá

$$f(0) = f(y)$$

logo $\boxed{f(x) = 1}$ para todo real x. É fácil ver que essa é de fato uma solução.

Suponha agora então que $f(0) = -1$.

Seja $g(x) = f(x) + 1$. Apesar de simples, esta substituição é uma das partes mais importantes dessa solução. A ideia é que ao fazer substituições como esta podemos obter funções que são, por exemplo, multiplicativas, para as quais há diversas técnicas conhecidas que podemos aplicar.

Substituindo g na equação original temos

$$g(y(x^2 - 1)) - 1 = (g(x) - 1)^2 g(y) - 1$$

Seja $Q(x, y)$ a proposição $g(y(x^2 - 1)) = (g(x) - 1)^2 g(y)$ para x e y reais.

Como $f(0) = -1$, $g(0) = 0$.

$Q(1, 1)$ nos dá

$$g(0) = (g(1) - 1)^2 g(1)$$

logo $g(1) = 0$ ou $g(1) = 1$.

Suponha que $g(1) = 0$.

$Q(1, y)$ nos dá

$$g(0) = g(y)$$

logo $g(x) = 0$ para todo x real, e consequentemente $\boxed{f(x) = -1}$. É fácil ver que essa é de fato uma solução.

Suponha agora que $g(1) = 1$.

$Q(0, -1)$ nos dá

$$g(1) = g(-1)$$

logo $g(-1) = 1$.

Agora, $Q(x, -1)$ nos dá

$$g(-(x^2 - 1)) = (g(x) - 1)^2$$

e como $Q(x, 1)$ nos dá

$$g(x^2 - 1) = (g(x) - 1)^2 \tag{1}$$

e todo real não negativo pode ser escrito como $x^2 - 1$, concluímos que g é par.

A seguir temos a parte mais importante dessa solução, e uma das duas únicas que envolve uma ideia além de substituições simples ou técnicas bem conhecidas (sendo a outra a substituição $g(x) = f(x) + 1$).

$Q(x, 1)$ nos dá

$$g(x^2 - 1) = (g(x) - 1)^2$$

logo a equação de $Q(x, y)$ pode ser reescrita como

$$g(y(x^2 - 1)) = g(y) g(x^2 - 1) \tag{2}$$

Como todo real positivo pode ser escrito como $x^2 - 1$, concluímos que g satisfaz a equação multiplicativa de Cauchy nos reais positivos, isto é, para quaisquer x e y temos $g(xy) = g(x)g(y)$.

O passo a seguir é bem técnico. Ele é necessário pois queremos que $\ln(g(x)) > 0$ para todo $x > 1$.

Como g é multiplicativa, substituindo $x = t^2$ em (2), usando (1) e expandindo ambos os lados temos

$$(g(t) - 1)^2 g(t^2 + 1) = (g(t)^2 - 1)^2.$$

Simplificando temos

$$g(t^2 + 1) = (g(t) + 1)^2 \tag{3}$$

Assim, para $x > 1$, $g(x) = 1$ somente se $g(\sqrt{x - 1}) = 0$.

Como g é multiplicativa, $g(x^2) = g(x)^2$, e portanto $g(y) \geq 0$ para todo $y > 0$ (pois todo real positivo pode ser escrito como x^2).

Suponha, para o âmbito da contradição, que $g(x_0) = 0$ para algum $x_0 > 0$.

$Q(x, x_0)$ nos dá

$$g(x_0(x^2 - 1)) = 0$$

mas então como todo real positivo pode ser escrito da forma $x_0(x^2 - 1)$ concluímos que $g(1) = 0$, uma contradição.

Logo, $g(x) > 1$ para $x > 1$.

Vamos agora provar o seguinte teorema.

Teorema 1. *Toda função $g: \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ que satisfaz a equação multiplicativa de Cauchy é exponencial, isto é, $g(x) = x^t$.*

O teorema abaixo será utilizado na prova do teorema 1.

Teorema 2. *Se $h: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaz a equação de Cauchy, isto é, $h(x+y) = h(x) + h(y)$, então $h(x) = ax$ para alguma constante $a \geq 0$.*

Demonstração. Vamos inicialmente provar que a restrição de h para $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ é linear, isto é, existe uma constante a tal que $h(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Seja $R(x, y)$ a proposição $h(x+y) = h(x) + h(y)$ para $x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

$R(1,1)$ nos dá que $h(2) = 2h(1)$.

Vamos provar por indução em n que $h(n) = nh(1)$ para todo n inteiro positivo. O caso base já foi feito.

Suponha que $h(n) = nh(1)$. Então, $R(n, 1)$ nos dá que $h(n+1) = h(n) + h(1) = (n+1)h(1)$, concluindo o passo indutivo.

Note que $R(x, x)$ nos dá que $h(2x) = 2h(x)$.

Vamos provar por indução em n que $h(nx) = nh(x)$ para todo n inteiro positivo. O caso base já foi feito.

Suponha que $h(nx) = nh(x)$. Então $R(nx, x)$ nos dá $h((n+1)x) = h(nx) + h(x) = (n+1)h(x)$, concluindo o passo indutivo.

Mas é claro, $h(p) = h\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = qh\left(\frac{p}{q}\right)$, donde $h(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}h(p) = \frac{p}{q}h(1)$ para quaisquer p e q inteiros positivos.

Logo, para qualquer racional $\frac{p}{q} \geq 0$ temos que $h(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}h(1)$, como queríamos.

Suponha, para o âmbito da contradição, que $h(x) > xh(1)$ para algum irracional $x \geq 0$.

Seja r' um racional no intervalo aberto $(xh(1), h(x))$. Seja $r = \frac{r'}{h(1)}$.

Evidentemente $r > x$ pois $r > \frac{xh(1)}{h(1)}$.

Logo, $h(x) > h(r) = h(x + (r - x)) = h(x) + h(r - x) \geq h(x)$, uma contradição.

De modo similar, chegamos a uma contradição se $h(x) < xh(1)$ para algum irracional $x \geq 0$ (o único cuidado que precisamos ter é garantir que esse racional seja maior que 1).

Portanto $h(x) = xh(1)$ para todo real $x \geq 0$, como queríamos provar. □

Demonstração do teorema 1. Seja $h(x) = \ln(g(e^x))$.

Temos que

$$h(x+y) = \ln(g(e^{x+y})) = \ln(g(e^x e^y)) = \ln(g(e^x)g(e^y)) = \ln(g(e^x)) + \ln(g(e^y)) = h(x) + h(y).$$

Como $g(x) \geq 1$ para todo $x \geq 1$, $h(y) \geq 0$ para todo $y \geq 0$.

Portanto $h: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ satisfaz a equação de Cauchy e pelo teorema 2 concluímos que $h(x) = tx$ para alguma constante $t \geq 0$.

Mas então, $g(e^x) = e^{h(x)} = e^{tx} = (e^x)^t$.

Portanto, $g(x) = x^t$ para alguma constante $t \geq 0$. □

Desse modo, usando o teorema 1 concluímos que $g(x) = x^t$ para algum $t \geq 0$.

Mas substituindo $x = \sqrt{2}$ em $(g(x) - 1)^2 = g(x^2 - 1)$ temos

$$(\sqrt{2}^t - 1)^2 = 1^t$$

donde $t = 2$.

Agora temos mais uma parte técnica:

Como g é par, isso vale também para todo $x \leq -1$. Resta somente mostrar que isso vale para $x \in (-1, 1)$.

Usando (3), para qualquer $x \in (0, 1)$ temos

$$(g(x) + 1)^2 = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2$$

Simplificando e usando que $g(x) > 0$ para $x > 0$ obtemos $g(x) = x^2$.

Como $g(0) = 0$ e g é par, também temos $g(x) = x^2$ para $x \in (-1, 0]$, como queríamos.

Logo, $\boxed{f(x) = x^2 - 1}$. É fácil ver que essa é de fato uma solução. □

Problema 6 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Seja $n > 0$ um inteiro positivo. Enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0,1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n:

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \cdots < \frac{p_M}{q_M} = \frac{1}{1}.$$

Determine, em função de n, o menor valor possível de $q_{i-1} + q_i + q_{i+1}$, $0 < i < M$.

Por exemplo, se $n = 4$, a enumeração é

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1},$$

onde $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2$, $p_5 = 3$, $p_6 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = 4$, $q_2 = 3$, $q_3 = 2$, $q_4 = 3$, $q_5 = 4$, $q_6 = 1$ *e o mínimo procurado é* $1 + 4 + 3 = 3 + 2 + 3 = 3 + 4 + 1 = 8$.

Solução.

Nota. Boa parte das ideias dessa solução foram retiradas da solução oficial.

Fixado n, a sequência $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \cdots < \frac{p_M}{q_M}$ apresentada no problema é a sequência de Farey F_n.

Nota. A sequência de Farey possui diversas propriedades interessantes, parte das quais pode ser encontrada em The Farey Sequence da universidade de Edinburgh, e também já apareceu em diversos problemas de olimpíadas, principalmente como parte da prova de lemas auxiliares.

Olhe USOMO 2020/4, USA TSTST 2013/2, RMM 2020/5, USAMO 1999/3, USAMO 1997/6 por exemplo.

Antes de ir ao problema, vamos provar as seguintes duas propriedades de sequências de Farey que serão úteis:

Lema 1. As frações irredutíveis $\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ são consecutivas na sequência de Farey F_n se e somente se $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = 1$ e $q_i + q_{i+1} > n$.

Prova. Primeiramente, vamos ver que essas condições são suficientes.

Suponha por contradição que $\frac{p_i}{q_i} < \frac{a}{b} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, com $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$ e $b \le n$.

$\frac{p_i}{q_i} < \frac{a}{b}$ implica que $bp_i + 1 \le aq_i$ e $\frac{a}{b} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ implica $aq_{i+1} + 1 \le bp_{i+1}$.

Multiplicando essas duas desigualdades temos $abp_iq_{i+1} + aq_{i+1} + bp_i + 1 \le abp_{i+1}q_i$, ou equivalentemente, $bp_i + aq_{i+1} < ab(p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1}) = ab$.

Mas isso implica que $\frac{p_i}{a} + \frac{q_{i+1}}{b} < 1$ ou equivalentemente, $\frac{p_i}{a} < \frac{b-q_{i+1}}{b}$.

Por fim, isso implica que $\frac{p_i}{b-q_{i+1}} < \frac{a}{b} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ e temos

$$\begin{aligned}
& q_{i+1}p_i < bp_{i+1} - p_{i+1}q_{i+1} \\
\iff & -1 = q_{i+1}p_i - p_{i+1}q_i < p_{i+1}(b - (q_i + q_{i+1})) \\
\iff & 0 \le p_{i+1}(b - (q_i + q_{i+1})) \\
\iff & b \ge q_i + q_{i+1} > n
\end{aligned}$$

Isso é uma contradição pois $b \le n$. Logo não existe fração entre $\frac{p_i}{q_i}$ e $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ com denominador menor ou igual a n, como queríamos provar.

Provaremos agora que essas condições são necessárias.

É fácil ver que devemos ter $q_i + q_{i+1} > n$, caso contrário $\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, donde ao simplificar $\frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}$ obteríamos uma fração entre $\frac{p_i}{q_i}$ e $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ em F_n.

Vamos agora ver que $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = 1$ é de fato necessário.

Note que de $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} > \frac{p_i}{q_i}$ temos $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} > 0$, então caso não tivéssemos $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = 1$ teríamos $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} \ge 2$.

Suponha portanto por contradição que $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} \ge 2$, $q_i + q_{i+1} > n$, e ainda $\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ são de fato consecutivas em F_n.

Temos então que

$$\begin{aligned}\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} &= \frac{p_{i+1}q_i - q_{i+1}p_i}{q_i q_{i+1}} \\ &\geq \frac{2}{q_i q_{i+1}} \\ &\geq \frac{2}{n}\end{aligned}$$

($q_i q_{i+1} \geq n$ pois $q_i + q_{i+1} \geq n+1$ e q_i, q_{i+1} são inteiros positivos.)

Mas obviamente isso é impossível pois as frações de F_n incluem todas as frações em $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ (após simplificar seus denominadores), e portanto a distância entre duas frações consecutivas de F_n é no máximo $\frac{1}{n}$. □

Lema 2. Se $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} < \frac{p_i}{q_i} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ são consecutivos em uma sequência de Farey então $\frac{p_i}{q_i}$ é o mediante de $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ e $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$. Isto é, $\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1}+p_{i+1}}{q_{i-1}+q_{i+1}}$.

Prova. Pelo lema anterior, $p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = 1$ e $p_{i+1}q_i - q_{i+1}p_i = 1$.

Igualando essas duas expressões temos

$$\begin{aligned}& p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = p_{i+1}q_i - q_{i+1}p_i \\ \iff & p_i q_{i-1} + p_i q_{i+1} = p_{i+1}q_i + p_{i-1}q_i \\ \iff & \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1}+p_{i+1}}{q_{i-1}+q_{i+1}}\end{aligned}$$

□

Vamos agora fazer casos pequenos.

2. $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$
3. $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$
4. $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$
5. $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$
6. $\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$
7. $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$
8. $\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}$
9. $\frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1}$
10. $\frac{0}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{1}{1}$

Seja $f(n)$ o menor valor possível para $q_{i-1} + q_i + q_{i+1}$, considerando as frações com denominador positivo menor ou igual a n.

Os exemplos acima nos dão

n	$f(n)$
2	4
3	6
4	8
5	10
6	10
7	14
8	14
9	14
10	16

Vamos conseguir uma cota inferior para $f(n)$ usando o segundo lema.
Seja $d = \text{mdc}(p_{i-1} + p_{i+1}, q_{i-1} + q_{i+1})$.
Temos

$$q_{i-1} + q_i + q_{i+1} = q_{i-1} + \frac{q_{i-1} + q_{i+1}}{d} + q_{i+1} = (q_{i-1} + q_{i+1})\frac{d+1}{d} \qquad (\clubsuit)$$

Mas note que $q_{i-1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} \geq n+1 \quad (\spadesuit)$, senão a fração $\frac{p_{i-1}+\frac{p_{i-1}+p_{i+1}}{d}}{q_{i-1}+\frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d}}$ estaria entre $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ e $\frac{p_i}{q_i}$.
Analogamente, $q_{i+1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} \geq n+1 \quad (\spadesuit)$.
Somando essas duas inequações e simplificando temos

$$q_{i-1} + q_{i+1} \geq \frac{2d(n+1)}{d+2} \qquad (\heartsuit)$$

Logo, $q_{i-1} + q_i + q_{i+1} = \frac{2d(n+1)}{d+2} \cdot \frac{d+1}{d} = \frac{2(n+1)(d+1)}{d+2} \geq \frac{4(n+1)}{3}$, onde na última inequação usamos que $\frac{d+1}{d+2} \geq \frac{2}{3}$ que é verdade pois $d \geq 1$.

É claro, isso implica que $f(n) \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil$

Vamos agora comparar os valores de $f(n)$ com essa cota inferior:

n	$f(n)$	$\left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil$	$f(n) - \left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil$
2	4	4	0
3	6	6	0
4	8	7	1
5	10	8	2
6	10	10	0
7	14	11	3
8	14	12	2
9	14	14	0
10	16	15	1

Primeiramente, fica claro que $n = 2$ será uma exceção à regra geral de $f(n)$.

Considerando os outros valores, vemos que a quarta coluna coincide para $n = 3, 9$ e $n = 4, 10$. Isso nos motiva a fazer mais casos inciais.

Com isso, descobrimos que a quarta coluna também coincide para $n = 5, 11$, $n = 6, 12$, $n = 7, 13$ e $n = 8, 14$.

Nota. Fazer esses casos iniciais pode parecer trabalhoso, mas não é tão demorado quanto parece! Usando o segundo lema podemos construir a sequência de Farey F_{n+1} a partir da sequência de Farey F_n simplesmente verificando para cada par de frações consecutivas em F_n se seu mediante, quando simplificado, tem denominador no máximo $n+1$.

Por sua vez, essa "coincidência" e o fato de que $f(7) = f(8) = f(9)$ nos motiva a considerar uma fórmula para $f(n)$ que dependa do valor de $n \pmod 6$.

Supondo que essa forma seja linear em n (o que é bem razoável considerando sua proximidade com a cota inferior, que é linear em n) com os casos iniciais chegamos no seguinte:

Conjectura. Para $n > 2$ vale

$$f(n) = \begin{cases} \frac{4n+6}{3} & \text{se } n \equiv 0 \pmod 6 \\ \frac{4n+14}{3} & \text{se } n \equiv 1 \pmod 6 \\ \frac{4n+10}{3} & \text{se } n \equiv 2 \pmod 6 \\ \frac{4n+6}{3} & \text{se } n \equiv 3 \pmod 6 \\ \frac{4n+8}{3} & \text{se } n \equiv 4 \pmod 6 \\ \frac{4n+10}{3} & \text{se } n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

Uma maneira mais natural de escrever a fórmula acima é a seguinte:

$$\begin{aligned} f(6\tilde{n}) &= 8\tilde{n}+2 \\ f(6\tilde{n}+1) &= 8\tilde{n}+6 \\ f(6\tilde{n}+2) &= 8\tilde{n}+6 \\ f(6\tilde{n}+3) &= 8\tilde{n}+6 \\ f(6\tilde{n}+4) &= 8\tilde{n}+8 \\ f(6\tilde{n}+5) &= 8\tilde{n}+10 \end{aligned}$$

Vamos agora usar os casos iniciais para mostrar que esses valores são, de fato, alcançados.

Lema 3. Para $n > 2$, os valores mínimos de f da nossa conjectura são de fato alcançados pelas seguintes triplas de frações:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\frac{n}{3}+1}, \frac{2}{\frac{2n}{3}+1}, \frac{1}{\frac{n}{3}}\right) && \text{se } n \equiv 0 \pmod 6 \\
&\left(\frac{1}{\frac{n+5}{3}}, \frac{2}{\frac{2n-2}{3}+3}, \frac{1}{\frac{n+2}{3}}\right) && \text{se } n \equiv 1 \pmod 6 \\
&\left(\frac{1}{\frac{n+4}{3}}, \frac{2}{\frac{2n-4}{3}+3}, \frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right) && \text{se } n \equiv 2 \pmod 6 \\
&\left(\frac{1}{\frac{n}{3}+1}, \frac{2}{\frac{2n}{3}+1}, \frac{1}{\frac{n}{3}}\right) && \text{se } n \equiv 3 \pmod 6 \\
&\left(\frac{\frac{n-4}{6}}{\frac{n-1}{3}}, \frac{\frac{n-1}{3}}{\frac{2n+4}{3}}, \frac{\frac{n+2}{6}}{\frac{n+5}{3}}\right) && \text{se } n \equiv 4 \pmod 6 \\
&\left(\frac{1}{\frac{n+1}{3}+1}, \frac{2}{\frac{2n+2}{3}+1}, \frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right) && \text{se } n \equiv 5 \pmod 6
\end{aligned}$$

Prova. Basta verificar que

(i) a soma dos três denominadores é igual ao respectivo valor de f;

(ii) todas essas triplas estão no intervalo $[0, 1]$;

(iii) todas as triplas tem numerador e denominador inteiros;

(iv) todos os denominadores são no máximo n;

(v) todas as frações são irredutíveis;

(vi) essas frações são de fato consecutivas.

Os itens (i), (ii), (iii) e (iv) são facilmente verificados.

Para o item (v), basta calcular o mdc do numerador e do denominador considerando o valor de $n \pmod 6$.

Para o item (vi), basta verificar que as condições do primeiro lema se verificam. $\square$

Note que para $n \equiv 0 \pmod 6$ e $n \equiv 3 \pmod 6$ a cota inferior já é suficiente, pois $\left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+1)}{3} \right\rceil = 8\tilde{n}+2$ e $\left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+4)}{3} \right\rceil = 8\tilde{n}+6$.

Vamos agora melhorar a cota inferior para os outros casos.

Primeiramente, vamos supor que $d > 1$.

Por ($\clubsuit$) e ($\heartsuit$), temos $q_{i-1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} + q_{i+1} \geq \frac{2(d+1)(n+1)}{d+2} \geq \frac{3n+3}{2}$.

Para $n \geq 19$ temos $\frac{3n+3}{2} \geq \frac{4n+14}{3}$. Isso resolve o caso $n \equiv 1 \pmod 6$ para $n \geq 19$.

De modo similar, resolvemos $n \equiv 2 \pmod 6$ e $n \equiv 5 \pmod 6$ para $n \geq 11$ pois nesse caso $\frac{3n+3}{2} \geq \frac{4n+10}{3}$.

O mesmo vale para $n \equiv 4 \pmod 6$ para $n \geq 7$ pois nesse caso $\frac{3n+3}{2} \geq \frac{4n+8}{3}$.

Como 13 é o maior numero congruente a $1 \pmod 6$ menor que 19, resta fazer somente o caso em que $d = 1$, pois já calculamos f para $n \leq 13$ e é fácil ver que os valores que encontramos de fato coincidem com a fórmula apresentada.

Mas note que quando $d = 1$, $q_{i-1} + q_i + q_{i+1} = 2(q_{i-1} + q_{i+1})$ é par.

Isso implica que $f(n)$ é pelo menos o menor par maior ou igual a $\left\lceil \frac{4n+4}{3} \right\rceil$.

Vamos escrever $n = 6\tilde{n} + r$ onde $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$ e $0 \le r < 6$ é o resto da divisão de n por 6.

É fácil ver agira que isso conclui o caso em que $n \equiv 4 \pmod 6$ pois $\left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+4)+4}{3} \right\rceil = 8\tilde{n} + 7$ e o menor par maior ou igual a esse número é $8\tilde{n} + 8$.

Se $n \equiv 1 \pmod 6$, então $\left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+1)+4}{3} \right\rceil = \frac{4(6\tilde{n}+1)+4}{3} = 8\tilde{n} + 4$, e portanto só podemos ter igualdade em $q_{i-1} + q_i + q_{i+1} \ge \left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+1)+4}{3} \right\rceil$ caso tenhamos igualdade em ($\spadesuit$): $q_{i-1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} \ge n + 1$ e $q_{i+1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} \ge n + 1$.

Como estamos no caso em que $d = 1$ e $2(q_{i-1}+q_{i+1}) = 8\tilde{n}+4$, as duas igualdades acima implicam que $q_{i-1} = 2\tilde{n} = q_{i+1}$. Mas então, evidentemente p_{i-1} e p_{i+1} são ímpares, donde $2 \mid \text{mdc}(p_{i-1} + p_{i+1}, 4\tilde{n}) = \text{mdc}(p_{i-1} + p_{i+1}, q_{i-1} + q_{i+1}) = d$, e temos uma contradição pois $d = 1$.

Logo, devemos ter que $f(n)$ é pelo menos o primeiro par maior que $8\tilde{n} + 4$, isto é, $8\tilde{n} + 6$.

O caso $n \equiv 2 \pmod 6$ é similar:

Como nesse caso $\left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+2)+4}{3} \right\rceil = \frac{4(6\tilde{n}+2)+4}{3} = 8\tilde{n} + 4$, só podemos ter igualdade em $q_{i-1} + q_i + q_{i+1} \ge \left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+2)+4}{3} \right\rceil$ caso tenhamos igualdade em $q_{i-1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} \ge n + 1$ e $q_{i+1} + \frac{q_{i-1}+q_{i+1}}{d} \ge n + 1$, e concluímos portanto que $q_{i-1} = 2\tilde{n} = q_{i+1}$ e consequentemente $2 \mid d$, contradição.

Logo nesse caso $f(n)$ é pelo menos o primeiro par maior que $8\tilde{n} + 4$, isto é, $8\tilde{n} + 6$.

Analogamente, temos o caso $n \equiv 5 \pmod 6$:

Como $\left\lceil \frac{4(6\tilde{n}+5)+4}{3} \right\rceil = \frac{4(6\tilde{n}+5)+4}{3} = 8\tilde{n} + 8$ concluímos que se $f(n) = 8\tilde{n} + 8$ então $d = 1$ e $q_{i-1} = 2\tilde{n} + 2 = q_{i+1}$ e consequentemente $2 \mid d$, contradição. Logo $f(n) \ge 8\tilde{n} + 10$, como queríamos.

Assim concluímos o problema provando a conjectura acima.