Soluções do TM² Nível A

Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Uma *palavra* é uma sequência de letras maiúsculas do nosso alfabeto (isto é, há 26 possíveis letras). Uma palavra é chamada de *palíndromo* se tem pelo menos duas letras e ela é a mesma palavra se lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, as palavras ARARA e NOON são palíndromos, mas BOBO e A não são palíndromos.

Dizemos que uma palavra x *contém* uma palavra y se existem letras *consecutivas* em x que juntas formam y. Por exemplo, a palavra ARARA contém a palavra RARA e também a palavra ARARA, mas não contém a palavra ARRA.

Calcule a quantidade de palavras de 14 letras que contém algum palíndromo.

Solução. Vamos chamar de letras da ponta de uma palavra a primeira e a última letra desta palavra.

Lema 1. Se ao tirarmos as duas letras da ponta de um palíndromo obtermos uma palavra com ao menos duas letras então esta será um palíndromo.

Demonstração. Evidente. □

Lema 2. Uma palavra não contém um palíndromo se e somente se não contém nenhuma palavra do tipo xx e nenhum do tipo xyx, onde x e y são letras (não necessariamente distintas).

Demonstração. Claramente, se uma palavra contém alguma palavra do tipo xx ou xyx então ela contém um palíndromo.

Basta agora provar que se uma palavra contém um palíndromo então ela contém uma palavra do tipo xx ou xyx.

Mas note que todo palíndromo contém uma palavra desse tipo, uma vez que pelo lema anterior podemos retirar as letras das pontas desse palíndromo obtendo um palíndromo menor até que o palíndromo resultante tenha 2 ou 3 letras, isto é, seja da forma xx ou xyx. □

A quantidade total de palavras de 14 letras é, pelo princípio multiplicativo, 26^{14}.

Vamos agora prosseguir com uma contagem complementar, isto é, contaremos a quantidade de palavras de 14 letras que não contém um palíndromo.

Pelo segundo lema, para que uma palavra não contenha nenhum palíndromo, é necessário e suficiente garantir que ela não contenha nenhuma palavra do tipo xx nem xyx.

Assim há 26 possibilidades para a 1ª letra, 25 para a 2ª (pois ela não pode ser igual a 1ª), 24 para a 3ª (pois ela não pode ser igual a 1ª nem a 2ª), 24 para a 4ª (pois ela não pode ser igual a 2ª nem a 3ª), $\dots$, 24 para 14ª (pois ela não pode ser igual a 12ª nem a 13ª). Logo, há $26 \cdot 25 \cdot 24^{12}$ palavras de 14 letras que contém um palíndromo.

Portanto, o número de palavras de 14 letras que contém um palíndromo é $\boxed{26^{14} - 26 \cdot 25 \cdot 24^{12}}$.

Problema 2 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Mostre que não existem triplas de inteiros positivos (x, y, z) satisfazendo a equação

$$x^2 = 5^y + 3^z.$$

Nota. O enunciado original dizia triplas de inteiros não negativos, porém $(2, 0, 1)$ é uma tripla (a única) de inteiros não negativos satisfazendo a equação.

Solução. Primeiramente perceba que x^2 é par pois $5^y + 3^z$ é a soma de dois ímpares. Consequentemente, x é par.

Mas então, $0 \equiv 5^y + 3^z \equiv 1 + (-1)^z \pmod 4$ (pois x^2 é divisível por 4 uma vez que x é par), donde concluímos que z é ímpar.

Claramente x não pode ser divisível por 3, senão $5^y = x^2 - 3^z$ seria múltiplo de 3, um absurdo.

Dessa forma, ou $x \equiv 1 \pmod 3$, ou $x \equiv -1 \pmod 3$, e consequentemente, $x^2 \equiv (\pm 1)^2 = 1 \pmod 3$.

Como $1 \equiv x^2 \equiv 5^y + 3^z \equiv (-1)^y + 0 \pmod 3$, y deve ser par.

Vamos escrever então $y = 2\tilde{y}$, sendo $\tilde{y}$ um inteiro positivo.

Agora temos

$$\begin{aligned} & x^2 = 5^y + 3^z \\ \Longrightarrow\ & x^2 - 5^{2\tilde{y}} = 3^z \\ \Longrightarrow\ & (x - 5^{\tilde{y}})(x + 5^{\tilde{y}}) = 3^z \end{aligned}$$

Como 3 é primo, ou $x - 5^{\tilde{y}}$ é 1, ou 3 divide tanto $x - 5^{\tilde{y}}$ quanto $x + 5^{\tilde{y}}$.

No primeiro caso, $x = 5^{\tilde{y}} + 1$ e consequentemente $3^z = 1 + 2 \cdot 5^{\tilde{y}}$.

Mas então, $3^z \equiv 1 \pmod 5$ e é fácil ver que z deve ser par, pois $\operatorname{ord}_5(3) = 4$ (como prova-se calculando 3^1, 3^2, 3^3 e 3^4 módulo 5), isto é, o menor inteiro positivo n para o qual $3^n \equiv 1 \pmod 5$ é 4 (donde facilmente se prova que todos os inteiros positivos com essa propriedade são divisíveis por 4). Isso é uma contradição.

No segundo caso temos uma contradição pois 3 iria dividir $x + 5^{\tilde{y}} - (x - 5^{\tilde{y}}) = 2 \cdot 5^{\tilde{y}}$.

Como em qualquer caso chegamos a uma contradição, a equação não pode possuir nenhuma solução com x, y e z inteiros positivos. $\square$

Problema 3 - Escrito por Tiago Trindade

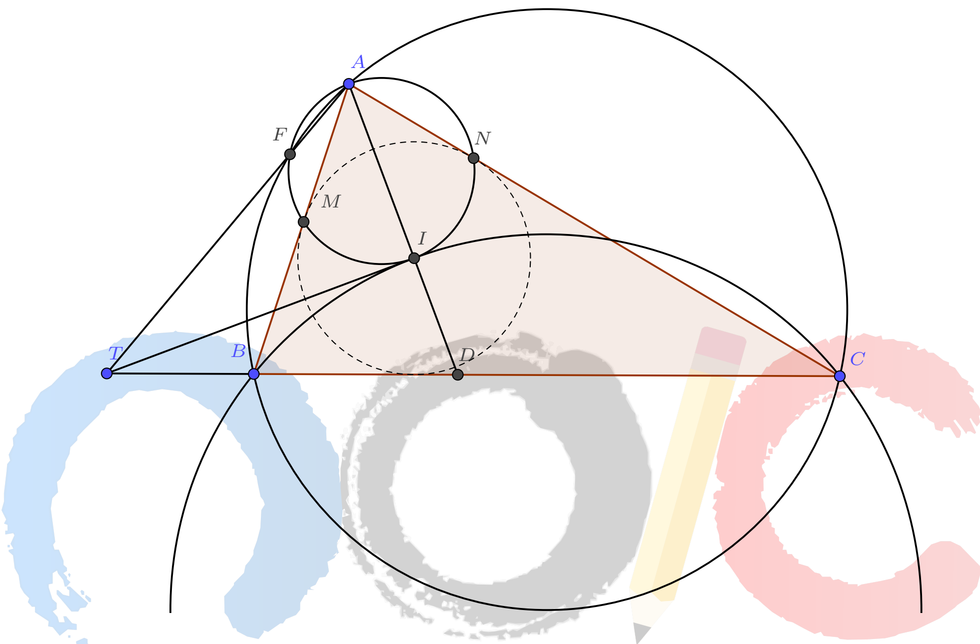
Problema. No triângulo escaleno ABC, sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC. Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC. Seja J a intersecção de TI com a paralela à FI que passa por D. Prove que a reta AJ é perpendicular à BC.

Nota: o incentro de um triângulo é a interseção das suas respectivas bissetrizes internas.

Solução. Note que AI é diâmetro de (AMN) pois $\angle AMI = 90°$ uma vez que I é o centro do incírculo e AB é tangente ao incírculo.

Consequentemente $\angle AFI = 90°$, isto é, FI é perpendicular à AF. Mas como DJ é paralelo à FI, também temos que DJ é perpendicular a AF.

Logo, é suficiente provar que $\angle TIA = 90°$, uma vez que isso implicaria que J é o ortocentro do triângulo ATD, e consequentemente AJ seria perpendicular à linha TD e portanto à BC.



Mas AI é um diâmetro de (AMN), logo é suficiente mostrar que TI é tangente à (AMN).

Como $T \in AF$, parece interessante provar que T é o centro radical de (AMN), (ABC) e algum outro círculo. Isso motiva o seguinte lema.

Lema 3. (AMN) e (BIC) são tangentes.

Demonstração. Como AI é um diâmetro de (AMN), o centro de (AMN) está sobre a linha AI.

É fato conhecido que o ponto médio do arco $\overset{\frown}{BC}$ do círculo (ABC) é equidistante de B, I e C, e está sobre a linha AI. Mas este ponto é justamente o centro de (BIC).

Logo, os centros de (AMN) e (BIC) estão sobre a linha AI, donde concluímos que I deve ser sua única intersecção, isto é, (AMN) e (BIC) são tangentes. □

Agora vemos que T está sobre o eixo radical de (AMN) e (ABC) e sobre o eixo de (BIC) e (ABC), donde é o centro radical desses três círculos, e consequentemente está sobre a tangente comum à (AMN) e (BIC) que passa por I.

Portanto TI é tangente à (AMN), como queríamos. □

Problema 4 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Encontre todos os inteiros positivos a, b e c tais que $3ab = 2c^2$ e $a^3 + b^3 + c^3$ seja o dobro de um número primo.

Dica. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Solução.

Como $3ab = 2c^2$, temos que $3abc = 2c^3$.

Logo,

$$2p = a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca)$$

Note que os únicos divisores de $2p$ são 1, 2, p e $2p$.

Vamos agora dividir em 4 casos:

(i) $a + b - c = 1$. Note que $3ab = 2c^2 = 2(a + b - 1)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2 + 4ab - 4a - 4b$. Logo, pela desigualdade da média aritmética e média geométrica temos

$$4a + 4b = 2a^2 + 2b^2 + 2 + ab \geq 4ab + 2 + ab > 4ab$$

isto é, $a + b > ab$ donde ou $b = 1$ ou $\frac{b}{b-1} > a$ e consequentemente $2 \geq 1 + \frac{1}{b-1} = \frac{b}{b-1} > a$, o que implica $a = 1$.

Suponha sem perda de generalidade que $a = 1$. Como $a + b - c = 1$ temos $b = c$. Então $3ab = 2c^2$ implica que $3c = 2c^2$ donde $3 = 2c$, contradição.

Logo não temos solução nesse caso.

(ii) $a + b - c = 2$. De modo similar ao item anterior,

$$3ab = 2c^2 = 2(a + b - 2)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 8 + 4ab - 8a - 8b \geq 8ab + 8 - 8a - 8b$$

donde $a + b > a + b - 1 \geq \frac{5ab}{8} > \frac{ab}{2}$.

Mas então ou $b \leq 2$ ou $6 \geq 2 + \frac{4}{b-2} = \frac{2b}{b-2} > a$. Analogamente ou $a \leq 2$ ou $6 > b$.

Caso $b = 1$ temos $a = c + 1$. Assim $3ab = 2c^2$ implica que $2c^2 - 3(c + 1) = 0$, que não possui soluções inteiras, e portanto não há soluções nesse caso.

Caso $b = 2$ temos $a = c$. Assim $3ab = 2c^2$ implica $a = c = 3$.

Os casos em que $a = 1$ ou $a = 2$ são análogos.

Agora podemos supor sem perda de generalidade que $1 \leq a \leq b \leq 5$. Testando os $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ pares (a, b) nestas condições vemos que somente $a = 2$, $b = 3$ levam a uma solução.

Portanto, nesse caso temos as soluções $(2, 3, 3)$ e $(3, 2, 3)$.

(iii) $a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca = 1$. Note que pela desigualdade da média aritmética e geométrica temos $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$ e $\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca$. Portanto

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca \geq ab + bc + ca - ab + bc + ca = 2c(a + b)$$

que obviamente não é possível.

(iv) $a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca = 2$. De modo análogo ao item anterior temos $2 \geq 2c(a + b)$, que não é possível, pois $a + b \geq 2$.

Portanto, as únicas soluções são $\boxed{(3, 2, 3)}$ e $\boxed{(2, 3, 3)}$, com $p = 31$ em ambos os casos.

□

Motivação para a solução. É fácil verificar que removendo a condição $3ab = 2c^2$ existem várias soluções para $a^3 + b^3 + c^3 = 2p$ com a, b, c inteiros positivos e p primo. Logo a condição $3ab = 2c^2$ é fundamental para o problema.

Mas também é fácil ver que mesmo com essa condição a equação tem várias soluções módulo q, para diversos primos q.

Isso nos leva possivelmente a pensar em desigualdades, mas após algum tempo tentado é fácil ver que essa abordagem é muito "fraca" para resolver o problema.

Logo a solução do problema provavelmente será em sua essência totalmente algébrica. Após nos convencermos disso, não é difícil pensar na identidade apresentada.