Soluções do TM² Nível B

Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Os números reais não nulos a, b e c são tais que $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab = a^3 + b^3 + c^3$. Calcule o(s) valor(es) que $a + b + c$ assume.

Solução.

$$\begin{aligned} & a^2 - bc = b^2 - ac \\ \iff & a^2 - b^2 = bc - ac \\ \iff & (a-b)(a+b) = -c(a-b) \end{aligned}$$

Vamos dividir em casos.

Primeiramente, se $a = b$ então

$$\begin{aligned} & a^2 - bc = c^2 - ab \\ \iff & a(a-c) = c^2 - a^2 \\ \iff & a(a-c) = -(a-c)(a+c) \end{aligned}$$

Se $a = c$, então $a^2 - bc = a^3 + b^3 + c^3$ implica que $3a^3 = 0$ e consequentemente $a = b = c = 0$. É fácil ver que nesse caso temos que os 4 termos do enunciado de fato são iguais e temos $a + b + c = 0$.

Se $a \neq c$ então simplificando a equação obtida acima temos $a = -a - c$ e consequentemente $c = -2a$. Portanto $a + b + c = a + a - 2a = 0$.

Agora vamos para o segundo caso.

Se $a \neq b$, simplificando a primeira equação do enunciado temos $a + b = -c$, donde $a + b + c = 0$.

Portanto o único valor possível para $a + b + c$ é 0 (obtido quando, por exemplo, $a = b = c = 0$).

□

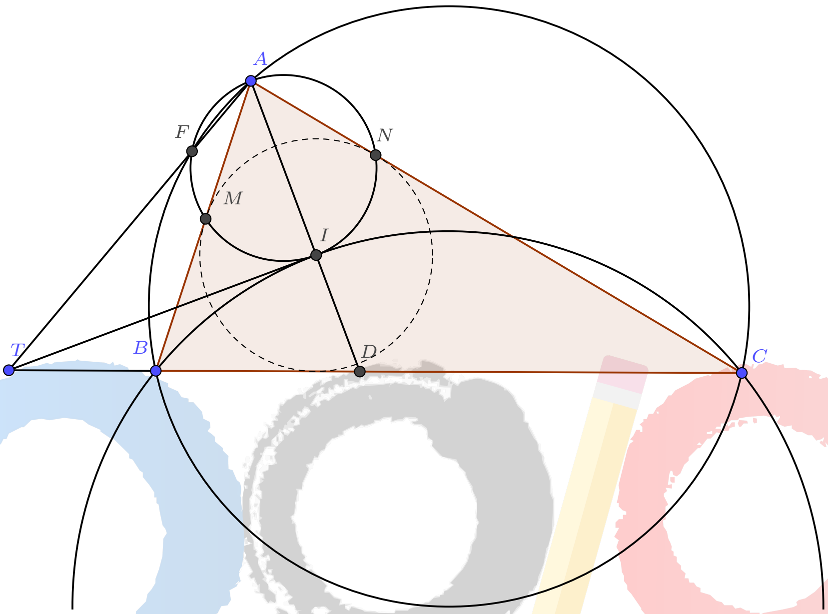
Problema 2 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. No triângulo escaleno ABC, sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC. Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC. Seja J a intersecção de TI com a paralela à FI que passa por D. Prove que a reta AJ é perpendicular à BC.

Solução. Note que AI é diâmetro de (AMN) pois $\angle AMI = 90°$ uma vez que I é o centro do incírculo e AB é tangente ao incírculo.

Consequentemente $\angle AFI = 90°$, isto é, FI é perpendicular à AF. Mas como DJ é paralelo à FI, também temos que DJ é perpendicular a AF.

Logo, é suficiente provar que $\angle TIA = 90°$, uma vez que isso implicaria que J é o ortocentro do triângulo ATD, e consequentemente AJ seria perpendicular à linha TD e portanto à BC.



Mas AI é um diâmetro de (AMN), logo é suficiente mostrar que TI é tangente à (AMN).

Como $T \in AF$, parece interessante provar que T é o centro radical de (AMN), (ABC) e algum outro círculo. Isso motiva o seguinte lema.

Lema 1. (AMN) e (BIC) são tangentes.

Demonstração. Como AI é um diâmetro de (AMN), o centro de (AMN) está sobre a linha AI.

É fato conhecido que o ponto médio do arco $\overset{\frown}{BC}$ do círculo (ABC) é equidistante de B, I e C, e está sobre a linha AI. Mas este ponto é justamente o centro de (BIC).

Logo, os centros de (AMN) e (BIC) estão sobre a linha AI, donde concluímos que I deve ser sua única intersecção, isto é, (AMN) e (BIC) são tangentes. □

Agora vemos que T está sobre o eixo radical de (AMN) e (ABC) e sobre o eixo de (BIC) e (ABC), donde é o centro radical desses três círculos, e consequentemente está sobre a tangente comum à (AMN) e (BIC) que passa por I.

Portanto TI é tangente à (AMN), como queríamos. □

Problema 3 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja C o conjunto de pontos (x, y) de coordenadas inteiras no plano com $1 \leq x \leq 900$ e $1 \leq y \leq 1000$. Um polígono P cujos vértices estão em C é dito *especial* se P tem exatamente zero ou dois vértices em cada linha e cada coluna e todos os ângulos internos de P são $90°$ ou $270°$. Determine o maior valor de k tal que podemos pintar k pontos de C de modo que qualquer subconjunto desses k pontos não seja o conjunto de vértices de um polígono especial.

Solução. A resposta é $k = 1899$ pontos. Comecemos construindo um exemplo para esse número. Para isso, pinte (x, y) se e somente se $x = 1$ ou $y = 1$, o que trivialmente funciona. Agora provemos que com mais pontos haverá um polígono especial, supondo por absurdo que existe $k > 1899$ com essa propriedade.

Primeiramente, construa um grafo de incidências para o grid, isto é um grafo bipartido de 1900 vértices, no qual há 900 vértices representando as colunas e outros 1000 vértices representando as linhas. Neste grafo conecte a coluna x com a linha y se e somente se o ponto (x, y) estiver pintado. Também, note que com essa construção é trivial que se há um polígono quase especial com mais de 2 vértices em uma linha/coluna, então podemos construir um polígono especial com um subconjunto dele; portanto podemos ignorar essa condição por enquanto. A observação mais importante do problema é que um polígono especial é simplesmente um ciclo no grafo de incidência. É um fato conhecido que um grafo acíclico conexo está contido em uma árvore. Para fazer uso dessa propriedade, separe o grafo em componentes conexas com $a_1, a_2, \ldots$ vértices e $b_1, b_2, \ldots$ arestas. Pela propriedade, cada subgrafo acíclico conexo está contido em uma árvore de $a_i - 1$ vértices, portanto $a_i - 1 \geq b_i$. Somando tudo: $k = \sum b_i \leq \sum(a_i - 1) \leq -1 + \sum a_i = 1900 - 1 = 1899$. □

Problema 4 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Encontre todos os inteiros a para os quais existem infinitos inteiros positivos n tais que n divide $\phi(n)! + a$.

Nota: $\phi(n)$ denota, para n um inteiro positivo, a quantidade de números inteiros positivos m menores ou iguais a n que possuem $\operatorname{mdc}(n, m) = 1$. Por exemplo, $\phi(6) = 2$, pois apenas 1 e 5 são menores ou iguais a 6 e verificam que $\operatorname{mdc}(6, 1) = 1 = mdc(6, 5)$.

Dica. É fato conhecido que, sendo $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ a fatoração em primos de n, temos que $\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

Dica. O teorema de Wilson diz que p divide $(p-1)! + 1$ se e somente se p é primo.

Passo a passo.

1. Prove que $a = 0$ e $a = 1$ funcionam. Após isso, suponha que a é não nulo, e consequentemente possui finitos divisores.
2. Mostre que se $2^\alpha \mid n$ então $2^\alpha \mid \phi(n)!$, exceto quando $n = 4$.
3. Suponha que $n > 4$. Seja $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ a fatoração em primos de n. Mostre que se p_i é primo ímpar e $\alpha_i > 1$, então $p_i^{\alpha_i} \mid \phi(n)!$.
4. Conclua que se $p_i^{\alpha_i} \mid n$ e $p_i^{\alpha_i} \nmid \phi(n)!$ então $n = p_i$ ou $n = 2p_i$.
5. Explique por que podemos ignorar o caso $n = 2p_i$.
6. Resta lidar com o caso $n = p$ é primo. Note que para p primo, $\phi(p) = p - 1$. Use o teorema de Wilson para concluir que se existem infinitos primos p tais que $p \mid (p-1)! + a$ então $a = 1$. Para isso, pense em como relacionar a divisibilidade com o tamanho em módulo de a.

Solução.

$a = 0$ funciona pois $2^n \mid \phi(2^n)! + 0$ para todo $n > 1$, uma vez que $\phi(2^n)! = (2^{n-1})!$, e há ao menos um par menor que 2^{n-1} nesse fatorial pois $n > 1$.

$a = 1$ funciona pois $p \mid \phi(p)! + 1$ para todo primo p, uma vez que $\phi(p)! = (p-1)!$, e $p \mid (p-1)! + 1$ pelo Teorema de Wilson.

Como há finitos naturais menores ou iguais a 4, podemos supor $n > 4$.

Vamos provar que se $a \notin \{0, 1\}$ então $n \mid \phi(n)!$ exceto quando n é primo ímpar ou é o dobro de um primo ímpar.

Suponha que $2^\alpha \mid n$.

Caso $1 \leq \alpha \leq 2$, $2^\alpha \mid \phi(n)!$ pois como $n > 4$, n deve ter um fator primo ímpar e consequentemente $\phi(n) \geq (3-1)(2-1)2^{2-1} = 4$.

Caso $\alpha > 2$, então $2^\alpha \mid \phi(n)!$ pois $\phi(n) \geq 2^{\alpha-1} > 2$, e consequentemente $\phi(n)!$ tem ao menos $(\alpha - 1) + 1 = \alpha$ fatores 2.

Portanto, se $2^\alpha \mid n$ então $2^\alpha \mid \phi(n)!$.

Note agora que se p_i é um primo ímpar e $p_i^{\alpha_i} \mid n$, então $(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} \mid \phi(n)$. Consequentemente, como $(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} \geq 2p_i^{\alpha_i - 1}$, $\phi(n)!$ tem ao menos $2(\alpha_i - 1)$ fatores p_i. Quando $\alpha_i > 1$, $2(\alpha_i - 1) \geq \alpha_i$, e consequentemente $p_i^{\alpha_i} \mid \phi(n)!$. Quando $\alpha_i = 1$, a única possibilidade para termos $p_i \nmid \phi(n)!$ seria se $\phi(n) < p_i$, mas caso n tivesse qualquer outro fator primo ímpar então $\phi(n) \geq (3-1)(p_i - 1) \geq p_i$, logo p_i deve ser o único primo ímpar que divide n.

Logo, caso $p_i^{\alpha_i} \mid n$ e $p_i^{\alpha_i} \nmid \phi(n)!$ devemos ter que $n = 2^\alpha p_i$. Mas é claro, se $\alpha > 1$ então $\phi(n) \geq 2^1 p_i > p_i$.

Desta forma ou $n = p_i$ ou $n = 2p_i$. Como $2 \mid \phi(n)!$, caso $n = 2p_i$ e $n \nmid \phi(n)!$ devemos ter que $p_i \nmid \phi(n)!$, e consequentemente podemos considerar somente o primeiro caso.

Mas pelo Teorema de Wilson temos que $\phi(p)! + a = (p-1)! + a \equiv a - 1 \pmod{p}$. Mas é claro, $|a - 1| < p$ com um número finito de exceções, e consequentemente há um número finito de primos p tais que $p \mid \phi(p)! + a$.

Deste modo, podemos supor que $p_i^{\alpha_i} \mid \phi(n)!$ para todo primo p_i tal que $p_i^{\alpha_i} \mid n$. Mas então devemos ter que $n \mid \phi(n)!$, e consequentemente $n \mid a$, uma vez que também temos que $n \mid \phi(n)! + a$.

Como a possui uma quantidade finita de divisores (pois é não nulo), só pode existir uma quantidade finita de tais números n, como queríamos provar. $\square$