TREINAMENTO 2 - PROVA TEÓRICA
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA
XII IOAA e X OLAA de 2018

Nota Final________

NOME:

PROVA TEÓRICA - GABARITO

CADERNO DE RESPOSTAS

Instruções

- A duração da prova é de 4,5 horas;
- A prova é individual e sem consultas;
- Suas respostas deverão estar nas folhas de respostas correspondentes a cada questão. Use o verso da folha se necessário;
- Os cálculos podem ser a lápis, mas a resposta deve ser a caneta;
- A prova contém três tipos de questões:
  - **10 questões** curtas valendo **1 ponto cada**
  - **8 questões** médias valendo **2 pontos cada**
  - **2 questões** longas valendo **5 pontos cada**
- Questões sem os respectivos cálculos não serão consideradas.

Questão 1	altura máxima	$66^o 59' \approx 67^o$

Questão 1 - espaço para o cálculo

Solução:

A altura no horizonte do Polo Celeste é igual à latitude do local de observação (φ = 41°53′ N).
A altura máxima de uma estrela no horizonte corresponde à sua passagem meridiana na culminação superior.

A distância em declinação entre as duas estrelas, que por hipótese permanece fixa ao longo do tempo, vale:

$$\Delta\delta = 89^o 16' - 64^o 22' = 24^o 54'$$

Em 2800 a.C. a Polar girava em torno de Thuban, que estava a 12' do Polo Celeste.

Portanto, a altura máxima que a Polar, em 2800 a.C. atingia, valia:

$$h_{max} = 41^o 53' + 12' + 24^o 54' = 66^o 59' \approx 67^o$$

<table>
<tr><td rowspan="3">Questão 2</td><td rowspan="2">a)</td><td>diâmetro mínimo</td><td>~ 18 km</td></tr>
<tr><td>diâmetro máximo</td><td>~ 40 km</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>magnitude aparente</td><td>$m_M \cong +14{,}88$</td></tr>
</table>

Questão 2 - espaço para o cálculo

Solução:

$$m_\odot - m_M = -2{,}5 \log\left(\frac{F_\odot}{F_M}\right)$$

Onde:

$$F_M = \frac{L_M}{4\pi(d_{obs})^2}$$

Para termos a luminosidade do 2590 MOURAO, temos que levar em conta a distância dele ao Sol (por definição, d_M = 1 U.A. = d_{obs} = d), a área de sua seção reta (ou efetiva) e seu albedo a_M.

Então:

$$L_M = \frac{L_\odot}{4\pi d^2} \times \pi(r_M)^2 \times a_M$$

Substituindo:

$$F_M = \frac{L_\odot}{16\pi^2 d^4} \times \pi(r_M)^2 \times a_M$$

A razão entre os fluxos será:

$$\frac{F_\odot}{F_M} = \frac{\frac{L_\odot}{4\pi d^2}}{\frac{L_\odot r_M^2 a_M}{16\pi d^4}} = \frac{4d^2}{r_M^2 a_M}$$

Voltando para a fórmula da magnitude:

$$m_\odot - m_M = -2{,}5 \log\left(\frac{4d^2}{r_M^2 a_M}\right)$$

Substituindo-se alguns valores:

$$(-26{,}7) - (+12{,}4) = -2{,}5 \log\left(\frac{4d^2}{r_M^2 a_M}\right) \rightarrow 15{,}64 = \log\left(\frac{4d^2}{r_M^2 a_M}\right)$$

Resolvendo para r_M:

$$r_M = \sqrt{\frac{4 \times (149{,}6 \times 10^9)^2}{10^{15{,}64} \times a_M}}$$

Para $a_M = 0{,}05 \rightarrow r_M \cong 20{,}25 \times 10^3$ m
Para $a_M = 0{,}25 \rightarrow r_M \cong 9{,}06 \times 10^3$ m

Resposta: o diâmetro do 2590 MOURAO está entre 18,12 km e 40,50 km

O estudante que colocar apenas o valor do raio terá a nota descontada.

b) Se a órbita é circular, sua distância até o Sol será seu semi-eixo maior:

$$P^2 = d^3 \rightarrow d_M = \sqrt[3]{\left(\frac{1309{,}44}{365}\right)^2} \rightarrow d_M \cong 2{,}34\ U.A.$$

Fluxo de 2590 MOURAO medido na Terra: $F_M = \frac{L_M}{4\pi(d_{M-T})^2}$

onde $d_{M\text{-}T}$ é a distância entre a Terra e 2590 MOURAO, em oposição, ou seja:

$$d_{M-T} = 2{,}34 - 1 = 1{,}34\ U.A.$$

A luminosidade de 2590 MOURAO será, como no item a): $L_M = \frac{L_\odot}{4\pi d_M^2} \times \pi(r_M)^2 \times a_M$

Substituindo:

$$F_M = \frac{L_\odot}{16\pi^2(d_{M-T})^2 d_M^2} \times \pi(r_M)^2 \times a_M$$

A razão entre os fluxo será, como no item a), será:

$$\frac{F_\odot}{F_M} = \frac{\frac{L_\odot}{4\pi d_T^2}}{\frac{L_\odot r_M^2 a_M}{16\pi(d_{M-T})^2 d_M^2}} = \frac{4}{a_M}\left(\frac{d_{M-T} \times d_M}{r_M \times d_T}\right)^2$$

Voltando para a fórmula da magnitude:

$$m_\odot - m_M = -2{,}5 \log\left[\frac{4}{a_M}\left(\frac{d_{M-T} \times d_M}{r_M \times d_T}\right)^2\right] = -2{,}5 \log\left[\frac{4}{a_M}\left(\frac{1{,}34 \times 2{,}34 \times d_T}{r_M}\right)^2\right]$$

Para $a_M = 0{,}25$ e $r_M \cong 9{,}06 \times 10^3$ m

Temos: $m_M = -26{,}7 + 2{,}5 \log\left[\frac{4}{0{,}25}\left(\frac{1{,}34 \times 2{,}34 \times 149{,}6 \times 10^9}{9{,}06 \times 10^3}\right)^2\right] \rightarrow m_M \cong +14{,}88$

O resultado será o mesmo se usarmos $a_M = 0{,}05$ e $r_M \cong 20{,}25 \times 10^3$ m

Questão 3	perda de massa (vento solar)	$\sim 10^{-14}\, M_{\odot}/ano$
	perda de massa (vento estelar)	$\sim 10^{-6}\, M_{\odot}/ano$

Questão 3 - espaço para o cálculo

Solução:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M} = 4\pi r^2 \rho \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \rho v$$

a) $\rho = n_p \times m_p = \frac{10}{cm^3} \times 1{,}67 \times 10^{-27}\, kg = 1{,}67 \times 10^{-20}\ kg/m^3$

Substituindo-se os valores, teremos:

$4\pi(149{,}6 \times 10^9)^2(1{,}67 \times 10^{-20})(4 \times 10^5) \cong 1{,}88 \times 10^9\ kg/s$

$\equiv 2{,}98 \times 10^{-14}\, M_{\odot}/ano$ $\sim 10^{-14}\, M_{\odot}/ano$

b) $\rho = n \times m_p = 3 \times \frac{10^8}{cm^3} \times 1{,}67 \times 10^{-27}\, kg = 5{,}01 \times 10^{-13}\ kg/m^3$

Substituindo-se os valores, teremos:

$4\pi(10^{12})^2(5{,}01 \times 10^{-13})(10^4) \cong 6{,}29 \times 10^{16}\ kg/s$

$\equiv 9{,}97 \times 10^{-7}\, M_{\odot}/ano$ $\sim 10^{-6}\, M_{\odot}/ano$

Observações:

O estudante receberá uma nota parcial se só conseguiu chegar até o valor da densidade.

O estudante que respondeu corretamente, mas usou outra undidade que não **massa solar/ano** terá a nota descontada.

Questão 4	porcentagem de massa	$\cong 3{,}96 \times 10^{-6}\ \% \approx 4 \times 10^{-6}\ \%$

Questão 4 - espaço para o cálculo

Solução:

A energia emitida pelo Sol em 1 segundo, à distância da Terra vale:

$$\left(0{,}4\frac{W}{m^2}\right)4\pi R^2 = 0{,}4 \times 4\pi \times (149{,}6 \times 10^9)^2 \cong 1{,}12 \times 10^{23}\ W$$

Em 2 bilhões de anos a energia total emitida será:

$$E = 1{,}12 \times 10^{23}\frac{J}{s} \times 2 \times 10^9\ anos \times 3{,}16 \times 10^7\ \frac{s}{ano} \cong 7{,}09 \times 10^{39}\ J$$

Pela relação $E = mc^2$, podemos estimar a massa transformada em energia:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{7{,}09 \times 10^{39}}{(3{,}00 \times 10^8)^2} \cong 7{,}88 \times 10^{22}\ kg$$

Comparando com a massa total do Sol:

$$\frac{7{,}88 \times 10^{22}}{1{,}99 \times 10^{30}} \times 100\% \cong 3{,}96 \times 10^{-6}\ \% \approx 4 \times 10^{-6}\ \%$$

Obs.: O estudante que respondeu corretamente, mas não usou a forma de percentual terá a nota descontada.

Questão 5	tempo	$\cong 2{,}53 \times 10^{-19}\ s$

Questão 5 - espaço para o cálculo

Por um erro de impressão saiu escrito na prova 1028 garrafas ao invés de 10^{28} garrafas.

A primeira solução corresponde ao número de garrafas que saiu na prova (1028), **considerado para a correção da questão**.

A segunda solução corresponde ao número correto (10^{28}).

Solução 1 (1028 garrafas):

1028 litros × 0,60 = 618, 8 litros de etanol

618,8 litros × 790 g/litro = 488852 g de etanol

488852 g × 1 mol/46 g = $1{,}06 \times 10^4$ mol de etanol

Energia liberada = $1{,}06 \times 10^4$ mol × 330 kJ = $3{,}5 \times 10^9$ J

Como a estrela tem a mesma temperatura do Sol, mas a mesma temperatura, então sua luminosidade é proporcional ao quadrado do raio:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = 6^2 \leftrightarrow L_* = 36L_\odot = 1{,}38 \times 10^{28}\ W$$

$$tempo = \frac{3{,}5 \times 10^9\ J}{1{,}38 \times 10^{28}\ W} \cong 2{,}53 \times 10^{-19}\ s$$

Solução 2 (10^{28} garrafas):

10^{28} litros × 0,60 = 6×10^{27} litros de etanol

6×10^{27} litros × 790 g/litro = $4{,}74 \times 10^{30}$ g de etanol

$4{,}74 \times 10^{30}$ g × 1 mol/46 g = $1{,}03 \times 10^{29}$ mol de etanol

Energia liberada = $1{,}03 \times 10^{29}$ mol × 330 kJ = $3{,}4 \times 10^{34}$ J

Como a estrela tem a mesma temperatura do Sol, mas a mesma temperatura, então sua luminosidade é proporcional ao quadrado do raio:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = 6^2 \leftrightarrow L_* = 36L_\odot = 1{,}38 \times 10^{28}\ W$$

$$tempo = \frac{3{,}4 \times 10^{34}\ J}{1{,}38 \times 10^{28}\ W} \cong 2{,}46 \times 10^{6}\ s \approx 28{,}5\ dias$$

Questão 6	magnitude aparente da estrela A	$\cong +17{,}92 \approx +18$

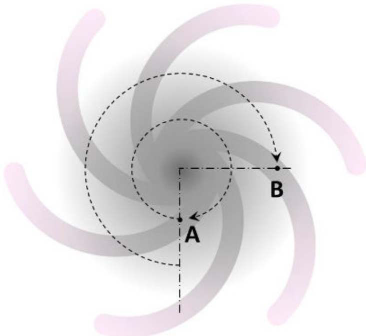
Questão 6 - espaço para o cálculo

Solução:
Em t_0, a distância entre as estrelas será: d = 10 kpc – 6 kpc = 4 kpc = 4000 pc

Pelo módulo de distância, encontramos a magnitude absoluta da estrela A:

$$M_A = m_A - 5\log d + 5 = 15{,}60 - 5\log(4000) + 5 \cong +2{,}59$$

Em 180 milhões de ano a estrela A completa uma volta completa (360º) e a estrela B, 180/240 = 3/4 de volta, ou seja, 270º.



A distância d' entre elas será: $d' = \sqrt{10^2 + 6^2} \cong 11{,}662\ kpc = 11662\ pc$

Aplicando novamente o módulo da distância:

$$m'_A = 2{,}59 + 5\log(11662) - 5 \cong +17{,}92 \approx +18$$

Questão 7	a)	índice de cor V-R (1ª)	- 0,44
		índice de cor V-R (2ª)	- 0,12
	b)	mais azulada ou mais avermelhada?	mais avermelhada
		Por quê?	explique no espaço abaixo

Questão 7 - espaço para o cálculo e explicação

Solução:
O índice de cor da primeira estrela é calculado diretamente pela definição:

$$(V - R)^{(1)} = m_V^{(1)} - m_R^{(1)} = 8{,}72 - 9{,}16 = -0{,}44$$

Para a segunda estrela, devemos calcular as magnitudes m_V e m_R, levando em conta a absorção nestas bandas:

$$m_V^{(2)} = -2{,}5 \log\left(0{,}68 \frac{F}{F_0}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{F}{F_0}\right) - 2{,}5 \log(0{,}68) = m_V^{(1)} + 0{,}42 = 9{,}14$$
$$m_R^{(2)} = -2{,}5 \log\left(0{,}91 \frac{F}{F_0}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{F}{F_0}\right) - 2{,}5 \log(0{,}91) = m_R^{(1)} + 0{,}10 = 9{,}26$$

Portanto, o índice de cor da segunda estrela será:

$$(V - R)^{(2)} = m_V^{(2)} - m_R^{(2)} = 9{,}14 - 9{,}26 = -0{,}12$$

b) mais avermelhada

Explicação obrigatória: O índice de cor negativo indica que as duas estrelas são azuladas. Todavia, a segunda estrela tem um índice de cor “menos negativo” que a primeira, o que indica que a segunda estrela aparenta ser mais avermelhada que a primeira.

Questão 8	a) estrela 1 e estrela 2 aparecem juntas?	sim
	b) estrela 1 e estrela 3 aparecem juntas?	não

Questão 8 - espaço para o cálculo e justificativa

Solução: Para calcular a distância angular entre as estrelas, usaremos a fórmula do triângulo esférico: $\cos D_{AB} = \sin\delta_A \sin\delta_B + \cos\delta_A \cos\delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)$

Entre as estrela 1 e 2, $\alpha_1 = \alpha_2$, então a fórmula acima se reduz a:

$$D_{12} = \delta_1 - \delta_2 = 40' = 2400''$$

Entre as estrela 1 e 3, $\delta_1 = \delta_3$ e $\alpha_1 - \alpha_3 = 6^{min} \equiv 1{,}5^o$

Então: $\cos D_{13} = (\sin 35^o 20')^2 + (\cos 35^o 20')^2 \cos(1{,}5^o) \rightarrow D_{13} \cong 1{,}223690^o \cong 4405''$

A distância focal do telescópio F vale: $F = 10 \times 200 = 2000\ mm = 200\ cm$

O detector da câmera CCD é um quadrado com lado igual a:

$l = 4096 \times l_{pix} = 4096 \times 6{,}4\ \mu m \cong 2{,}62$ cm e diagonal $d = \sqrt{2} \times l \cong 3{,}71$ cm

Estas dimensões lineares no plano focal correspondem a ângulos no céu de:

$$\theta_l = \tan^{-1}\left(\frac{l}{F}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}62}{200}\right) \rightarrow \theta_l \cong 0{,}7509^o \approx 2703''$$

$$\theta_d = \tan^{-1}\left(\frac{d}{F}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}71}{200}\right) \rightarrow \theta_d \cong 1{,}062^o \approx 3823''$$

a) $D_{12} < \theta_l$, portanto, é possível se obter uma imagem em que a estrela 1 e estrela 2 apareçam juntas.

b) $D_{13} > \theta_d$, portanto, não é possível se obter uma imagem em que a estrela 1 e estrela 3 apareçam juntas.

Questão 9	a)	brilho total da estrela	$\cong 1{,}35 \times 10^{29}\ W \equiv 352\ L_{\odot}$
		brilho total da estrela na banda visível	$\cong 4{,}45 \times 10^{27}\ W \equiv 11{,}6\ L_{\odot}$
	b)	comparação de brilho	$8{,}92 \times 10^{26}$
	c)	distância	$\cong 10{,}33 \times 10^{3}\ m = 10{,}33\ km$

Questão 9 - espaço para o cálculo

Solução:

a) A luminosidade da estrela é dada por: $L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T^4 = 4\pi (100 R_{\odot})^2 \sigma T^4$

Substituindo-se os valores:

$$L_* = 4\pi (100 \times 6{,}96 \times 10^8)^2 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times (2500)^4 \cong 1{,}35 \times 10^{29}\ W \equiv 352\ L_{\odot}$$

Sua luminosidade no visível: $L_*^V = 0{,}033 \times L_* \cong 4{,}45 \times 10^{27}\ W \equiv 11{,}6\ L_{\odot}$

b) A luminosidade da lâmpada no visível: $L_l^V = 0{,}05 \times L_l = 5{,}00\ W$

Comparando as luminosidades: $\frac{L_*^V}{L_l^V} = \frac{4{,}45 \times 10^{27}}{5} = 8{,}92 \times 10^{26}$

c) Para que a lâmpada apareça, no visível, tão luminosa quanto a estrela, seus fluxos F_l e F_* devem ser os mesmos.
O fluxo de radiação que recebemos no visível da estrela é:

$$F_*^V = \frac{L_*^V}{4\pi D^2} = \frac{4{,}46 \times 10^{27}}{4\pi (32{,}6 \times 9{,}46 \times 10^{15})^2} \cong 3{,}73 \times 10^{-9}\ W m^{-2}$$

Igualando o fluxo da lâmpada ao da estrela, temos:

$$F_l^V = \frac{L_l^V}{4\pi d^2} = \frac{5}{4\pi d^2} = 3{,}73 \times 10^{-9}\ W m^{-2}$$

Resolvendo para *d*:

$$d = \sqrt{\frac{5}{4\pi (3{,}73 \times 10^{-9})}} \cong 10{,}33 \times 10^3\ m = 10{,}33\ km$$

<table>
<tr><td rowspan="10">Questão 10</td><td rowspan="2">a)</td><td>período</td><td>76 anos</td></tr>
<tr><td>excentricidade</td><td>0,91</td></tr>
<tr><td rowspan="8">b)</td><td>Aquarids</td><td>Halley</td></tr>
<tr><td>Perseids</td><td>Swift-Tuttle</td></tr>
<tr><td>Draconids</td><td>Giacobini</td></tr>
<tr><td>Orionids</td><td>Halley</td></tr>
<tr><td>Taurids</td><td>Encke</td></tr>
<tr><td>Leonids</td><td>Tempel</td></tr>
<tr><td>Andromids</td><td>Biela</td></tr>
<tr><td>Ursids</td><td>Tuttle</td></tr>
</table>

Questão 10 - espaço para o cálculo

Solução:

a) Da Tabela também se conclui que a excentricidade da órbita do Halley é de 0,91 (mesma excentricidade dos Aquarídeos e dos Orionídeos).

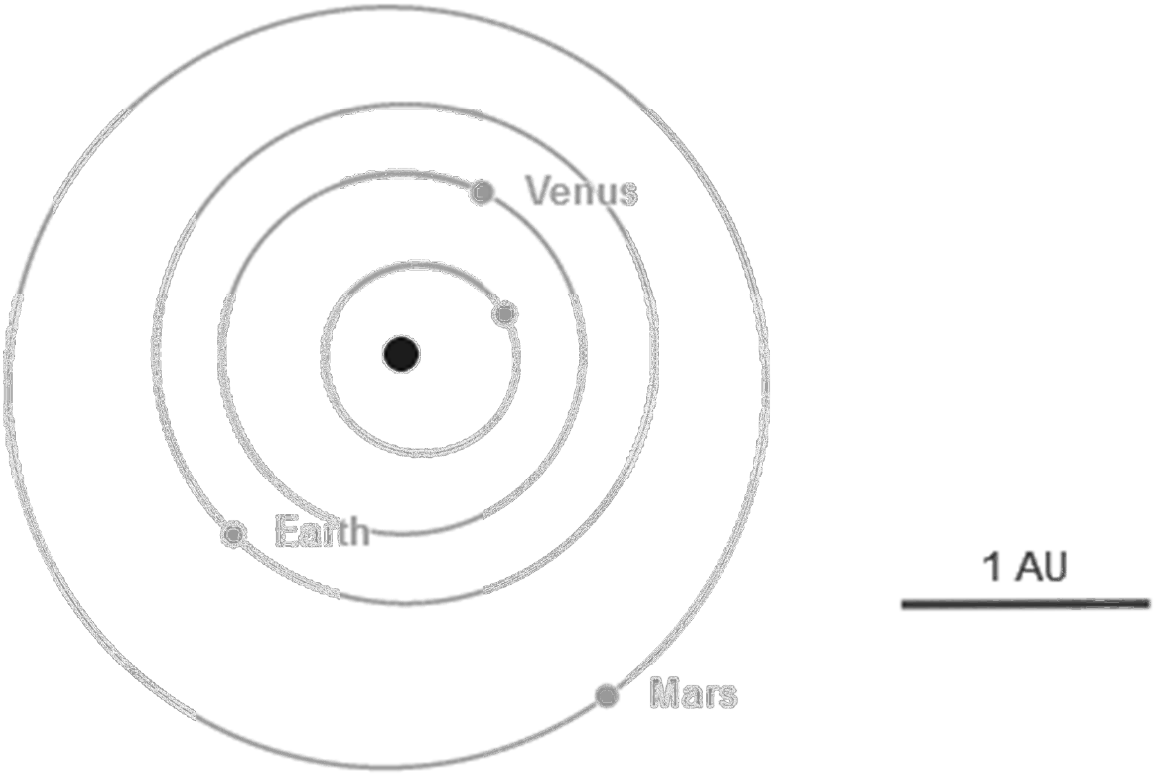
Seu período é de 76 anos (conhecimento geral).

Podemos correlacionar as chuvas de meteoros com os cometas através das semelhanças dos parâmetros orbitais **ω**, ***i*** e ***e***:

Chuva	Cometa
Aquarídeos	Halley
Perseídeos	Swift-Tuttle
Draconídeos	Giacobini
Orionídeos	Halley
Taurídeos	Encke
Leonídeos	Tempel
Andromídeos	Biela
Ursídeos	Tuttle

Questão 11	a) período orbital	$\cong$ 2,405 anos
	b) utilize a figura abaixo	
	c) utilize a figura abaixo	
	d) velocidade orbital	v = 13,6 km/s
	e) constelação	fronteira entre Capricórnio e Aquário

Figura para os itens b) e c)



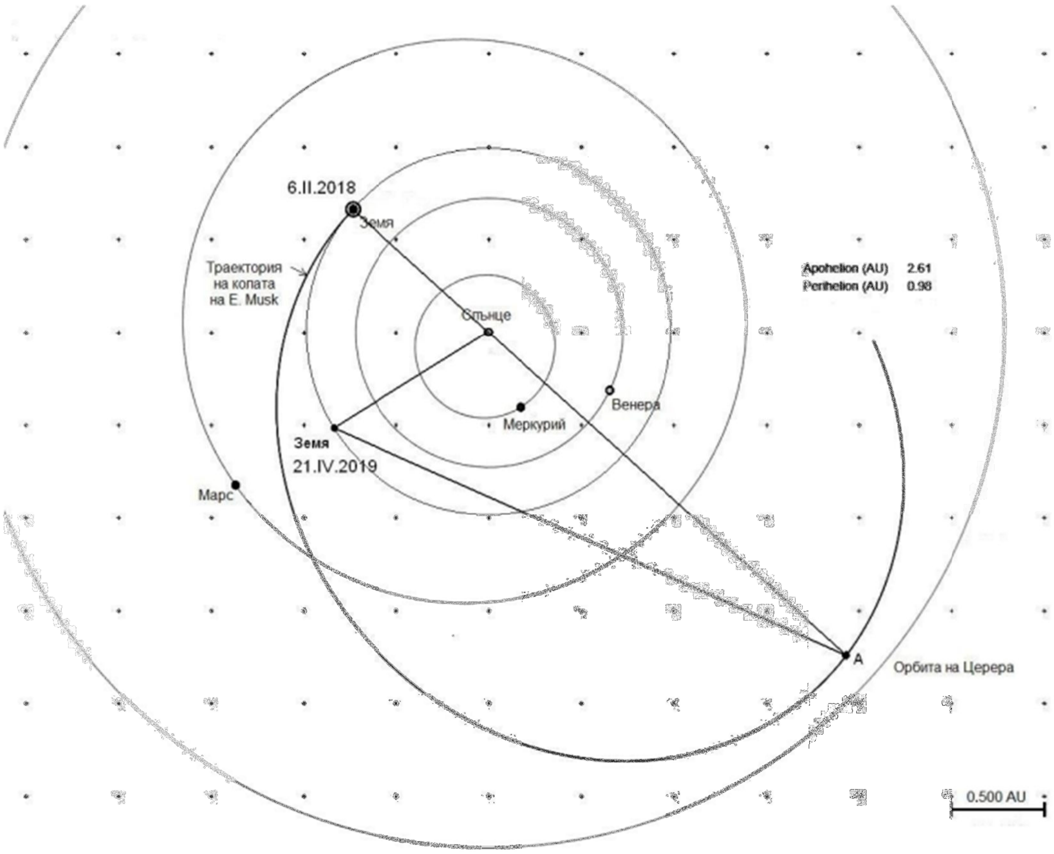
Questão 11 - espaço para o cálculo

Solução:

a) O semi-eixo maior da órbita é $a = (0{,}98 + 2{,}61) / 2 = 1{,}795$ U.A.

Pela 3ª Lei de Kepler temos então $P = a^{3/2} \cong 2{,}405$ anos.

b) Figura - usar $b = (0{,}98 * 2{,}61)^{1/2} = 1{,}6$ UA.



c) O carro leva $(P/2) = 1{,}202$ ano para chegar ao afélio, ou seja, a Terra terá se deslocado **73º** (20,2% de uma volta) com relação à sua posição original.

d) Utilizando a equação vis-viva

$v^2 = GM(2/r - 1/a)$ com $r = 2{,}61$ U.A e $a = 1{,}795$ UA temos $v = 13{,}6$ km/s.

e) Quando o carro estiver no afélio, terão se passado $1.203 \times 365.25 \approx 1$ ano e 74 dias desde 6 de Fevereiro, ou seja, será 21 de Abril de 2019. Nesta época o Sol estará situado entre Peixes e Áries, e o carro estará 56º a oeste do Sol, aproximadamente 2 constelações. Portanto o carro estará na direção da fronteira entre Capricórnio e Aquário (consideramos as duas respostas como corretas).

Questão 12	a)	tipo de tempo	tempo solar verdadeiro
	b)	Ponto Cardeal	Ponto Cardeal Sul
	c)	linha curva extrema superior	solstício de inverno
		linha curva extrema inferior	solstício de verão
	d)	linha reta central	os equinócios
	e)	meio-dia verdadeiro	às 12h 05min 4,4 s ≈12h 05min

Questão 12 - espaço para o cálculo e descrição

Solução:

a) Uma vez que o relógio de Sol indica o tempo com base na projeção da sombra do gnomon, o tempo indicado por ele é o tempo solar verdadeiro.

b) O Sol nasce à esquerda do relógio, portanto ele está de frente para o Ponto Cardeal Sul.

c) A linha na parte superior do mostrador corresponde aos pontos onde a sombra tem um comprimento menor, ou seja, ela descreve o solstício de inverno. Da mesma forma, a linha na parte inferior do mostrador é percorrida quando o Sol está mais alto no céu, e, portanto, ela descreve o solstício de verão.

d) A linha horizontal, a meio caminho entre os dois solstícios, é percorrida nos dois dias em que a noite tem exatamente o mesmo comprimento do dia claro: ela descreve os equinócios da primavera e do outono.

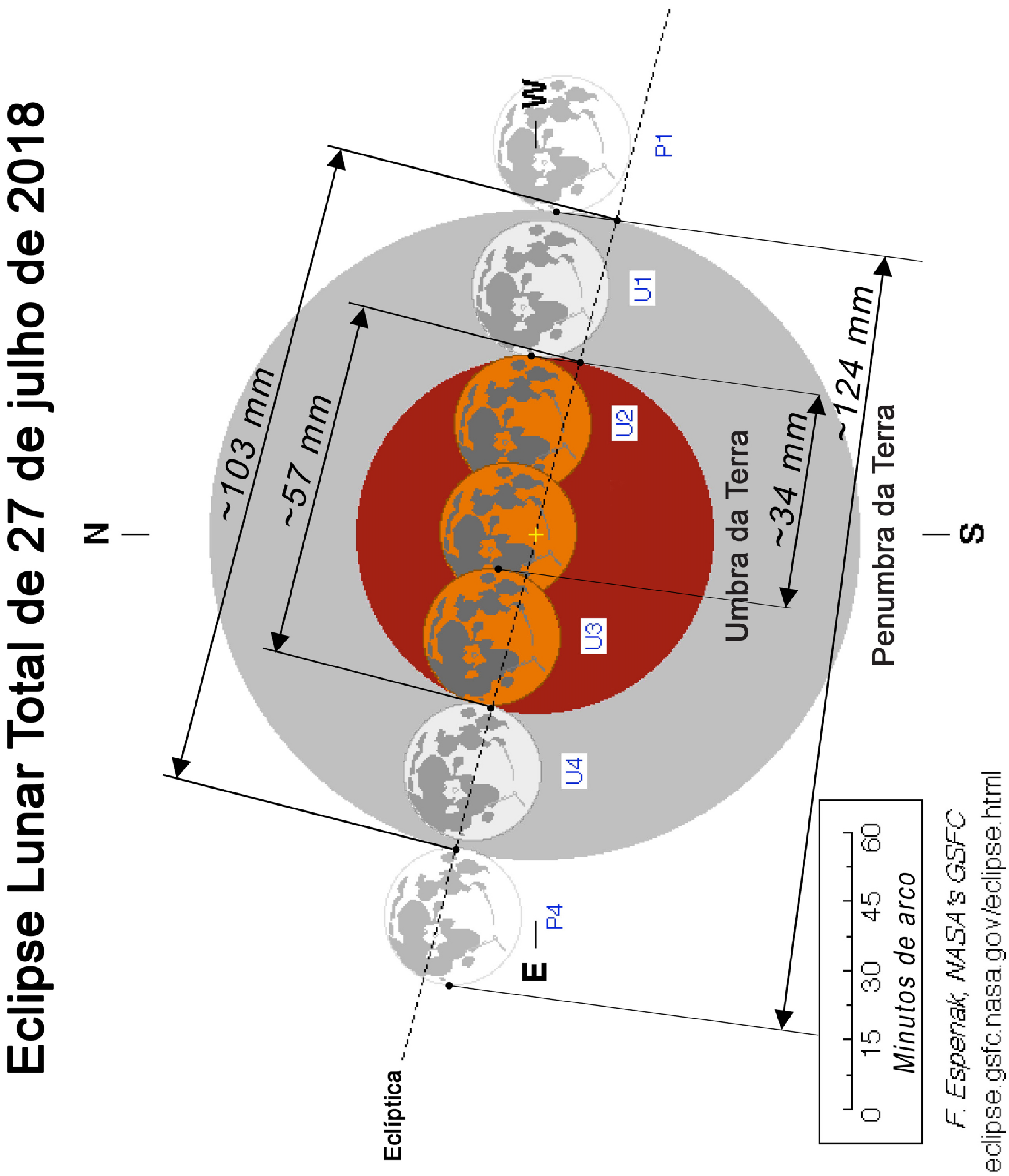
e) Como a Equação do Tempo é nula em 1º de setembro, a única correção a ser feita na hora indicada pelo relógio de Sol é a correção de longitude.

O relógio se encontra a oeste do centro do fuso (15º). **Portanto a passagem meridiana do Sol acontecerá depois do meio-dia civil**.

$$\Delta t = \frac{(15^o - 13^o 43' 54'')}{15^o/1\ h} \cong 0{,}084555\ h \equiv 5\ \text{min}\ \ 4{,}4\ s$$

A passagem meridiana do Sol em 1º de setembro se dará às 12h 5min 4,4 s ≈12h 5min

Questão 13	a)	tamanho angular da Umbra	~77,727’ ≡ 1,295º (1º 17’ 44”)
		tamanho angular da Penumbra	~140,450’ ≡ 2,340º (2º 20’ 27”)
	b)	duração do eclipse	$\cong 5{,}539\ h = 5h\ \ 32\,\text{min}\ \ 20s$
	c)	duração do eclipse na sua totalidade	$\cong 1{,}520\ h = 1h\ \ 31\,\text{min}\ \ 12s$



Questão 13 - espaço para o cálculo

Solução:

a) O estudante precisa comparar a medida do tamanho da Umbra e da Penumbra com a medida da escala de minutos de arco da figura, usando uma régua, e estimar os tamanhos angulares por regra de três simples.

60 minutos de arco medidos com a régua equivalem a 44 mm

Diâmetro linear da Umbra (medido sobre a Eclíptica): 57 mm

→ Diâmetro angular da Umbra: ~77,727' ≡ 1,295º (1º 17' 44")

Diâmetro linear da Penumbra (medido sobre a Eclíptica): 103 mm

→ Diâmetro angular da Penumbra: ~140,450'≡ 2,340º (2º 20' 27")

Serão aceitas pequenas variações destes valores devido aos pequenos erros de medidas com a régua

A Lua dá uma volta completa em torno da Terra em 27,3 dias. Como neste mesmo período a Terra está se movendo em torno do Sol, devemos usar o **Período Sinódico** da Lua (29,5 dias) para calcularmos os tempos pedidos.

b) A Lua não percorre a sombra da Terra seguindo a Eclíptica, portanto deve-se medir de um ponto onde a Lua "toca" a Penumbra até o mesmo ponto onde ela se "destaca" da Penumbra.

Do ponto P1 ao ponto P4: ~124 mm (→ ~169')

Por regra de três simples, temos:

$$(360 \times 60)' : (29{,}5 \times 24h) = 169' : \Delta t_{P1-P4} \rightarrow \Delta t_{P1-P4} = \frac{169' \times 708\ h}{21600'} \cong 5{,}539\ h = 5h\ 32\ \text{min}\ \ 20s$$

Também será aceito como caminho percorrido: $\emptyset_{Penumbra} + \emptyset_{Lua}$

c) A Lua não percorre a sombra da Terra seguindo a Eclíptica, portanto deve-se medir do um ponto onde a Lua já está completamente dentro da Umbra até o mesmo ponto onde ela começa a sair da Umbra.

Do ponto U2 ao ponto U3: ~34 mm (→ ~46,4')

Por regra de três simples, temos:

$$(360 \times 60)' : (29{,}5 \times 24h) = 46{,}4' : \Delta t_{U2-U3} \rightarrow \Delta t_{U2-U3} = \frac{46{,}4' \times 708\ h}{21600'} \cong 1{,}520\ h = 1h\ 31\ \text{min}\ \ 12s$$

Também será aceito como caminho percorrido: $\emptyset_{Umbra} - \emptyset_{Lua}$

Serão aceitas pequenas variações destes valores devido aos pequenos erros de medidas com a régua.

O estudante que usar o Período Sideral, ou outro período, da Lua terá a nota descontada por erro conceitual.

Questão 14	a) percentagem de diminuição do brilho do Sol	$8{,}38 \times 10^{-3}\,\%$
	b) duração de um trânsito da Terra (planeta)	$\cong 4{,}68 \times 10^{4}s \equiv 13\ horas \equiv 0{,}542\ dia$
	c) duração de um trânsito da Terra (nave)	$\cong 3{,}68 \times 10^{4}s \equiv 10{,}22\ horas \equiv 0{,}426\ dia$
	d) tempo de viagem	$1698\ anos$

Questão 14 - espaço para o cálculo

Solução: uma vez que a estrela DQ PSC, vista da Terra, está em uma posição muito próxima ao ponto Áries (γ), o trânsito ocorre ao longo de um diâmetro solar.

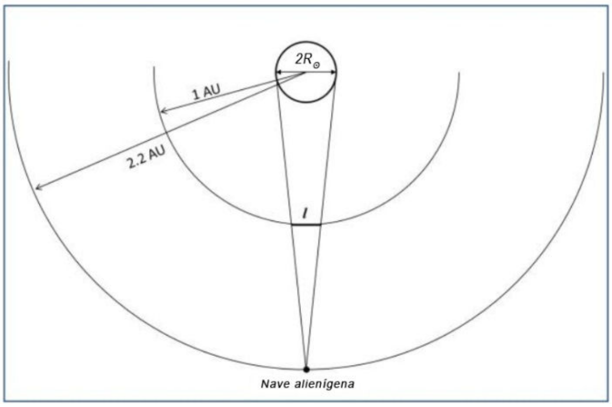
a) A diminuição relativa do brilho é dada pela proporção entre as áreas dos discos terrestre e solar, ou entre o quadrado dos respectivos raios:

$$\frac{\Delta L}{L} = \left(\frac{R_T}{R_\odot}\right)^2 = \left(\frac{6{,}37 \times 10^6}{6{,}96 \times 10^8}\right)^2 \cong 8{,}38 \times 10^{-5} \equiv 8{,}38 \times 10^{-3}\,\%$$

b) Para o observador colocado no planeta alienígena o trânsito dura o tempo que a Terra leva para percorrer o diâmetro do disco solar. Como o raio da órbita da Terra é muito maior do que o raio solar pode-se aproximar essa seção da órbita por uma linha reta, já que o observador está virtualmente no infinito. Assim, o comprimento desta linha será igual ao diâmetro do Sol. Vale, portanto, a proporção:

$$2\pi(1\ U.A.) : 3{,}16 \times 10^7 s = 2R_\odot : \Delta t$$
$$\rightarrow \Delta t = \frac{6{,}96 \times 10^8}{\pi \times 149{,}6 \times 10^9} \times 3{,}16 \times 10^7 \cong 4{,}68 \times 10^4 s \equiv 13\ horas \equiv 0{,}542\ dia$$

c) A uma distância de 2,2 U.A. seção da órbita da Terra não pode mais ser aproximada ao diâmetro solar.



Como as distâncias ainda são grandes, vamos supor que a seção *l* ainda seja linear. Pela figura acima, vale a relação de semelhança entre triângulos que leva à seguinte proporção:

$$2R_\odot : 2{,}2\ U.A. = l : (2{,}2 - 1)U.A. \rightarrow l = \frac{1{,}2}{2{,}2} 2R_\odot \cong 1{,}091 R_\odot$$

Diferentemente do trânsito visto da estrela DQ PSC, o período usado para calcular o tempo de trânsito da Terra, visto da nave a 2,2 U.A., deverá ser o período sinódico, já que a nave também está orbitando o Sol. O período orbital da nave pode ser calculado pela 3ª Lei de Kepler:

$$T_{2,2} = \sqrt{2{,}2^3} \cong 3{,}263\ anos$$

O período sinódico da Terra será:

$$\frac{1}{T_T^{sin}} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_{nave}} = 1 - \frac{1}{3{,}263} \rightarrow T_T^{sin} \cong 1{,}442\ ano$$

Agora podemos escrever a proporção:

$$2\pi(1\ U.A.) : 1{,}442 = 1{,}091 R_\odot : \Delta t_{2,2}$$

O tempo de trânsito da Terra, observado da nave será:

$$\Delta t_{2,2} = \frac{1{,}091 \times 6{,}96 \times 10^8}{2\pi \times 149{,}6 \times 10^9} \times 3{,}16 \times 10^7 \times 1{,}442 \cong$$
$$\cong 3{,}68 \times 10^4 s \equiv 10{,}22\ horas \equiv 0{,}426\ dia$$

d) A distância da estrela DQ PSC até o Sol é igual a:

$$d = \frac{1}{\pi} pc = \frac{1}{0{,}0024''} \cong 416{,}67\ pc = 416{,}67 \times 3{,}26 \cong 1358{,}33\ anos - Luz$$

O tempo de viagem a 0,8 c será:

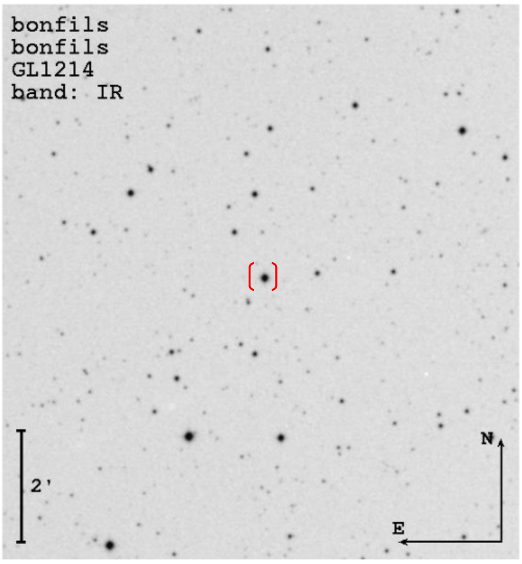
$$t_{viagem} = \frac{1358{,}33}{0{,}8} \approx 1698\ anos$$

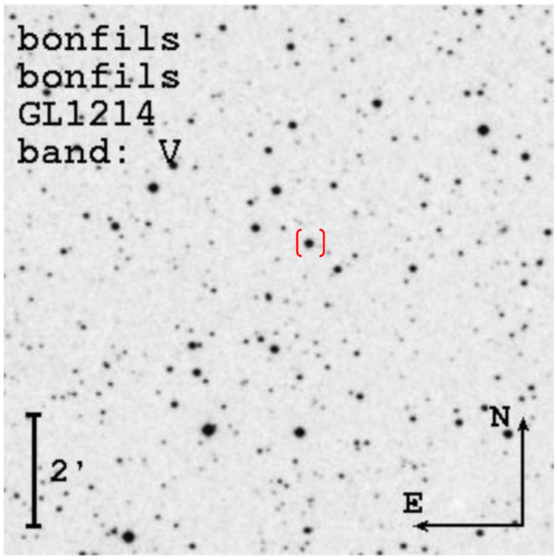
Nota: Deve-se dizer que, graças aos efeitos previstos pela teoria da relatividade restrita, para os técnicos a bordo da nave a viagem durará "apenas" pouco menos de 1019 anos.

Questão 15	a)	indique a estrela nas duas imagens abaixo	
	b)	imagem mais recentemente (esquerda ou direita)	esquerda
		justificativa	(escreva abaixo)
	c)	distância	$12{,}95\ pc \cong 4{,}00 \times 10^{17} m = 4{,}00 \times 10^{14} km$
	d)	componente tangencial da velocidade	$\cong 5{,}85 \times 10^{1}\ km/s\ ou\ 58{,}5\ km/s$

Solução:

a)





Questão 15 - espaço para o cálculo e justificativa

b) A estrela tem movimento próprio na esfera celeste de -752 mas/ano em declinação. A imagem da esquerda é a mais recente, pois a estrela está mais ao Sul.

c)

$$d = \frac{1}{77{,}2 \times 10^{-3}} \cong 12{,}95\ pc$$

$$12{,}95\ pc = 12{,}95 \times\ 3{,}086 \times 10^{16} m \cong 4{,}00 \times 10^{17} m = 4{,}00 \times 10^{14} km$$

d) o movimento próprio da estrela em 1 ano:

$$\Delta\theta = \sqrt{585^2 + (-752)^2} \cong 952{,}75\ mas \equiv 4{,}62 \times 10^{-6}\ rad$$

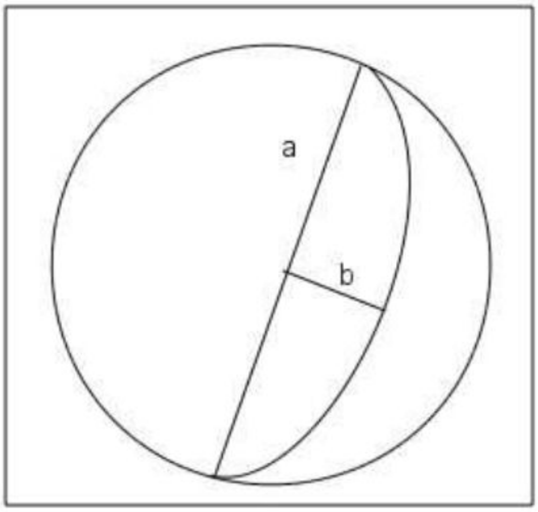
esse movimento já é tangencial à tragetória espacial da estrela:

$$D = d\Delta\theta = 4{,}00 \times 10^{14} \times 4{,}62 \times 10^{-6} \cong 1{,}85 \times 10^{9}\ \ km/ano$$

A velocidade tangencial da estrela será:

$$v_t = \frac{D}{t} = \frac{1{,}85 \times 10^9\ km/ano}{3{,}16 \times 10^7\ s/ano} \cong 5{,}85 \times 10^1\ \ km/s\ ou\ 58{,}5\ km/s$$

Questão 16	a) expressão para o ângulo Sol-Lua-Terra	desenvolva no espaço abaixo
	b) expressão que relaciona $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{\beta}$	desenvolva no espaço abaixo
	c) fase da Lua	$F \cong 0{,}74$



Questão 16 - espaço para o desenvolvimento e cálculo

Solução:

Vemos pela figura que o semi-eixo maior **a** permanece constante. O semi-eixo menor ***b***, por sua vez, varia do valor máximo ***a***, quando Lua está Cheia até **zero**, quando a Lua está em Quarto Minguante. Vamos admitir que depois seu valor vá até – ***a***, na Lua Nova.

O ângulo $\boldsymbol{\beta}$ vale 0º na Lua Cheia, 90º no Quarto Minguante e 180º na Lua Nova.

a) A função mais simples que relaciona estes valores é:

$$\cos\beta = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Fase, ou fração iluminada, é a **razão entre a área iluminada e a área total do disco**.

A área total do disco vale: πa^2

A área iluminada vale: $\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi ab}{2}$

A razão entre elas será então:

$$F = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi ab}{2}}{\pi a^2} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{a\cos\beta}{2a} \rightarrow F = \frac{1+\cos\beta}{2}$$

c) medindo ***a*** e ***b*** com a régua: ***a*** = 29 mm e ***b*** = 14 mm

$$F = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{14}{2 \times 29} \rightarrow F \cong 0{,}74$$

Questão 17	a)	distância	$\approx 26\ mil\ AL$
	b)	massa do objeto central	$\cong 4{,}05 \times 10^6\ M_\odot$
	c)	raio de Schwarzschild	$\cong 17{,}24\ r_\odot$
	d)	pericentro mínimo	$\cong 86{,}35\ U.A.$
	e)	estrelas dentro da Esfera de Influência	$\cong 2{,}24 \times 10^8$

Questão 17 - espaço para o cálculo e justificativa

Solução:

a) $\theta = \frac{980}{d} = \frac{0{,}1226''}{206265} \cong 5{,}97 \times 10^{-7} \rightarrow d \cong 1{,}65 \times 10^9\ U.A. \approx 26\ mil\ AL$

O estudante que usar outra unidade terá a nota descontada

b) A estrela com os parâmetros orbitais mais precisos é a S2:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \leftrightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$$

Substituindo-se os valores:

$$M = \frac{4\pi^2(980 \times 149{,}6 \times 10^9)^3}{6{,}673 \times 10^{-11} \times (15{,}24 \times 365 \times 24 \times 3600)^2} \cong 8{,}07 \times 10^{36}\ kg$$

$$M = \frac{8{,}07 \times 10^{36}}{1{,}99 \times 10^{30}} \cong 4{,}05 \times 10^6\ M_\odot$$

O estudante que usar outra unidade terá a nota descontada

c)

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6{,}673 \times 10^{-11} \times 8{,}07 \times 10^{36}}{(3{,}00 \times 10^8)^2} \cong 1{,}20 \times 10^{10}\ m$$

$$r_S = \frac{1{,}20 \times 10^{10}}{6{,}96 \times 10^8} \cong 17{,}24\ r_\odot$$

d) A estrela que mais se aproxima do objeto central é a S14. Seu pericentro será "mínimo" quando o valor do seu semi-eixo maior ***a*** for mínimo e da sua excentricidade ***e*** for máximo. **Vide valores da tabela**.

$$a_{S14}^{min} = 1800 - 180 = 1620\ U.A.$$

$$e_{S14}^{max} = 0{,}9389 + 0{,}0078 = 0{,}9467$$

Então: $r_p^{min} = a(1-e) = 1620(1 - 0{,}9467) \cong 86{,}35\ U.A.$

O estudante que usar o pericentro médio de S14 terá a nota descontada.

e)

$$R = \frac{GM_{bn}}{\sigma^2} \rightarrow R = \frac{6{,}673 \times 10^{-11} \times 8{,}07 \times 10^{36}}{(10^5)^2} \cong 5{,}38 \times 10^{16}\ m \approx 1{,}75\ pc$$

Segundo a tabela, no Centro Galático temos cerca de 10^7 estrelas/pc^3 dentro de um raio de 40 pc. Para estimar quantidade de estrelas da Esfera de Influência **vamos considerar, em primeira aproximação, que a densidade seja constante dentro deste raio** (consideração obrigatória na resposta):

$$n = \rho V = 10^7 \times \frac{4}{3}\pi(1{,}75)^3 \rightarrow n \cong 2{,}24 \times 10^8\ estrelas$$

Questão 18	a) massa do Grupo Local	$3{,}3\times10^{13}$ M$_\odot$
	b) razão massa-luminosidade	M/L = 1072

Questão 18 - espaço para o cálculo

Solução:

a) pelo teorema do virial temos

$E_{cin} = -(½)U_{grav}$

sendo $E_{cin} = \sum ½\, m_i v_i^2 = ½\, M <v^2>$ e $U_{grav} = -⅗\, GM^2/R$

portanto a massa pode ser calculada por

$$M = 5/3\ (R/G) <v^2>$$

Pela tabela calcula-se $<v^2> = 5{,}9\times10^4\ (km/s)^2$ e R = 1450 kpc

Substituindo os valores chegamos a $M = 6{,}3\times10^{43}$ kg ≡ $3{,}3\times10^{13}\ M_\odot$

b) Para calcular a luminosidade de cada galáxia usamos:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = 10^{(M_\odot - M_*)/2.5}$$

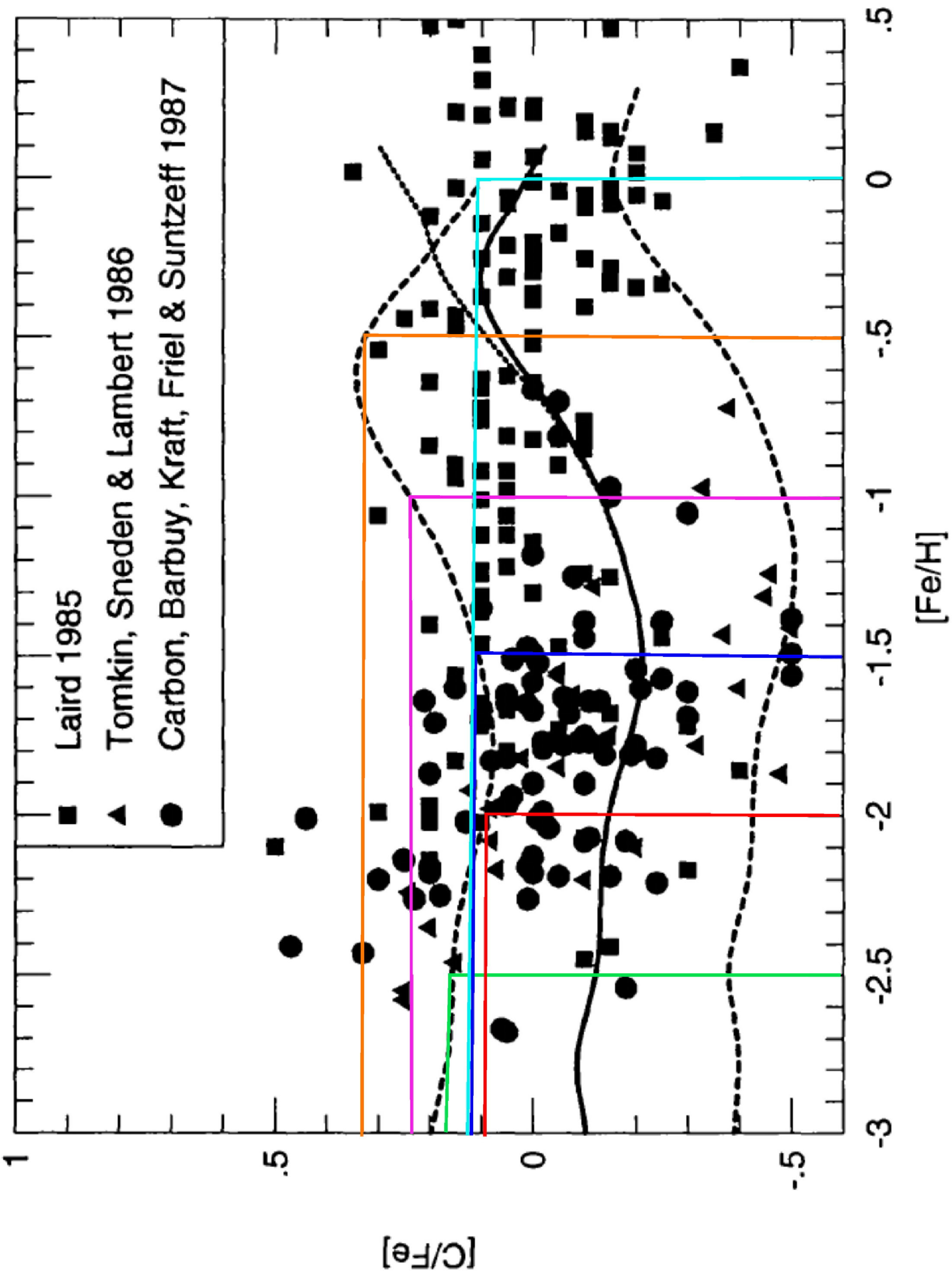
Somando tudo chegamos a $L_{GL} = 3{,}1\times10^{10}\ L_\odot$

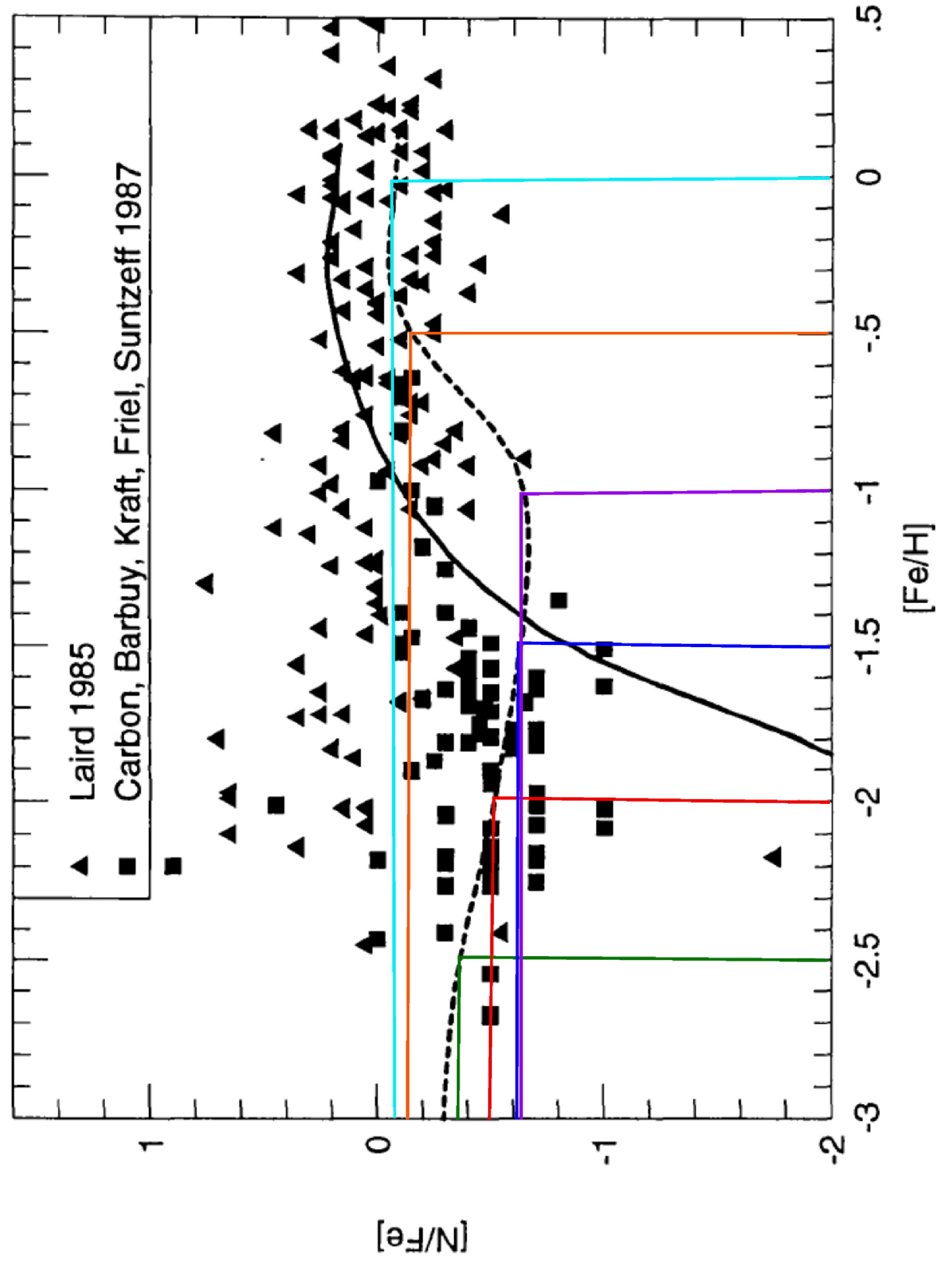
e portanto uma razão Massa/Luminosidade de $M/L = 1072$

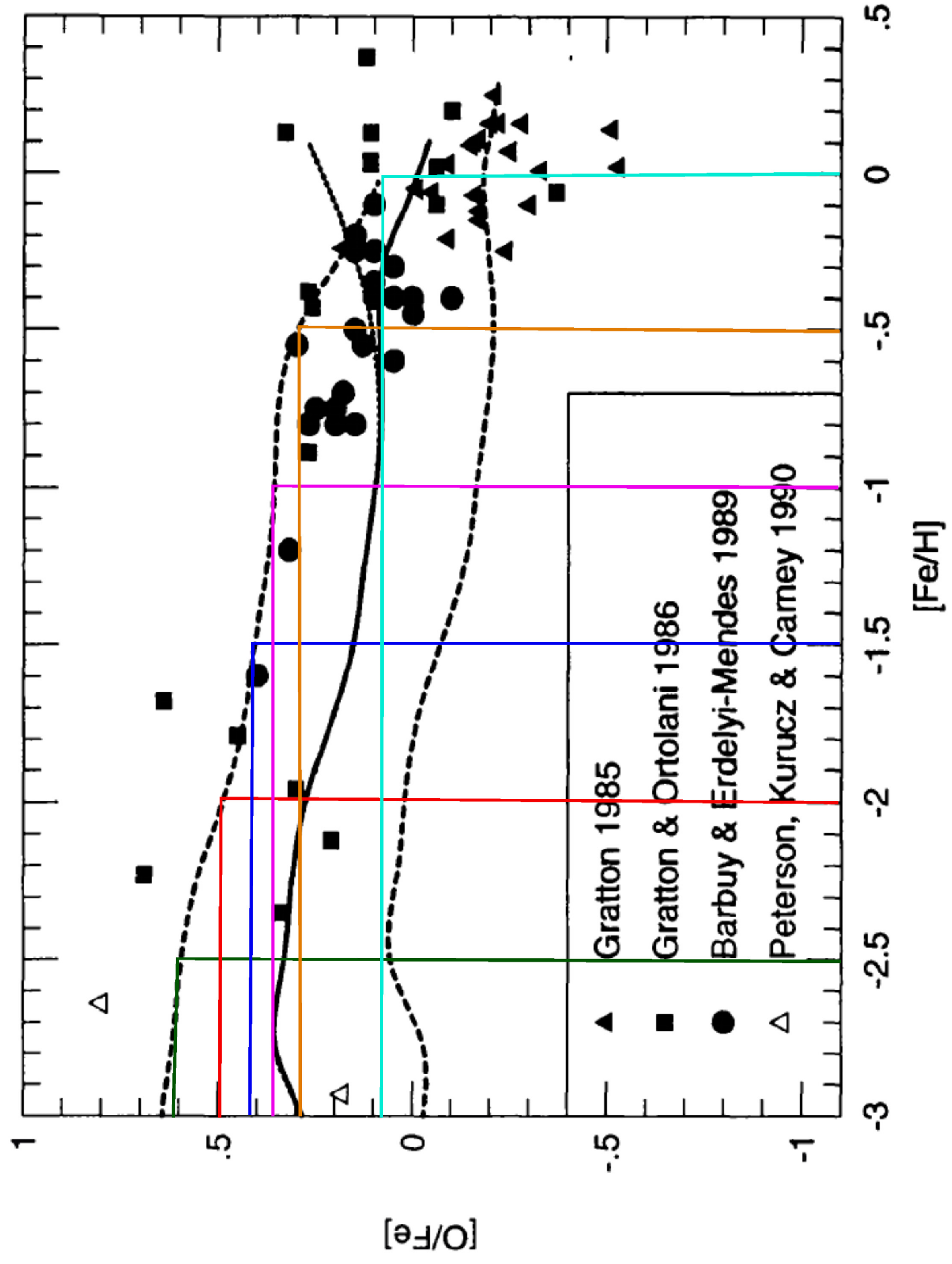
Questão 19	a)	tabela com os valores de [Fe/H]	preencha a tabela já montada
	b)	Tabela com de abundâncias	preencha a tabela já montada
	c)	gráfico	use o papel milimetrado
	d)	ordem de abundância	O, C e N
		ordem mantida?	sim

Questão 19 - espaço para o cálculo

a) Os valores de [X/Fe] podem ser encontrados diretamente a partir das figuras de Timmes *et al.* (1995), como indicado nas figuras abaixo para cada elemento. Os valores encontrados estão indicados na Tabela




Laird 1985
Carbon, Barbuy, Kraft, Friel, Suntzeff 1987
[Fe/H]
[N/Fe]
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-.5
0
.5
1
0
-1
-2



[Fe/H]	[C/Fe]	[N/Fe]	[O/Fe]
-2,5	0,16	-0,35	0,60
-2,0	0,10	-0,50	0,50
-1,5	0,12	-0,65	0,41
-1,0	0,24	-0,65	0,35
-0,5	0,33	-0,15	0,30
0,0	0,12	-0,08	0,08

b) Para acharmos os valores das abundâncias de um elemento X qualquer, ou seja, $\epsilon(X)$, precisamos desenvolver a seguinte equação:

$$\left[\frac{X}{H}\right] = \log\left[\frac{\epsilon(X)}{\epsilon(H)}\right] - \log\left[\frac{\epsilon(X)}{\epsilon(H)}\right]_{\odot}$$

Assim,

$$\left[\frac{X}{H}\right] = \log\epsilon(X) - \log\epsilon(H) - \log\epsilon(X)_{\odot} + \log\epsilon(H)_{\odot}$$

Lembrando que $\log\epsilon(H) = \log\epsilon(H)_{\odot}$, então

$$\left[\frac{X}{H}\right] = \log\epsilon(X) - \log\epsilon(X)_{\odot} \leftrightarrow \log\epsilon(X) = \left[\frac{X}{H}\right] + \log\epsilon(X)_{\odot}$$

Como queremos a abundância de um elemento X em relação ao hidrogênio, fazemos

$$\epsilon(X) = \frac{10^{\left[\frac{X}{H}\right]+\log\epsilon(X)_{\odot}}}{10^{12}}$$

onde 10^{12} é o valor de $\log\epsilon(H) = \log\epsilon(H)_{\odot}$.

Substituindo na equação acima os valores de $\log\epsilon(X)_{\odot}$ e $\left[\frac{X}{H}\right]$ encontrados na tabela X *vs* $\log\epsilon(H)_{\odot}$ (dada no enunciado) e na tabela do item a, podemos encontrar os valores das abundancias dos elementos C, N e O com relação ao hidrogênio.

Para exemplificar, faremos o cálculo para o elemento carbono, e metalicidade [Fe/H] = -2,5.

Precisamos resolver a equação $\log\epsilon(C) = \left[\frac{C}{H}\right] + \log\epsilon(C)_{\odot}$

Para resolvermos essa equação, precisamos do valor de [C/Fe] correspondente a [Fe/H] = -2.5 e do valor de [C/H]. Os valores de [C/Fe] estão na tabela acima, e o valor de [C/H] encontramos a partir da equação

$$\left[\frac{C}{H}\right] = \left[\frac{C}{Fe}\right] + \left[\frac{Fe}{H}\right] = 0{,}16 - 2{,}5 = -2{,}34$$

Portanto, temos

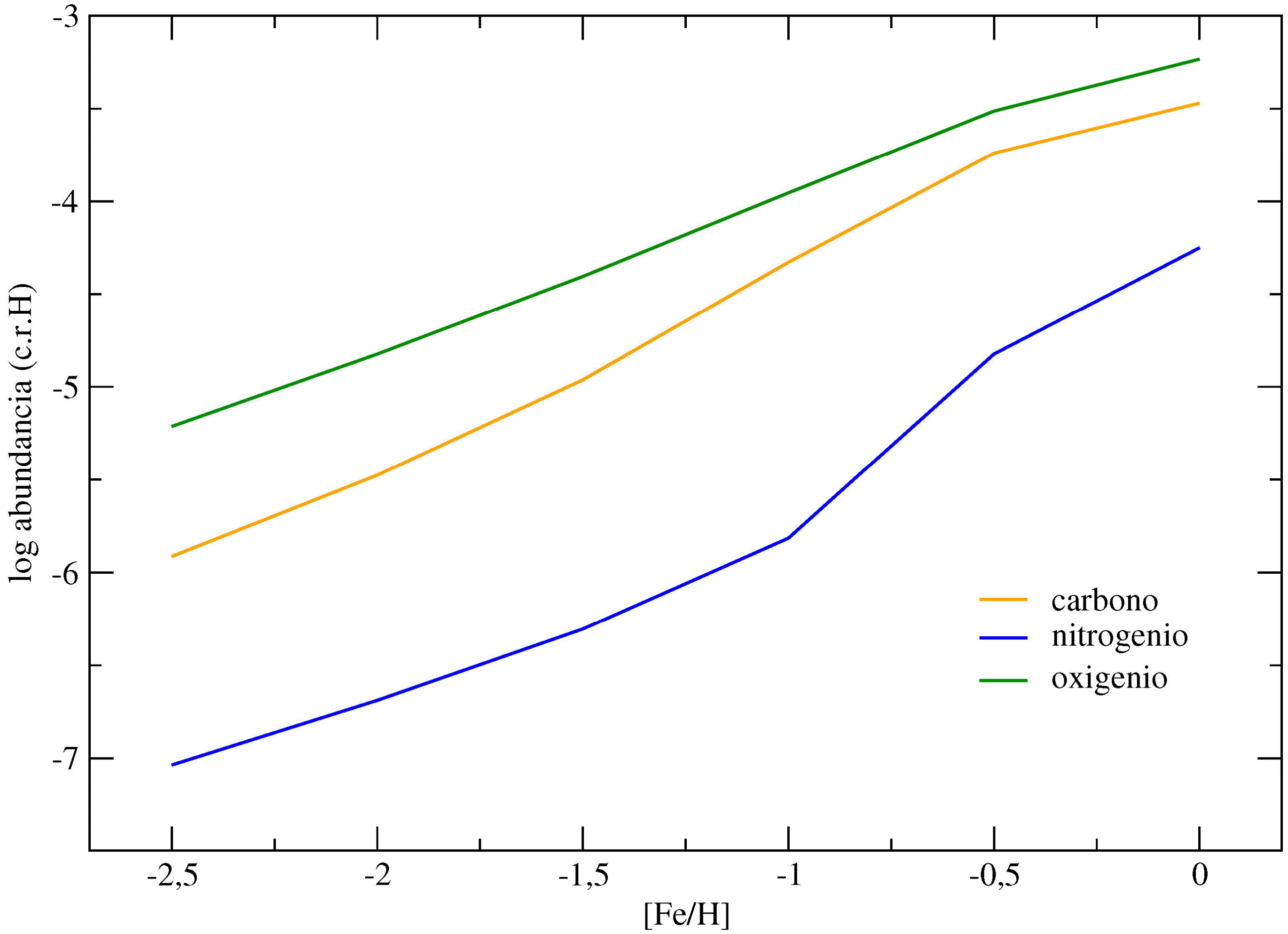
$$\epsilon(C) = \frac{10^{\left[\frac{C}{H}\right]+\log\epsilon(C)_{\odot}}}{10^{12}} = \frac{10^{-2{,}34+8{,}43}}{10^{12}} = \frac{10^{6{,}09}}{10^{12}} \cong 1{,}23 \times 10^{-6} \leftrightarrow 1{,}23(-6)$$

Fazendo o mesmo para todas as metalicidades e para os outros elementos, podemos encontrar os seguintes resultados, lembrando que $\alpha(\beta) \leftrightarrow \alpha \times 10^{\beta}$:

Espécie	[Fe/H] -2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0
C	1.23(-06)	3.38(-06)	1.12(-05)	4.68(-05)	1.82(-04)	3.55(-04)
N	9.55(-08)	2.14(-07)	4.79(-07)	1.51(-06)	1.51(-05)	5.62(-05)
O	6.16(-06)	1.54(-05)	3.98(-05)	1.10(-04)	3.09(-04)	5.88(-04)

c) A partir dos dados contidos na tabela anterior, podemos construir o gráfico do logaritimo das abundancias (com relação ao hidrogênio - c.r.H) de O, C e N *versus* metalicidade.

Gráfico log ϵ(X) *versus* [Fe/H].



d) Ordem de abundância (do mais para o menos abundante): O, C e N

Essa ordem é mantida conforme varia a metalicidade? Podemos ver no gráfico que SIM

Questão 20	a)	a	-2,8
		b_{LMC}	17,0
	b)	a	-2,8
		M_0	-1,5
	c)	período de pulsação	1 dia
	d)	b_{NGC}	30,5
	e)	módulo de distância	32
	f)	M_{SN}	-19,4

Questão 20 - espaço para o cálculo

a) Pelo gráfico temos $a = -2{,}8$ e $b_{\mathrm{LMC}} = 17{,}0$

b) Aplicando a distância temos $a = -2{,}8$ e $M_0 = -1{,}5$

c) 1 dia

d) Pelo gráfico $b_{\mathrm{NGC}} = 30{,}5$

e) Pelo gráfico da LMC, podemos determinar a magnitude absoluta de uma estrela com período P e em seguida procurar uma estrela com mesmo período em NGC 4639.

Daí obtemos d = 25 Mpc, o que corresponde a um módulo de distância de $\mu = 32$.

f) Pela relação de Pogson obtemos $M_{\mathrm{SN}} = -19{,}4$.