Colorações de Tabuleiros

Bruno Sagui

Tabuleiros são uma ideia central de diversas questões de matemática olímpica da área de combinatória. Há uma grande variedade de problemas desse tópico, então, nesse material, tentaremos investigar as colorações, que são uma das mais recorrentes formas de resolver tais problemas.

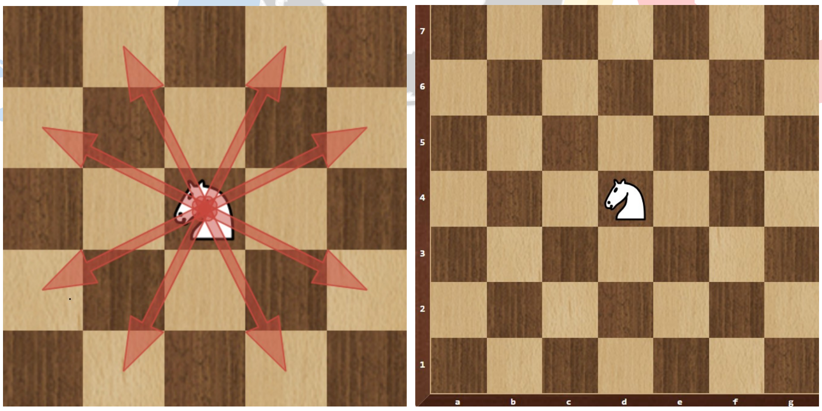
Não há uma "regra" para descobrir se o uso de uma coloração é útil na resolução de determinado problema ou para descobrir qual coloração é ideal para ele. Por isso, é importante resolver questões para se familiarizar com os concetios e aplicá-los mais naturalmente quando necessários.

1 Coloração xadrez

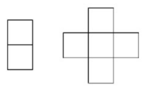
A coloração xadrez, assim como o nome indica, simula um tabuleiro de xadrez. Dessa forma, o tabuleiro é coberto com duas cores de maneira que todas as casas de cor A são tais que suas 4 casas adjacentes têm cor B. Segue, abaixo, um exemplo usando essa coloração.

Exemplo 1: Um cavalo de xadrez está no centro de um tabuleiro 7×7, ou seja, na casa D4. Após fazer um número ímpar de movimentos, em quais quadradinhos ele poderá chegar?

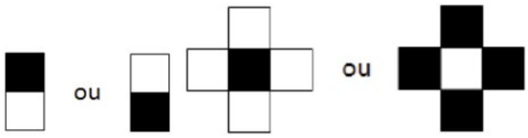
Solução: Primeiramente, faremos uso da coloração xadrez. A partir dela, vamos observar os possíveis movimentos de um cavalo: veja que a cor do quadradinho onde ele está muda a cada movimento (conforme figura abaixo), já que ele anda duas casas horizontalmente e uma verticalmente ou duas casas verticalmente e uma horizontalmente. Assim, estabelecendo que ele começa em uma casa preta, após um número ímpar de movimentos, o cavalo sempre estará em uma casa branca e, após um número par de movimentos, o cavalo sempre estará em uma casa preta. Sabendo que um cavalo conseguiria atingir qualquer casa do tabuleiro, ele poderá chegar em qualquer uma das casas brancas após um número ímpar de movimentos, ou seja, A2, A4, A6, B1, B3, B5, B7, C2, C4, C6, D1, D3, D5, D7, E2, E4, E6, F1, F3, F5, F7, G2, G4 e G6.



Exemplo 2: (São Petersburgo/1997) É possível cobrir uma mesa 75×75 com dominós (retângulos 1×2) e cruzes (formadas por 5 quadradinhos 1×1 sendo 1 no meio e 4 ao redor)?



Solução: Veja que, se pintarmos um tabuleiro 75×75 com uma coloração xadrez, haverá $\frac{75^2+1}{2}$ quadradinhos de uma cor e $\frac{75^2-1}{2}$ de outra (para verificar isso, basta ver que $37 \cdot 37 + 38 \cdot 38 = \frac{75^2+1}{2}$ e $38 \cdot 37 + 37 \cdot 38 = \frac{75^2-1}{2}$, que corresponde a uma análise do número de quadradinhos de certa cor por linhas). Digamos, sem perda de generalidade, que a cor com mais quadradinhos é branca e a cor com menos quadradinhos é preta. Veja que a diferença entre o número de quadradinhos dessas duas cores é de apenas 1. Veja, no entanto, as colorações abaixo:

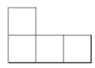


Perceba, então, que a diferença entre o número de casas brancas e pretas em cada dominó é 0 e a diferença entre o número de casas brancas e pretas em cada cruz é 3 ou -3. Assim, veja que, independentemente de que peças forem poicionadas, a diferença entre a quantidade de peças brancas cobertas e peças pretas cobertas será sempre múltipla de 3. Dessa forma, como no tabuleiro 75×75 a diferença entre esses números é 1, ele nunca poderá ser completamente coberto apenas com essas peças.

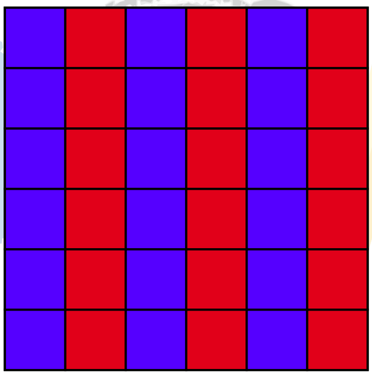
2 Coloração "zebra"

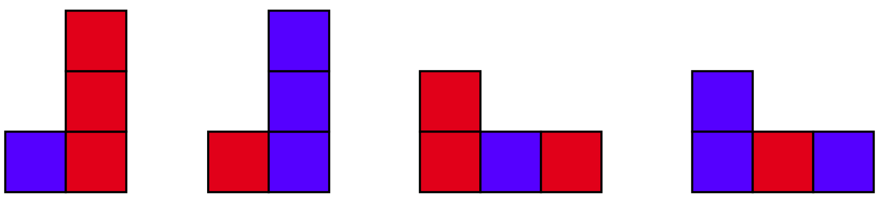
A coloração "zebra" é composta por duas cores e representada por linhas de cores alternadas ou colunas de cores alternadas. Ou seja, ou todas as linhas ímpares têm cor A, e todas as linhas pares têm cor B; ou todas as colunas ímpares têm cor A e todas as colunas pares têm cor B. Segue, abaixo, um exemplo dessa coloração.

Exemplo 1: Usando apenas L-tetraminós, é possível cobrir totalmente um tabuleiro 6×6, sem deixar buracos, nem fazer sobreposições?



Solução: Veja, inicialmente, que seriam necessários $\frac{6 \cdot 6}{4} = 9$ L-tetraminós. Pintando o tabuleiro com a coloração "zebra", obtém-se o seguinte:





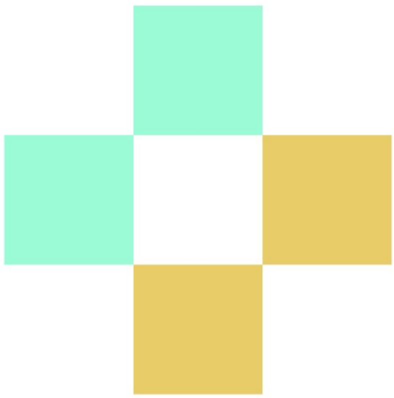
Dessa forma, veja que precisamos da mesma quantidade de quadradinhos vermelhos e azuis. No entanto, perceba que, como todas as peças ou tem 3 quadradinhos azuis e 1 vermelho ou 3 quadradinhos vermelhos e 1 azul, isso só seria possível caso houvesse a mesma quantidade de peças que se enquadrasse em cada um desses dos casos. Para tal, a quantidade total de peças teria que ser par. Portanto, como 9 é ímpar, é impossível preencher esse tabuleiro.

Exemplo 2: (HMMT/2016) Seja $n > 1$ um número inteiro ímpar. Em um tabuleiro $n \times n$, o quadradinho central e 4 cantos são deletados. Desejamos agrupar os $n^2 - 5$ quadradinhos restantes em $\frac{1}{2}(n^2 - 5)$ pares tais que os dois quadradinhos em cada par compartilhem exatamente um vértice. Para quais números inteiros ímpares $n > 1$ isso é possível?

Solução: Pintaremos as colunas seguindo a coloração "zebra", com a primeira coluna sendo preta. Veja, assim, que existirão $\frac{n+1}{2}$ colunas pretas e $\frac{n-1}{2}$ colunas brancas. Veja que, para que dois

quadradinhos compartilhem exatamente 1 vértice, eles precisam estar em colunas adjacentes e, consequentemente, ter cores distintas. Dessa maneira, para que seja possível formar esses pares, é necessário, mas não suficiente, que haja o mesmo número de quadradinhos de cada cor.
Assim, para o caso $n \equiv 1 \pmod 4$, teremos $\frac{n+1}{2} \cdot n - 5$ casas pretas e $\frac{n-1}{2} \cdot n$ casas brancas, já que a primeira coluna, a coluna do meio e a última coluna são todas pretas. Consequentemente, é necessário que $\frac{n+1}{2} \cdot n - 5 = \frac{n-1}{2} \cdot n \Rightarrow n^2 + n - 10 = n^2 - n \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$. Segue, abaixo, um exemplo mostrando que o caso $n = 5$ funciona (quadradinhos com a mesma cor representam um par na figura).

Ademais, para o caso $n \equiv 3 \pmod 4$, teremos $\frac{n+1}{2} \cdot n - 4$ casas pretas e $\frac{n-1}{2} \cdot n - 1$ casas brancas, já que a primeira coluna e a última coluna são ambas pretas, mas a coluna do meio é branca. Consequentemente, é necessário que $\frac{n+1}{2} \cdot n - 4 = \frac{n-1}{2} \cdot n - 1 \Rightarrow n^2 + n - 8 = n^2 - n - 2 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$. Segue, abaixo, um exemplo mostrando que o caso $n = 3$ funciona (quadradinhos com a mesma cor representam um par na figura).

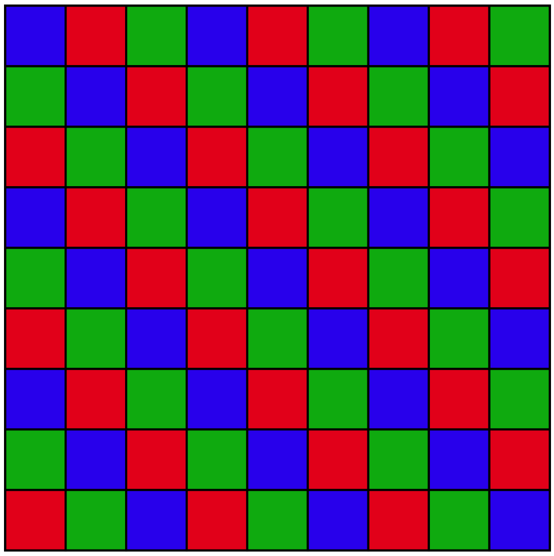


Dessa forma, isso só é possível para $n = 3$ e $n = 5$.

3 Outras colorações espertas

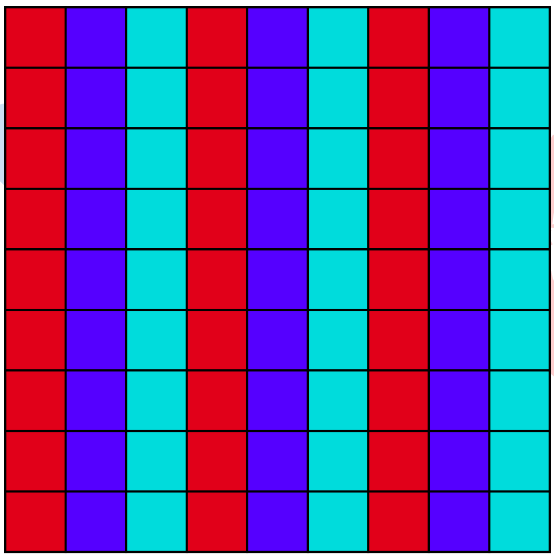
3.1 Variações da coloração xadrez

Essas colorações consistem em variações da coloração xadrez de forma a comportar mais de duas cores. Segue, abaixo, um exemplo dessa coloração com 3 cores.



3.2 Variações da coloração "zebra"

Essas colorações consistem em variações da coloração "zebra" de forma a comportar mais de duas cores. Segue, abaixo, um exemplo dessa coloração quando aplicada com 3 cores.

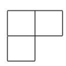


3.3 Colorações que são específicas para um determinado problema

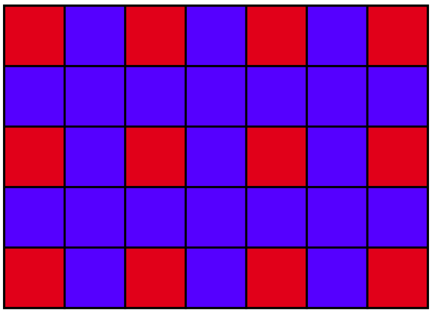
Por fim, é preciso sempre ter em mente que as colorações mais comuns, apresentadas anteriormente, nem sempre ajudarão na solução de problemas de tabuleiros. Em alguns casos, será necessário analisar o problema minuciosamente para perceber padrões que contribuam para o desenvolvimento de uma coloração específica.

Uma ideia interessante que pode ser útil é atribuir números ou "pesos" ao invés de cores. A lógica continua bem parecida, mas, dependendo do problema, uma abordagem numérica pode chegar a resultados mais interessantes.

Exemplo 1: (Rússia/1996) Um tabuleiro 5×7 pode ser coberto usando L-triminós em diversas camadas de forma que cada casa tenha o mesmo número de L-triminós sobre ela?

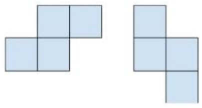


Solução: Primeiramente, veja que, sendo x o número de camadas, $3 \mid x$, visto que, sendo l o número de L-triminós, $3l = 5 \cdot 7 \cdot x$. Dessa forma, vamos dizer que $x = 3k$. Veja, então, que $l = \frac{3k \cdot 5 \cdot 7}{3} = 35k$. Veja a coloração abaixo:

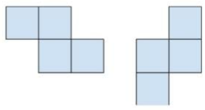


Note que em cada casa vermelha devem haver $3k$ camadas, totalizando $12 \cdot 3k = 36k$ camadas. Perceba que cada L-triminó cobre no máximo uma casa vermelha. Dessa forma, $l \geq 36k$, Portanto, chegamos a um absurdo, como já havíamos demonstrado que $l = 35k$. Consequentemente, fica demonstrado que é impossível que as condições do enunciado sejam cumpridas.

Exemplo 2: (IMO Shortlist/2014) É possível contruir um tetraminó ao juntar dois dominós 2×1 de forma que o ponto médio do maior lado de um dominó seja o canto do outro dominó. Essa construção permite chegar a dois tipos de tetraminós, cujas orientações são opostas. Eles serão chamados de S-tetraminós e Z-tetraminós, respectivamente.
Assuma que um polígono reticulado P pode ser preenchido com S-tetraminós. Prove que, independentemente de como o preenchamos usando apenas S-tetraminós e Z-tetraminós, o número de Z-tetraminós usados será sempre par.

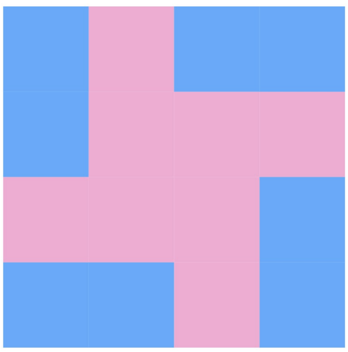


(a) S-tetraminó



(b) Z-tetraminó

Solução: Pintaremos o polígono P seguindo a coloração similar a um moinho de vento indicada abaixo: (esses quadrados 4×4 serão repetidos e colocados lado a lado de forma a preencher todo o polígono P, mesmo que alguns dos quadrados 4×4 fiquem "cortados")



Veja que, seguindo essa coloração, todo S-tetraminó usado ocupará um número par de casas rosas, enquanto todo Z-tetraminó ocupará um número ímpar de casas rosas. Dessa forma, como é possível preencher todo o polígono usando apenas S-tetraminós, o número de casas rosas é necessariamente par. Consequentemente, é necessário que os Z-tetraminós ocupem, juntos, um número par de casas rosas, e isso só é possível caso haja um número par dessas peças.

Exemplo 3: (Sérvia/2018) Sejam a e b números inteiros ímpares maiores que 1. Considere um tabuleiro retangular $a \times b$ com os quadradinhos $(2, 1)$, $(a - 2, b)$ e (a, b) removidos ((i, j) denota o quadradinho de intersecção entre a linha i e a coluna j). Assuma que esse tabuleiro foi preenchido com dominós 2×1 e quadrados 2×2 (os dominós podem ser rotacionados). Prove que ao menos $\frac{3}{2}(a+b)-6$ dominós foram usados.

Solução: Nesse problema, atribuiremos um número para cada quadradinho: sendo (i,j) o quadradinho, ele receberá o número $(-1)^{i+j}(i+j)$. Veja que a soma dos números atribuídos aos quadradinhos de um quadrado 2×2 é sempre 0 e a soma dos números atribuídos aos quadradinhos de um dominó 2×1 é sempre ± 1.
Vamos, agora, calcular a soma total de todo o tabuleiro. Para tal, inicialmente, calcularemos a soma incluindo os quadradinhos $(2,1)$, $(a-2,b)$ e (a,b) e depois os retiraremos. Assuma, sem perda de generalidade, que $a \leq b$ (para considerar todos os casos, seria necessário apenas "girar" o tabuleiro em $90°$).

$$\sum_{i=1}^{a}(\sum_{j=1}^{b}((-1)^{i+j}(i+j))) = \sum_{i=1}^{a}((-1)^{i}\sum_{j=1}^{b}((-1)^{j}\cdot i+(-1)^{j}\cdot j)) = \sum_{i=1}^{a}((-1)^{i}\cdot((-i)+\sum_{j=1}^{b}((-1)^{j}\cdot j))) =$$
$$-\sum_{i=1}^{a}((-1)^{i}\cdot i)-\sum_{j=1}^{b}((-1)^{j}\cdot j) = \frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2} = \frac{a+b+2}{2}$$

Ao retirarmos os quadradinhos $(2,1)$, $(a-2,b)$ e (a,b), a soma se torna $\frac{a+b+2}{2}-((-3)+(a+b-2)+(a+b)) = \frac{a+b+2+6-2a-2b+4-2a-2b}{2} = -\frac{3}{2}(a+b)+6$. Com isso, veja que, já que os quadrados têm soma 0 e os dominós têm soma ± 1, é necessário que ao menos $\frac{3}{2}(a+b)-6$ dominós sejam usados.

4 Outros detalhes

Caso o problema envolva o uso de peças para preencher um tabuleiro, a primeira coisa que deve ser feita é verificar se o número de quadradinhos no tabuleiro é múltiplo do número de quadradinhos que cada peça ocupa. Caso não seja múltiplo, será impossível preencher o tabuleiro com tais peças.

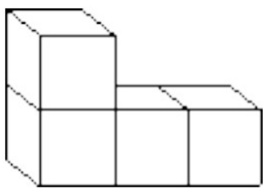
Outra ideia interessante é descrever uma certa atribição de cores usando as coordenadas (i,j) em um certo módulo. Por exemplo, a coloração xadrez pode ser descrita com as casas pretas sendo aquelas nas quais $i+j \equiv 0 \pmod 2$ e as casas brancas sendo aquelas nas quais $i+j \equiv 1 \pmod 2$; e a variação com 3 cores dessa coloração pode ser trabalhada com as casas nas quais $i+j \equiv 0 \pmod 3$ sendo da cor 0, as casas nas quais $i+j \equiv 1 \pmod 3$ sendo da cor 1, e as casas nas quais $i+j \equiv 2 \pmod 3$ sendo da cor 2.

Além disso, devido à grande diversidade de ideias que podem estar contidas em problemas de tabuleiros, a melhor forma de melhor compreendê-los é fazer muitos problemas até que as ideias comecem a vir com mais naturalidade. Por causa disso, nem todas as ideias que podem ser usadas para resolver essas questões conseguem ser trabalhadas em um só material (muitas delas incluem outras matérias, como jogos, invariantes, recorrências e funções geratrizes).

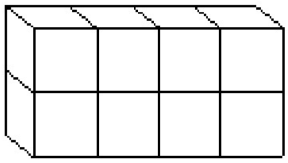
5 Problemas

Problema 1. Em um tabuleiro 5×5, um cavalo de xadrez pretende fazer um "passeio": para tal, ele precisa passar por cada casa do tabuleiro exatamente uma vez, e, depois, retornar à casa inicial. É possível que ele complete seu passeio? E se fosse um tabuleiro 6×6? E se fosse um tabuleiro 4×10?

Problema 2. (Rioplatense/2011) É possível cobrir um cubo $6 \times 6 \times 6$ nos seguintes casos?
a) Usando somente fichas da forma:



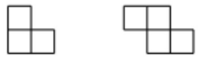
b) Usando somente fichas da forma:



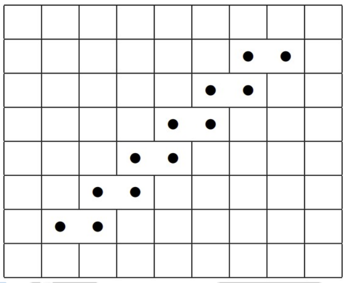
Problema 3. Prove que um retângulo 4×11 não pode ser preenchido por L-tetraminós.

Problema 4. Uma única casa deve ser retirado de um tabuleiro 7×7 de forma que o novo tabuleiro possa ser preenchido por triminós 1×3. Quais são todas as casas que, quando removidas, satisfazem essa condição?

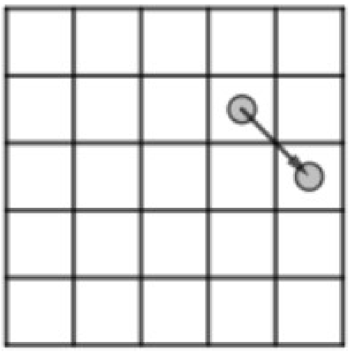
Problema 5. (Estônia/1993) Para quais n é possível cobrir um retângulo de tamanho $3 \times n$ com peças mostradas na figura ao lado sem sobreposição?



Problema 6. (Canadá/2007) Qual o maior número de dominós que pode ser posto no tabuleiro 9×8 abaixo, sabendo que 6 peças já foram colocadas, conforme a figura?



Problema 7. Em um tabuleiro 5×5, cada quadradinho possui uma peça em seu centro. O único movimento permitido para uma dessas peças é se deslocar para um quadradinho que compartilhe exatamente um vértice com o quadradinho em que ela está, como indicado na figura abaixo. Tanto é possível que várias peças ocupem um mesmo quadradinho quanto é possível que um quadradinho fique vazio. Em um dado momento, todas as peças serão movidas simultaneamente. Qual o número mínimo de quadradinhos vazios que poderão ser encontrados após esse momento?



Problema 8. (OBM/2016) Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores.
a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?
b) Quantas casas serão pintadas de marrom?

Problema 9. (Primeira Lista de Treinamento para a Cone Sul 2008) As faces de um cubo $9 \times 9 \times 9$ são particionadas em 486 quadradinhos da maneira usual (81 quadradinhos iguais em cada face). Sua superfície é coberta, sem sobreposição, por 243 tiras de papel 2×1. Uma tira é dita *dobrada* se não está em apenas uma face. Prove que o número de tiras dobradas é ímpar.

Problema 10. Considere um tabuleiro $n \times n$. Para quais valores de n o tabuleiro pode ser preenchido por peças 4×1 sem que haja sobreposição?

6 Referências bibliográficas

1. Art of Problem Solving
2. Como cobrir tabuleiros - Diego Eloi - 23° Semana Olímpica
3. Mathematics Stack Exchange
4. Treinamento Olímpico - Bruno Holanda, Carlos A. Ribeiro, Cícero T. Magalhães, Samuel Barbosa, Yuri Lima
5. Tabuleiros, Jogos e Invariantes - Samuel Feitosa - Encontro do Hotel de Hilbert 2022
6. The method of colouring in combinatorics - Vilgot Jansson, Viggo Laaksoharju, David Mörtberg, Pontus Nilsson, Ferdinand Rönngren
7. Tiling: Coloring and Weights - Yufei Zhao