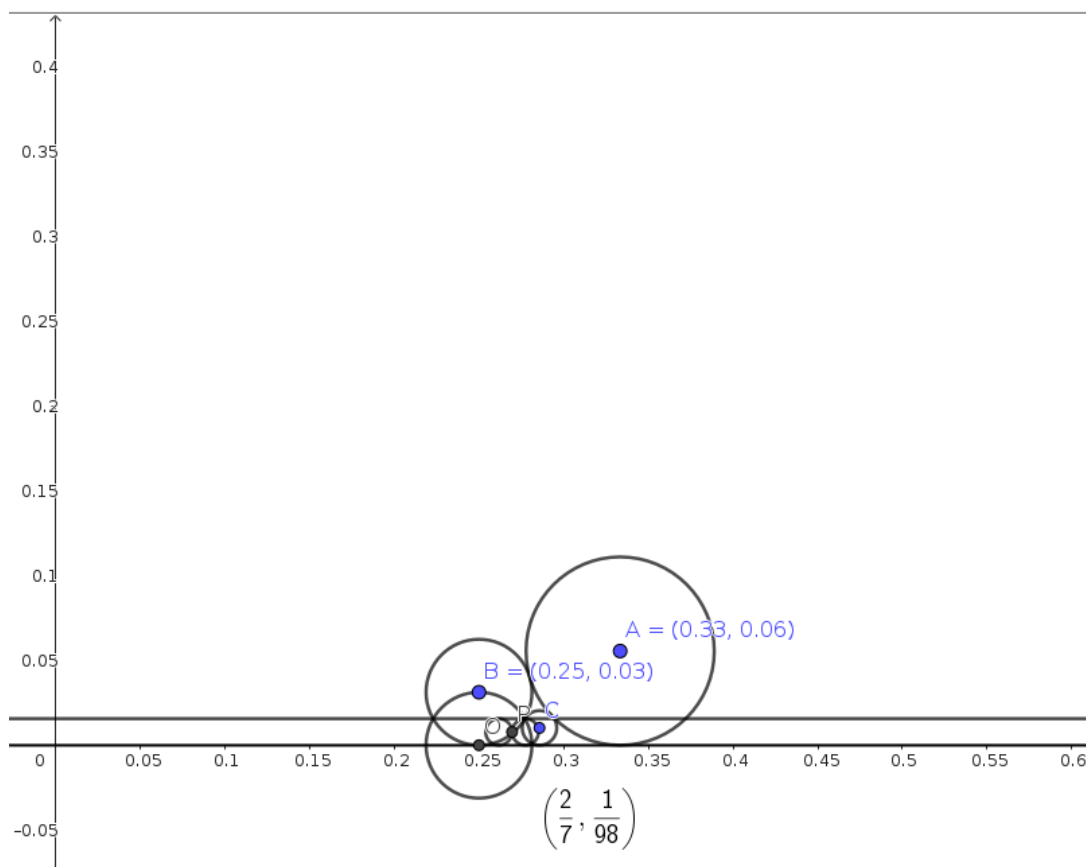


OMU Primeira Fase - Nível Beta

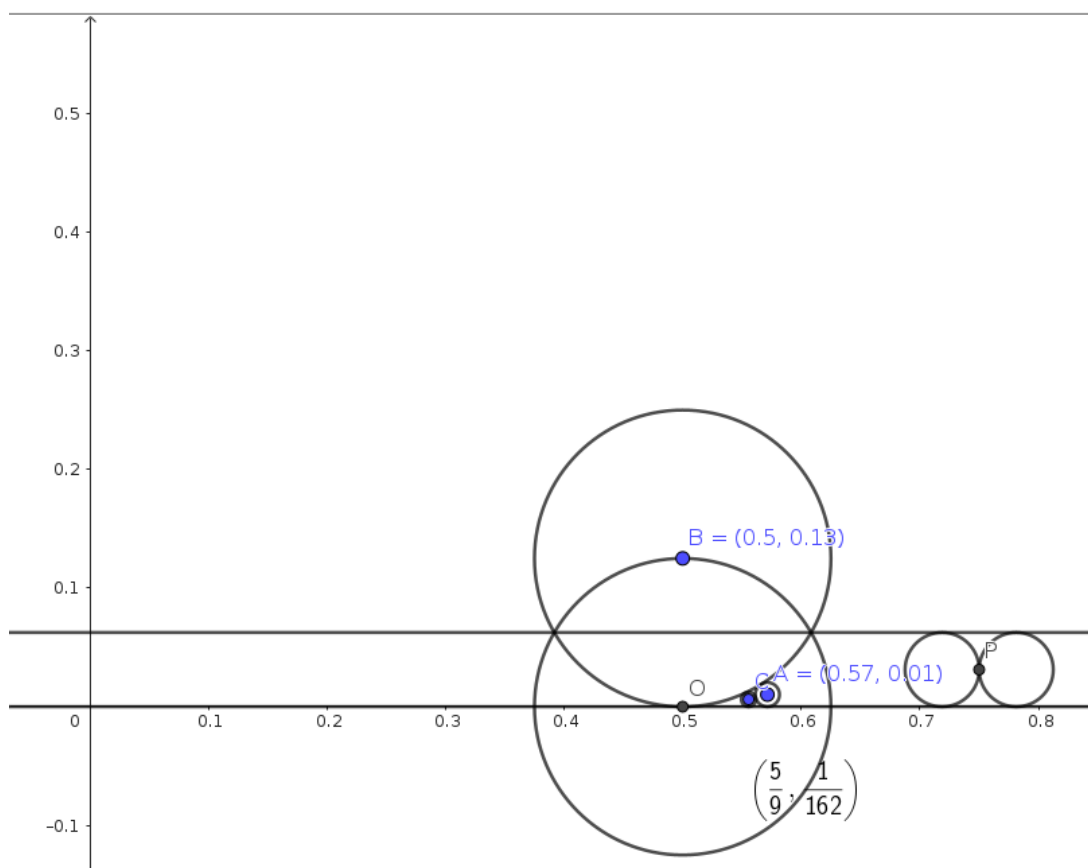
Por Thalia Rebouças, Thiago Negreti e Tiago Trindade

Questão 1

- (a) Podemos usar a ferramenta “Refletir por um círculo” da seguinte forma:
1. Criamos um círculo Ω com centro no ponto de tangência entre o eixo x e $C(a/b)$ (de fato temos essa tangência pois a distância do círculo ao eixo é igual ao seu raio) passando pelo centro de $C(a/b)$.
 2. Refletimos o eixo x e os círculos $C(a/b)$ e $C(c/d)$ por Ω .
 3. Refletimos o inverso de $C(a/b)$ pelo seu ponto extremo direito (que pode ser encontrado usando a função “Otimização”). É fácil ver que esse círculo será tangente aos inversos dos 3 objetos mencionados acima.
 4. Refletimos o objeto resultante do item anterior por Γ .
 5. Usamos a função “FraçãoEmTexto” para encontrar o valor exato da posição do centro desse círculo. Obtemos assim $m/n = 2/7$ (verificaremos no item (e) que esse valor de fato funciona).



- (b) Repetindo o procedimento mencionado no item anterior encontramos $m/n = 5/9$ (novamente, verificaremos no item (e) que esse valor de fato funciona).



(c) Podemos notar que $m = a + c$ e $n = b + d$ nos itens (a) e (b). Dessa forma conjecturamos que no caso geral $C(m/n)$ é tangente a $C(a/b)$ e $C(c/d)$ se e somente se $m = a + c$ e $n = b + d$, ou em outras palavras, se $\frac{m}{n}$ é o mediano de $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

(d) As circunferências são tangentes se, e somente se, a distância entre os centros é igual à soma dos raios:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2} = \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}$$

donde

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 = \frac{1}{4b^4} + \frac{2}{4b^2d^2} + \frac{1}{4d^4} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2}{b^2} - \frac{2ac}{bd} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{1}{4b^2} - \frac{2}{4b^2d^2} + \frac{1}{4d^4} = \frac{1}{4b^4} + \frac{2}{4b^2d^2} + \frac{1}{4d^4} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2}{b^2} - \frac{2ac}{bd} + \frac{c^2}{d^2} = \frac{1}{b^2d^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2}{b^2d^2} = \frac{1}{b^2d^2} \\ \Leftrightarrow & a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & (ad - bc)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & ad - bc = 1 \end{aligned}$$

uma vez que $a/b > c/d$ e portanto $ad - bc > 0$.

(e) Para que a terceira circunferência $C(m/n)$ seja tangente às outras duas, ela deve obedecer:

$$\begin{aligned} an - bm &= 1, \quad md - nc = 1 \\ \implies an - bm &= md - nc \\ \implies n(a + c) &= m(b + d) \\ \implies \frac{m}{n} &= \frac{a + c}{b + d} \end{aligned}$$

Seja $\text{mdc}(a + c, b + d) = k$:

$$\begin{aligned} k &\mid (a + c), \quad k \mid (b + d) \\ \implies k &\mid (a + c)d - (b + d)c \\ \implies k &\mid ad - bc = 1 \\ \implies k &= 1 \end{aligned}$$

Assim, $\text{mdc}(m, n) = 1$, sendo m e n coprimos.

Evidentemente isso já implica a unicidade da solução.

Vamos agora provar que os resultados enunciados nos itens (a) e (b) estão de fato corretos. É suficiente mostrar que a terceira circunferência $C(m/n)$ obedece à relação:

$$an - bm = 1, \quad md - nc = 1$$

Sendo $a/b = 1/3$ e $c/d = 1/4$ e $m/n = 2/7$, temos: $1 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 1$ e $2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1$.

Portanto $C(2/7)$ é tangente a ambas as circunferências. Além disso, sendo $a/b = 4/7$ e $c/d = 1/2$ e $m/n = 5/9$, temos: $4 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = 1$ e $5 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = 1$, portanto $C(5/9)$ também é uma solução válida.

Questão 2

(a) Prova-se facilmente por indução em n que composição de n rotações R_α é o mesmo que: $R_\alpha^n(x) \equiv x + n \cdot \alpha \pmod{1}$. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} a &\equiv a_1 \pmod{1}, \quad b \equiv b_1 \pmod{1} \\ \implies a + b &\equiv a_1 + b_1 \pmod{1} \end{aligned}$$

Logo, para que $R_\alpha^n(x) \equiv x \pmod{1}$, é necessário e suficiente que $n \cdot \alpha$ seja inteiro, já que nesse caso $n \cdot \alpha \equiv 0 \pmod{1}$. Sendo α racional, ele pode ser escrito como a/b , onde a e b são inteiros. Assim:

$$n \cdot \alpha \in \mathbb{Z} \iff n \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$$

Assim, se $n = b$, $n \cdot \alpha = a$, que é inteiro por hipótese.

(b) Se α é irracional, ele não pode ser escrito como a/b para a e b inteiros, o que é equivalente a dizer que ele não possui um múltiplo inteiro. Como a rotação $R_\alpha^n(x)$ é o equivalente a adicionar um múltiplo de α a x , com certeza a aplicação $R_\alpha^n(x)$ não adicionará um inteiro a x . Assim, $n \cdot \alpha \not\equiv 0 \pmod{1}$, donde $R_\alpha^n(x) \equiv x + n \cdot \alpha \not\equiv x \pmod{1}$.

(c) Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < a - b$.

Divida o intervalo $[0, 1)$ em N intervalos de igual comprimento: $[\frac{0}{N}, \frac{1}{N})$, $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N})$, $\dots$, $[\frac{N-1}{N}, \frac{N}{N})$.

Obviamente um desses intervalos deve conter ao menos dois elementos da sequência $(\{n \cdot \alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$ (onde $\{x\}$ é a parte fracionária de x), uma vez que esta sequência é infinita.

Digamos que $\{n_1 \cdot \alpha\}, \{n_2 \cdot \alpha\} \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N})$ onde $n_1 < n_2$.

Vamos agora analisar $\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\}$.

Caso $\{n_2 \cdot \alpha\} \geq \{n_1 \cdot \alpha\}$ teremos que $\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} = \{n_2 \cdot \alpha\} - \{n_1 \cdot \alpha\} < \frac{i+1}{N} - \frac{i}{N} = \frac{1}{N}$.

Seja $k = \lceil \frac{a}{\{(n_1 - n_2) \cdot \alpha\}} \rceil$. Como

$$\begin{aligned}
 0 &< k\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} \\
 &< \left(1 + \frac{a}{\{(n_1 - n_2) \cdot \alpha\}}\right)\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} \\
 &= a + \{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} \\
 &< a + \frac{1}{N} \\
 &< b \\
 &< 1
 \end{aligned}$$

temos que $k\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} = \{k(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} \in (a, b)$.

Logo podemos tomar $n = k(n_2 - n_1)$ nesse caso.

Vamos agora ao caso em que $\{n_2 \cdot \alpha\} < \{n_1 \cdot \alpha\}$. É fácil ver que $\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} = 1 - (\{n_2 \cdot \alpha\} - \{n_1 \cdot \alpha\}) > 1 - \frac{i}{N} - \frac{i+1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$.

Evidentemente o raciocínio é análogo ao do item anterior, com a única diferença de que devemos tomar $k = \lceil \frac{1-b}{1-\{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\}} \rceil$:

$$1 - b < k(1 - \{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\}) < 1 - b + (1 - \{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\}) < 1 - a$$

Tomamos então $n = k(n_2 - n_1)$ pois assim $\{n \cdot \alpha\} = \{k(n_2 - n_1) \cdot \alpha\} = 1 - \{k(1 - \{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\})\}$ e $\{k(1 - \{(n_2 - n_1) \cdot \alpha\})\} \in (1 - b, 1 - a)$ donde $\{n \cdot \alpha\} \in (a, b)$.

(d) Seja $d = \overline{d_1 d_2 \dots d_l}$ essa sequência de dígitos.

Evidentemente 2^N começa com essa sequência de dígitos se e somente se $d \cdot 10^k \leq 2^N < (d+1) \cdot 10^k$ onde k é a quantidade de dígitos de 2^N menos l .

Tirando o $\log_{10}$ da desigualdade acima temos $\log_{10}(d) + k \leq N \log_{10}(2) < \log_{10}(d+1) + k$.

Evidentemente $l + k \leq N \log_{10}(2) < l + k + 1$. Logo para provar a desigualdade acima é suficiente verificar que $\{N \log_{10}(2)\} \in I$ onde $I = [\{\log_{10}(d)\}, \{\log_{10}(d+1)\})$ caso $\{\log_{10}(d)\} < \{\log_{10}(d+1)\}$ e $I = [\{\log_{10}(d+1)\}, \{\log_{10}(d)\})$ caso contrário.

Note é claro que se $\{\log_{10}(d)\} = \{\log_{10}(d+1)\}$ então $\log_{10}(d+1) = \log_{10}(d) + 1$ (pois $\log_{10}(d) < \log_{10}(d+1) \leq 1 + \log_{10}(d)$ uma vez que $d+1$ tem no máximo 1 dígito a mais que d) donde $d+1 = 10d$, o que é impossível.

Mas é claro, $\log_{10}(2)$ é irracional (caso contrário $2 = 10^{\frac{p}{q}}$ para $p, q \in \mathbb{N}$, o que implica $2^q = 10^p$ e consequentemente 5 divide 2^q , absurdo), e donde pelo item anterior existe N tal que $\{N \log_{10}(2)\} \in I$. Isso conclui o problema.

Questão 3

(a) Para $f(x) = x^2 + 4x + 6$ temos

$$\begin{aligned}
 T_1(f(x)) &= x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right) \\
 &= x^2 \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 4x^2 \left(\frac{x+1}{x}\right) + 6x^2 \\
 &= (x^2 + 2x + 1) + 4x(x+1) + 6x^2 \\
 &= 11x^2 + 6x + 1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 T_2(f(x)) &= (x-1)^2 \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + 4(x-1)^2 \left(\frac{1}{x-1}\right) + 6(x-1)^2 \\
 &= 1 + 4(x-1) + 6(x^2 - 2x + 1) \\
 &= 6x^2 - 8x + 3
 \end{aligned}$$

Para $f(x) = x^2 - 4x + 2$ temos

$$\begin{aligned} T_1(f(x)) &= x^2 \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 - 4x^2 \left(\frac{x+1}{x} \right) + 2x^2 \\ &= (x+1)^2 - 4x(x+1) + 2x^2 \\ &= -x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(f(x)) &= (x-1)^2 \left(\frac{1}{x-1} \right)^2 - 4(x-1)^2 \left(\frac{1}{x-1} \right) + 2(x-1)^2 \\ &= 1 - 4(x-1) + 2(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2x^2 - 8x + 7 \end{aligned}$$

(b) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos

$$\begin{aligned} T_1(f(x)) &= ax^2 \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 + bx^2 \left(\frac{x+1}{x} \right) + cx^2 \\ &= a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx^2 \\ &= (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(f(x)) &= a(x-1)^2 \left(\frac{1}{x-1} \right)^2 + b(x-1)^2 \left(\frac{1}{x-1} \right) + c(x-1)^2 \\ &= a + b(x-1) + c(x-1)^2 \\ &= cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c) \end{aligned}$$

(c) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O discriminante de $f(x)$ é $\Delta = b^2 - 4ac$.

Pelo item anterior, $T_1(f(x)) = (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$. O discriminante desse polinômio é $\Delta_1 = (2a+b)^2 - 4(a+b+c)a = 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - 4ac = b^2 - 4ac = \Delta$.

Novamente pelo item anterior, $T_2(f(x)) = cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c)$. O discriminante desse polinômio é $\Delta_2 = (b-2c)^2 - 4c(a-b+c) = b^2 - 4bc + 4c^2 - 4ac + 4bc - 4c^2 = b^2 - 4ac = \Delta$.

Portanto aplicações sucessivas de T_1 e T_2 não alteram o discriminante de um polinômio.

Dessa forma, como o discriminante de $g(x) = x^2 + 2025x + 2024$ é $2025^2 - 4 \cdot 2024 = 4092529$, enquanto o discriminante de $h(x) = x^2 + 2024x + 2023$ é $2024^2 - 4 \cdot 2023 = 4088484$, concluímos que não é possível transformar $g(x)$ em $h(x)$ por aplicações sucessivas de T_1 e T_2 .

Questão 4

(a) Considere os cubos vermelho, azul e roxo como os números 0, 1 e 2 respectivamente.

Definiremos então uma regra de formação do k -ésimo cubo $C_{j+1,k}$ da fileira $j+1$ a partir dos dois cubos $C_{j,k}$ e $C_{j,k+1}$ da fileira j imediatamente abaixo. Se $C_{j,k} = C_{j,k+1}$, então pelo enunciado devemos ter $C_{j+1,k} = C_{j,k} = C_{j,k+1}$.

Se $C_{j,k} \neq C_{j,k+1}$, então $C_{j+1,k} \neq C_{j,k}$ e $C_{j+1,k} \neq C_{j,k+1}$. Isto é, $C_{j+1,k} + C_{j,k} + C_{j,k+1} \equiv 1 + 2 + 3 \equiv 0 \pmod{3}$, o que implica $C_{j+1,k} \equiv -(C_{j,k} + C_{j,k+1}) \pmod{3}$.

Considere a fileira inicial de n cubos, denotada por $C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{1,n}$. De acordo com o problema, o primeiro cubo é azul e os demais são vermelhos. Assim, temos $C_{1,1} = 1$ e $C_{1,j} = 0$ para $j = 2, \dots, n$.

Observe que se dois cubos adjacentes na fileira i são vermelhos (0), o cubo acima deles também será vermelho. Como os cubos $C_{1,2}, C_{1,3}, \dots, C_{1,n}$ são todos vermelhos, a sub-pirâmide formada acima deles (excluindo a primeira coluna de cubos) será inteiramente composta por cubos vermelhos. Ou seja, $C_{i,j} = 0$ para $i > 1$ e $j > 1$.

A cor do primeiro cubo de cada nova fileira ($C_{i,1}$) é determinada pela cor do primeiro cubo da fileira anterior ($C_{i-1,1}$) e do segundo cubo da fileira anterior ($C_{i-1,2}$).

Na fileira 1, temos que $C_{1,1} = 1$, ou seja, o primeiro cubo é azul.

Na fileira 2, $C_{2,1} \equiv -(C_{1,1} + C_{1,2}) \equiv -(1 + 0) \equiv 2 \pmod{3}$, ou seja, o primeiro cubo da fileira 2 é roxo.

Na fileira 3, $C_{3,1} \equiv -(C_{2,1} + C_{2,2}) \equiv -(2 + 0) \equiv 1 \pmod{3}$, ou seja, o primeiro cubo da fileira 3 é azul.

Note que o primeiro cubo de cada fileira se alterna entre azul (1) e roxo (2), em que o primeiro cubo da fileira i terá cor 1 (azul) se i for ímpar e cor 2 (roxo) se i for par.

Como a pirâmide é formada por n fileiras e o cubo do topo é o único cubo na n -ésima fileira, concluímos que a cor do cubo do topo depende da paridade de n . Se n for ímpar, o cubo do topo é azul. Se n for par, o cubo do topo é roxo.

(b) Considere a fileira inicial de n cubos $C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{1,n}$. De acordo com o problema, os primeiros $n-1$ cubos são azuis, e o cubo do topo da pirâmide ($C_{n,1}$) é vermelho. Assim, temos $C_{1,j}$ para $j = 1, \dots, n-1$, e $C_{n,1} = 0$. Queremos encontrar a cor de $C_{1,n}$.

Podemos usar a regra de formação apresentada no item (a) de forma reversa para deduzir a cor de cubos inferiores a partir de cubos superiores conhecidos.

Os primeiros $n-1$ cubos da fileira inicial, sendo todos azuis, formam uma sub-pirâmide de $n-1$ fileiras composta inteiramente por cubos azuis. Portanto, qualquer cubo $C_{i,j}$ na pirâmide formado exclusivamente a partir dos cubos $C_{1,1}, \dots, C_{1,n-1}$ será azul. Esses cubos azuis formam a região onde o índice da coluna j é menor ou igual a $n-i$. Ou seja, $C_{i,j} = 1$ para $j \leq n-i$.

O cubo do topo, $C_{n,1}$, é formado a partir dos cubos $C_{n-1,1}$ e $C_{n-1,2}$. Pela regra:

$$C_{n,1} \equiv -(C_{n-1,1} + C_{n-1,2}) \pmod{3}$$

Sabemos que $C_{n,1} = 0$ e que $C_{n-1,1}$ faz parte da sub-pirâmide azul (pois $1 \leq n - (n-1) = 1$), então $C_{n-1,1} = 1$. Substituindo na regra:

$$0 \equiv -(1 + C_{n-1,2}) \equiv 2 - C_{n-1,2} \pmod{3} \implies C_{n-1,2} \equiv 2 \pmod{3}$$

Assim, $C_{n-1,2}$ é roxo.

Agora, consideremos o cubo $C_{n-1,2}$. Ele é formado a partir de $C_{n-2,2}$ e $C_{n-2,3}$:

$$C_{n-1,2} \equiv -(C_{n-2,2} + C_{n-2,3}) \pmod{3}$$

Sabemos que $C_{n-1,2} = 2$. O cubo $C_{n-2,2}$ faz parte da sub-pirâmide azul (pois $2 \leq n - (n-2) = 2$), então $C_{n-2,2} = 1$. Substituindo:

$$2 \equiv -(1 + C_{n-2,3}) \equiv 2 - C_{n-2,3} \pmod{3} \implies C_{n-2,3} \equiv 0 \pmod{3}$$

Assim, $C_{n-2,3}$ é vermelho.

Seguindo esse padrão, temos a sequência de cubos na diagonal a partir do topo sendo $C_{n,1}, C_{n-1,2}, C_{n-2,3}, \dots, C_{1,n}$. Ou seja, o cubo genérico nesta diagonal é $C_{k,n-k+1}$, formado a partir de $C_{k-1,n-k+1}$ e $C_{k-1,n-k+2}$. Para $k > 1$, o cubo $C_{k-1,n-k+1}$ está na borda direita da sub-pirâmide azul (pois $n-k+1 < n$), portanto, $C_{k-1,n-k+1} = 1$.

A regra de formação para os cubos nesta diagonal (para $k > 1$) se torna:

$$C_{k,n-k+1} \equiv -(1 + C_{k-1,n-k+2}) \pmod{3}$$

Temos a sequência de cores:

$$\begin{aligned} C_{n,1} &= 0 \\ C_{n-1,2} &= 2 \quad (\text{pois } 0 \equiv -(1 + C_{n-1,2}) \pmod{3}) \\ C_{n-2,3} &= 0 \quad (\text{pois } 0 \equiv -(1 + C_{n-2,3}) \pmod{3}) \\ C_{n-3,4} &= 2 \quad (\text{pois } 0 \equiv -(1 + C_{n-3,4}) \pmod{3}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, conforme k diminui de n para 1, a cor alterna entre vermelho e roxo. Se $n-k$ for par (ou seja, k e n têm a mesma paridade), então o cubo é vermelho. Se $n-k$ for ímpar (ou seja, k e n têm paridades



diferentes), o cubo é roxo. Portanto, a cor de $C_{1,n}$ depende da paridade de n . Se n for ímpar, $C_{1,n}$ é vermelho (0). Se n for par, $C_{1,n}$ é roxo (2).

(c) Para $n = 4$, temos os cubos $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{1,3}$ e $C_{1,4}$ na fileira inicial, os cubos $C_{2,1}$, $C_{2,2}$ e $C_{2,3}$ na segunda fileira, os cubos $C_{3,1}$ e $C_{3,2}$ na terceira fileira e, por fim, o cubo $C_{4,1}$ no topo.

Pela regra de formação, temos:

$$\begin{aligned} C_{4,1} &\equiv -(C_{3,1} + C_{3,2}) \pmod{3} \\ C_{3,1} &\equiv -(C_{2,1} + C_{2,2}) \pmod{3} \\ C_{3,2} &\equiv -(C_{2,2} + C_{2,3}) \pmod{3} \\ C_{2,1} &\equiv -(C_{1,1} + C_{1,2}) \pmod{3} \\ C_{2,2} &\equiv -(C_{1,2} + C_{1,3}) \pmod{3} \\ C_{2,3} &\equiv -(C_{1,3} + C_{1,4}) \pmod{3} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} C_{3,1} &\equiv -(-(C_{1,1} + C_{1,2}) + (-(C_{1,2} + C_{1,3}))) \pmod{3} \\ \implies C_{3,1} &\equiv C_{1,1} + 2C_{1,2} + C_{1,3} \pmod{3} \end{aligned}$$

De mesma forma,

$$\begin{aligned} C_{3,2} &\equiv -(-(C_{1,2} + C_{1,3}) + (-(C_{1,3} + C_{1,4}))) \pmod{3} \\ \implies C_{3,2} &\equiv C_{1,2} + 2C_{1,3} + C_{1,4} \pmod{3} \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} C_{4,1} &\equiv -((C_{1,1} + 2C_{1,2} + C_{1,3}) + (C_{1,2} + 2C_{1,3} + C_{1,4})) \pmod{3} \\ \implies C_{4,1} &\equiv -(C_{1,1} + 3C_{1,2} + 3C_{1,3} + C_{1,4}) \pmod{3} \\ \implies C_{4,1} &\equiv -(C_{1,1} + C_{1,4}) \pmod{3} \end{aligned}$$

Logo, o cubo no topo da pirâmide depende unicamente dos primeiro e último cubos.

(d) Queremos provar que se $n = 3^{m+1}$, então a cor do cubo no topo da pirâmide depende unicamente dos primeiro e último cubos da fileira inicial. Para $m = 0$, temos $n = 2$. Claramente, pela fórmula de formação, $C_{\text{topo}} \equiv -(C_{1,1} + C_{1,n}) \pmod{3}$. Para $m = 1$ temos $n = 4$ e, pelo item anterior, a hipótese também é válida. Logo, esses serão nossos casos base.

Suponha que para todo $m \leq k$ vale $C_{\text{topo}} \equiv -(C_{1,1} + C_{1,n}) \pmod{3}$. Assim, se $m = k + 1$, temos uma pirâmide com $3^{k+1} + 1$ cubos na base e com o mesmo número de fileiras.

Separaremos então a pirâmide maior, de base $3^{k+1} + 1$, em pirâmides menores de base $3^k + 1$. Pela hipótese de indução, vale que o cubo do topo da pirâmide maior ($C_{3^{k+1}+1,1}$) depende unicamente dos cubos na extremidade da fileira que contém $3^k + 1$ cubos, ou seja, dos cubos $C_{2 \cdot 3^k+1,1}$ e $C_{2 \cdot 3^k+1,3^k+1}$.

Novamente pela hipótese, temos que $C_{2 \cdot 3^k+1,1}$ depende apenas da cor de $C_{3^k+1,1}$ e $C_{3^k+1,3^k+1}$, pois esses cubos formam uma sub-pirâmide de base $3^k + 1$ cubos. Pelo mesmo motivo, a cor de $C_{2 \cdot 3^k+1,3^k+1}$ depende somente das cores dos cubos $C_{3^k+1,3^k+1}$ e $C_{3^k+1,2 \cdot 3^k+1}$.

Por fim, o cubo $C_{3^k+1,1}$ depende de $C_{1,1}$ e $C_{1,3^k+1}$, o cubo $C_{3^k+1,3^k+1}$ depende de $C_{1,3^k+1}$ e $C_{1,2 \cdot 3^k+1}$ e o cubo $C_{3^k+1,2 \cdot 3^k+1}$ depende de $C_{1,2 \cdot 3^k+1}$ e $C_{1,3^{k+1}+1}$.

Ou seja, temos que

$$\begin{aligned} C_{3^{k+1}+1,1} &\equiv -(C_{2 \cdot 3^k+1,1} + C_{2 \cdot 3^k+1,3^k+1}) \pmod{3} \\ C_{2 \cdot 3^k+1,1} &\equiv -(C_{3^k+1,1} + C_{3^k+1,3^k+1}) \pmod{3} \\ C_{2 \cdot 3^k+1,3^k+1} &\equiv -(C_{3^k+1,3^k+1} + C_{3^k+1,2 \cdot 3^k+1}) \pmod{3} \\ C_{3^k+1,1} &\equiv -(C_{1,1} + C_{1,3^k+1}) \pmod{3} \\ C_{3^k+1,3^k+1} &\equiv -(C_{1,3^k+1} + C_{1,2 \cdot 3^k+1}) \pmod{3} \\ C_{3^k+1,2 \cdot 3^k+1} &\equiv -(C_{1,2 \cdot 3^k+1} + C_{1,3^{k+1}+1}) \pmod{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_{2 \cdot 3^k+1,1} &\equiv -(-(C_{1,1} + C_{1,3^k+1}) + -(C_{1,3^k+1} + C_{1,2 \cdot 3^k+1})) \pmod{3} \\ \implies C_{2 \cdot 3^k+1,1} &\equiv C_{1,1} + 2C_{1,3^k+1} + C_{1,2 \cdot 3^k+1} \pmod{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_{2 \cdot 3^{k+1},3^k+1} &\equiv -(-(C_{1,3^k+1} + C_{1,2 \cdot 3^k+1}) + -(C_{1,2 \cdot 3^k+1} + C_{1,3^{k+1}+1})) \pmod{3} \\ \implies C_{2 \cdot 3^{k+1},3^k+1} &\equiv C_{1,3^k+1} + 2C_{1,2 \cdot 3^k+1} + C_{1,3^{k+1}+1} \pmod{3} \end{aligned}$$

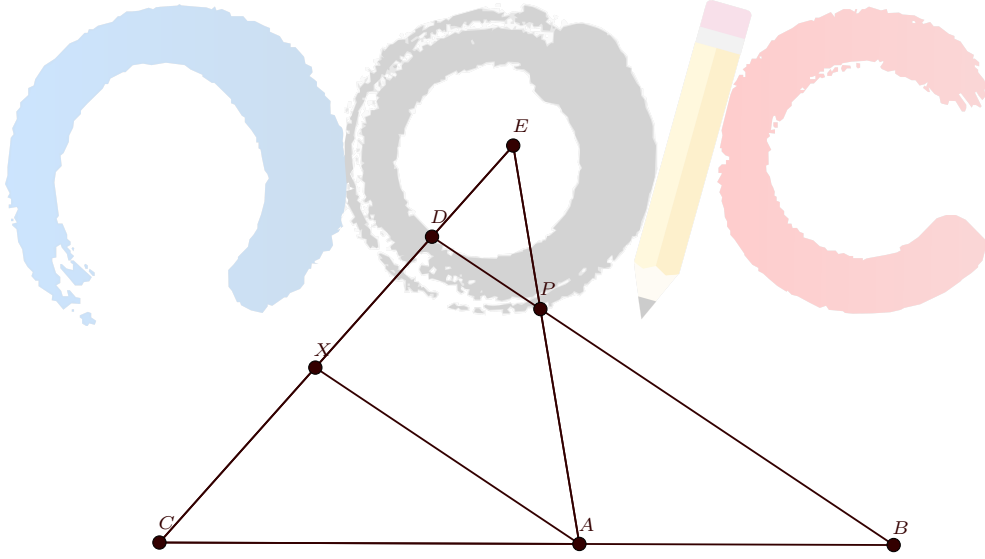
Dessa forma,

$$\begin{aligned} C_{3^{k+1}+1,1} &\equiv -((C_{1,1} + 2C_{1,3^k+1} + C_{1,2 \cdot 3^k+1}) + (C_{1,3^k+1} + 2C_{1,2 \cdot 3^k+1} + C_{1,3^{k+1}+1})) \pmod{3} \\ \implies C_{3^{k+1}+1,1} &\equiv -(C_{1,1} + 3C_{1,3^k+1} + 3C_{1,2 \cdot 3^k+1} + C_{1,3^{k+1}+1}) \pmod{3} \\ \implies C_{3^{k+1}+1,1} &\equiv -(C_{1,1} + C_{1,3^{k+1}+1}) \pmod{3} \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração.

Questão 5

(a) Seja X a intersecção da reta paralela a BD passando por A com CE .



Evidentemente do paralelismo temos $\triangle CAX \sim \triangle CBD$ e $\triangle EDP \sim \triangle EXA$.
Consequentemente,

$$\frac{PA}{EP} = \frac{AE - EP}{EP} = \frac{AE}{EP} - 1 = \frac{XE}{DE} - 1 = \frac{XE - DE}{DE} = \frac{XD}{DE}$$

onde usamos que $\frac{AE}{EP} = \frac{XE}{DE}$ pois $\triangle EDP \sim \triangle EXA$, e também

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC - CA}{BC} = 1 - \frac{CA}{BC} = 1 - \frac{CX}{CD} = \frac{CD - CX}{CD} = \frac{XD}{CD}$$

onde usamos que $\frac{CA}{BC} = \frac{CX}{CD}$ pois $\triangle CAX \sim \triangle CBD$.

Portanto,

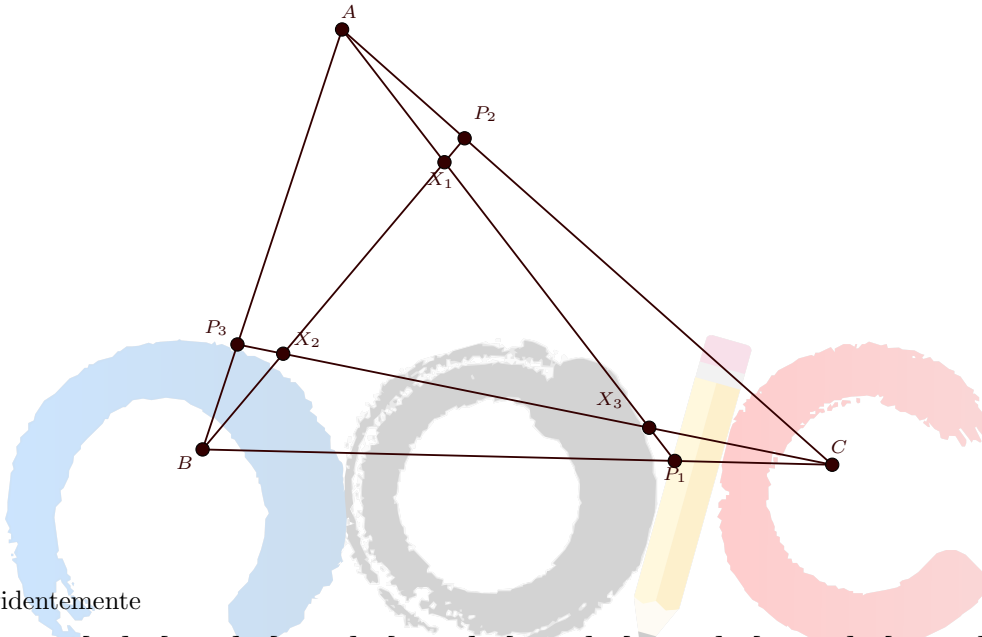
$$\frac{PA}{EP} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{XD}{DE} \cdot \frac{CD}{XD} = \frac{CD}{DE}$$

donde

$$PA \cdot BC \cdot DE = EP \cdot AB \cdot CD$$

Isso conclui nossa prova.

(b) Seja $X_1 = AP_1 \cap BP_2$, $X_2 = BP_1 \cap CP_3$, $X_3 = CP_1 \cap AP_2$.



Evidentemente

$$[T_n] = [ABC] - [ABP_2] - [BCP_3] - [CAP_1] + [AX_1P_2] + [BX_2P_3] + [CX_3P_1]$$

Mas é claro, pela fórmula da área de um triângulo em função da base e da altura temos

$$\frac{[ABP_2]}{[ABC]} = \frac{P_2A}{CA} = \frac{1}{n}$$

donde $[ABP_2] = \frac{1}{n}[ABC]$.

Analogamente temos $[BCP_3] = [CAP_1] = \frac{1}{n}[ABC]$.

Agora, pelo item (a) temos

$$\begin{aligned} \frac{X_3P_1}{AX_3} &= \frac{P_1C}{BC} \cdot \frac{BP_3}{P_3A} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{X_3P_1}{AP_1} &= \frac{X_3P_1}{X_3P_1 + AX_3} \\ &= \frac{X_3P_1}{X_3P_1 + n(n-1)X_3P_1} \\ &= \frac{1}{n^2 - n + 1} \end{aligned}$$

De modo similar ao que fizemos acima isso implica

$$[X_3P_1C] = \frac{1}{n^2 - n + 1} [AP_1C] = \frac{1}{n(n^2 - n + 1)} [ABC]$$

Analogamente, $[X_1P_2A] = [X_2P_3B] = \frac{1}{n(n^2 - n + 1)} [ABC]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{[ABC]} &= 1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n(n^2 - n + 1)} \\ &= \frac{n^3 - n^2 + n - 3n^3 + 3n - 3 + 3}{n(n^2 - n + 1)} \\ &= \frac{n^2 - 4n + 4}{n^2 - n + 1} \\ &= \frac{(n - 2)^2}{n^2 - n + 1} \end{aligned}$$

como queríamos.

(c) Vamos provar que se r possui algum divisor primo p diferente de 2 e 5, então $\frac{q}{r}$, onde $\text{mdc}(q, r) = 1$, não é um decimal exato.

Com efeito, caso tivéssemos $\frac{q}{r} = 0.\overline{r_1r_2\dots r_k} = \frac{\overline{r_1\dots r_k}}{10^k}$ então $q10^k = r \cdot \overline{r_1\dots r_k}$.

Consequentemente, $p \mid r \mid q10^k$ donde $p \mid 10^k = 2^k \cdot 5^k$ (já que $\text{mdc}(q, r) = 1$), contradizendo, por exemplo, a unicidade da fatoração em primos.

Obviamente, $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$ é ímpar (ou n é par, ou $n - 1$ o é, donde $n(n - 1)$ é par).

Vamos agora provar que esse número não é divisível por 5.

Com efeito, se $n \equiv 0 \pmod{5}$ então $n^2 - n + 1 \equiv 1 \pmod{5}$.

Se $n \equiv 1 \pmod{5}$ então $n^2 - n + 1 \equiv 1 \pmod{5}$.

Se $n \equiv 2 \pmod{5}$ então $n^2 - n + 1 \equiv 3 \pmod{5}$.

Se $n \equiv 3 \pmod{5}$ então $n^2 - n + 1 \equiv 2 \pmod{5}$.

Se $n \equiv 4 \pmod{5}$ então $n^2 - n + 1 \equiv 3 \pmod{5}$.

Como em nenhum caso $n^2 - n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, concluímos que 5 não divide $n^2 - n + 1$.

Note também que pelo algoritmo de Euclides temos

$$\begin{aligned} \text{mdc}((n - 2)^2, n^2 - n + 1) &= \text{mdc}(n^2 - 4n + 4, n^2 - n + 1) \\ &= \text{mdc}(n^2 - 4n + 4, 3(n - 1)) \\ &\mid 3 \text{mdc}(n^2 - 4n + 4, n - 1) \\ &= 3 \text{mdc}(n^2, n - 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

(escrevemos $a \mid b$ para dizer a divide b .)

Mas é claro, como $n \geq 3$, $n(n - 1) \geq 6$ donde $n^2 - n + 1 \geq 7 > 3$.

Concluímos assim que $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ mesmo quando simplificada terá um divisor primo diferente de 2 e de 5 no denominador, e portanto esse racional não é um decimal exato (pela nossa afirmação do primeiro parágrafo).