Soluções OBM 2016 N1

Maria Luisa Berbert

1 Questão 1 - 1ª Fase - N1

Qual é o valor da expressão $\frac{2016^2-1}{2015}$

a) 1003

b) 2003

c) 2015

d) 2016

e) 2017

A expressão $2016^2 - 1$ lembra a formula da diferença de quadrados.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Nesse caso, $2016^2 - 1 = (2016-1)(2016+1) = 2015 \cdot 2017$

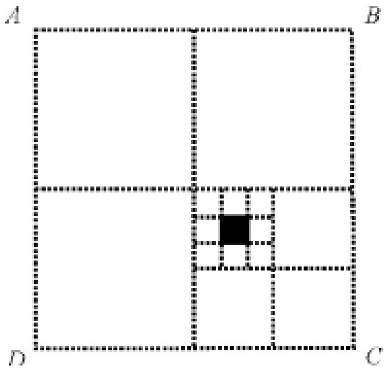
Agora para resolvermos a questão basta substituir $(2015 \cdot 2017)$ na equação.

$$\frac{2015 \cdot 2017}{2015}$$

Cancelando o numerador 2015 com o denominador chegamos a resposta 2017, alternativa E.

2 Questão 2 - 1ª Fase - N1

A figura apresenta quadrados de quatro tamanhos diferentes. A área do pequeno quadrado preto é 1 cm^2. Qual é a área do quadrado maior ABCD?



Sabemos que a área do quadrado preto é 1 cm^2. Observando vemos que o quadrado DFGI contém exatamente 9 quadradinhos todos com a área de 1 cm^2, portanto:

$$\text{Área do quadrado DFGI} = 9 \cdot 1 = 9 \text{ cm}^2$$

Esse quadrado está contido em um quadrado maior, DHCJ, que é composto por 4 quadrados iguais a DFGI. Logo,

$$\text{Área do quadrado DHCJ} = 4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$$

Por fim, o quadrado maior ABCD é formado por 4 quadrados iguais a DHCJ. Assim:

$$\text{Área do quadrado ABCD} = 4 \cdot 36 = 144 \text{ cm}^2$$

Portanto, a alternativa correta é a letra D.

3 Questão 3 - 1ª Fase - N1

Jaci entrega jornais numa rua na qual os números das casas têm exatamente dois algarismos e ambos são ímpares, como por exemplo, 37. No domingo passado ela entregou jornais em 18 casas. No máximo, quantas casas não receberam o jornal?

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

Sabemos que os algarismos ímpares entre 1 e 9 são: 1, 3, 5, 7, 9

Como os números das casas têm dois algarismos e ambos devem ser ímpares, o total de combinações possíveis é:

$$5 \text{ (algarismos ímpares para as dezenas)} \times$$
$$5 \text{ (algarismos ímpares para as unidades)} = 25 \text{ casas possíveis}$$

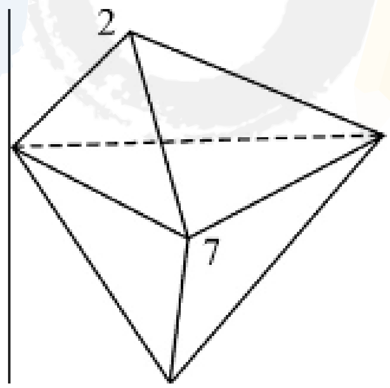
Como Jaci entregou jornais em 18 dessas casas, o número máximo de casas que não receberam o jornal é:

$$25 - 18 = 7$$

Portanto, a resposta correta é a letra D.

4 Questão 4 - 1ª Fase - N1

O sólido ao lado tem seis faces triangulares e um número escrito em cada vértice, dois dos quais mostrados na figura. A soma dos números escritos nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Qual é a soma de todos os cinco números escritos nos vértices?



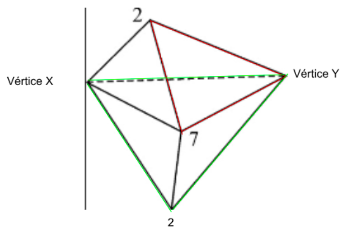
a) 11

b) 20

c) 25

d) 28

e) 33



O sólido da figura possui seis faces triangulares, e há um número escrito em cada um de seus cinco vértices. Dois desses números estão visíveis. Sabemos que:

- A soma dos números em cada face é a mesma para todas as faces.

Portanto,

$$\text{FACE VERDE} = \text{FACE VERMELHA}$$

$$= 2 + 7 + \text{Vértice Y} = 2 + \text{Vértice X} + \text{Vértice Y}$$

Logo, Vértice X $= 7$. E como $2 + 7 + 7 = 2 + 7 +$ Vértice Y, então o Vértice Y também é igual a 7.

Portanto, a some de todos os cinco números escritos nos vértices é:
$2 + 2 + 7 + 7 + 7 = 25$
Então, a resposta correta é a letra C.

5 Questão 5 - 1ª Fase - N1

No ano passado, o dia 1º de fevereiro caiu em um domingo. Na primeira semana desse mês, 29 rapazes e 12 moças frequentavam uma academia esportiva. Depois, a cada semana, entraram 3 novos rapazes e 4 moças na academia, sem nenhuma desistência. Em que mês o número de moças se igualou ao número de rapazes?

a) março

b) abril

c) maio

d) junho

e) julho

Sejam:

- $R(n)$ o número de rapazes na semana n,
- $M(n)$ o número de moças na semana n,
- onde $n = 1$ representa a **primeira semana de fevereiro**.

Sabemos que:

$$R(1) = 29 \quad \text{e} \quad M(1) = 12$$

A cada semana, entram 3 rapazes e 4 moças. Assim, as funções que modelam o número de pessoas são:

$$R(n) = 29 + 3(n - 1)$$
$$M(n) = 12 + 4(n - 1)$$

Queremos saber quando o número de moças será igual ao de rapazes:

$$R(n) = M(n) \Rightarrow 29 + 3(n - 1) = 12 + 4(n - 1)$$

$$29 + 3n - 3 = 12 + 4n - 4 \Rightarrow 26 + 3n = 8 + 4n$$

Subtraindo $3n$ dos dois lados:

$$26 = 8 + n \Rightarrow n = 18$$

Ou seja, na 18ª semana o número de moças se iguala ao número de rapazes.
Como a primeira semana é a de 1º de fevereiro, vamos contar as semanas a partir daí:

- Fevereiro tem 4 semanas completas,
- Março: semanas 5 a 8,
- Abril: semanas 9 a 13,
- Maio: semanas 14 a 17,
- Junho: semana 18 ocorre na primeira semana de junho.

Portanto, a resposta é a letra D, Junho.

6 Questão 6 - 1ª Fase - N1

Lena quer completar as casas do tabuleiro ao lado, usando as mesmas letras já escritas, de modo que casas vizinhas (casas com um lado comum) não tenham a mesma letra. Que letra poderá ser escrita na casa cinzenta?

O	B	
M		

a) somente O

b) somente B

c) somente M

d) somente O ou M

e) qualquer uma

O	B	M/O
M	O	B/M
B/O	M/B	O/B/M

Iremos analisar todas a possibilidades. Na terceira casa da primeira linha tanto a letra M como a letra O podem ser colocadas. No entanto, se a letra M for escolhida significa que na casa abaixo na segunda linha a letra B será colocada. Caso contrário a letra M será posicionada na terceira casa da segunda linha.

Por outro lado, na primeira casa da terceira linha tanto a letra B e O podem ser escolhidas. Dependendo, da letra escolhida tanto a letra M como B podem ser colocadas na segunda casa da terceira linha.

Com base nas escolhas feitas qualquer uma das letras O, B ou M pode ser usada na casa cinzenta.

Resposta correta: Letra E, qualquer uma

7 Questão 7 - 1ª Fase - N1

Dona Maria fez uma grande pizza para seus filhos no Dia das Mães, mas não tinha certeza se viriam visitá-la dois, três ou cinco filhos. Ela quer deixar a pizza dividida em pedaços iguais antes da chegada dos filhos e faz questão de que aqueles que vierem comam a mesma quantidade de pizza. Qual é o menor número de pedaços em que ela deve dividir a pizza?

a) 12

b) 18

c) 24

d) 30

e) 60

Dona Maria precisa dividir a pizza em um número de pedaços que possa ser dividido igualmente entre:

$$2, 3 \text{ e } 5 \text{ filhos}$$

Para que todos os filhos que venham recebam a mesma quantidade de pizza, é necessário encontrar o mínimo múltiplo comum (MMC) de 2, 3 e 5.

Vamos calcular:

$$\text{MMC}(2, 3, 5) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

Assim, se a pizza for dividida em 30 pedaços:

- Se vierem 2 filhos: cada um come $30 \div 2 = 15$ pedaços.
- Se vierem 3 filhos: cada um come $30 \div 3 = 10$ pedaços.
- Se vierem 5 filhos: cada um come $30 \div 5 = 6$ pedaços.

Todos os casos satisfazem a condição de partes iguais.

O menor número de pedaços que garante a divisão igualitária entre 2, 3 ou 5 filhos é: 30

Resposta correta: Letra D

8 Questão 8 - 1ª Fase - N1

Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?

a) 404°

b) 405°

c) 407°

d) 1007°

e) 1008°

Seja x o número de corredores que chegaram antes de Josias. Segundo o enunciado:

$$x = \frac{1}{4} \cdot (\text{corredores que chegaram depois de Josias})$$

O total de corredores é 2016. Então:

$$\text{corredores que chegaram depois de Josias} = 2016 - x - 1$$

(O "-1" corresponde ao próprio Josias.)

Substituindo na equação:

$$x = \frac{1}{4}(2016 - x - 1) \Rightarrow x = \frac{1}{4}(2015 - x)$$

E depois multiplicando ambos os lados por 4:

$$4x = 2015 - x \Rightarrow 5x = 2015 \Rightarrow x = \frac{2015}{5} = 403$$

Logo, Josias chegou na posição:

$$x + 1 = 403 + 1 = 404°$$

Resposta correta: Letra A

9 Questão 9 - 1ª Fase - N1

A área de um quadrado é um número inteiro de metros quadrados e é igual à área de um retângulo cujo perímetro é 58 metros. Se os lados do retângulo também medem números inteiros de metros, qual é a medida do lado do quadrado, em metros?

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

Seja o retângulo com lados a e b, ambos inteiros.
O perímetro do retângulo é:

$$2(a+b) = 58 \Rightarrow a+b = 29$$

A área do retângulo é:

$$A = a \cdot b$$

Queremos que essa área seja um quadrado perfeito, pois é igual à área de um quadrado.

Vamos testar pares (a, b) com $a + b = 29$ e calcular $a \cdot b$ até encontrar um quadrado perfeito:

- $a = 14$, $b = 15 \Rightarrow ab = 210$
- $a = 13$, $b = 16 \Rightarrow ab = 208$
- $a = 12$, $b = 17 \Rightarrow ab = 204$
- $a = 11$, $b = 18 \Rightarrow ab = 198$
- $a = 10$, $b = 19 \Rightarrow ab = 190$
- $a = 9$, $b = 20 \Rightarrow ab = 180$

- $a = 8,\ b = 21 \Rightarrow ab = 168$
- $a = 7,\ b = 22 \Rightarrow ab = 154$
- $a = 6,\ b = 23 \Rightarrow ab = 138$
- $a = 5,\ b = 24 \Rightarrow ab = 120$
- $a = 4,\ b = 25 \Rightarrow ab = 100$

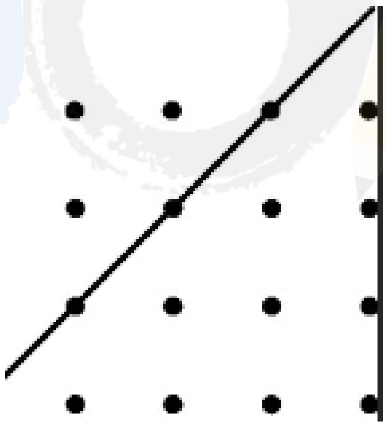
Se $a = 4$ e $b = 25$, logo:

$$\text{Área} = ab = 100 \Rightarrow \text{A área do quadrado também é } 100 \Rightarrow \text{lado} = \sqrt{100} = 10$$

Resposta correta: Letra C

10 Questão 10 - 1ª Fase - N1

Os pontos da figura são vértices de um quadriculado. Pelo menos quantos desses pontos devem ser eliminados de forma que qualquer reta que passar por dois pontos terá que passar por, pelo menos, mais um ponto, como no exemplo?



a) 6

b) 7

c) 8

d) 12

e) 13

Evidentemente, podemos retirar 12 pontos deixando 4 colineares, satisfazendo assim a condição do problema.

Além disso, para deixarmos somente pontos colineares, é fácil ver que ao menos 12 pontos devem ser retirados.

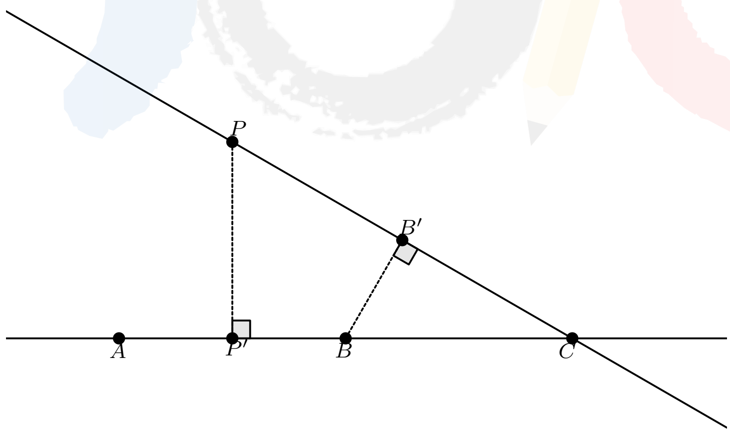
Basta provar portanto que não há nenhuma configuração que tem pontos que não são colineares e ainda assim satisfaz a condição do enunciado.

Provaremos o seguinte teorema, chamado de teorema de Sylvester–Gallai, que concluirá o problema: Seja S um conjunto com pelo menos 3 pontos no plano. Se não há uma reta que passa por somente 2 desses pontos, então existe uma reta que passa por todos os pontos de S.

Suponha por contradição que esse não é o caso. Então dentre todos os pares (ℓ, P) com uma reta ℓ passando por pelo menos dois pontos de S e P um ponto de S que não está em ℓ, considere um que a distância de P a ℓ é mínima.

Então, como há pelo menos 3 pontos em ℓ, pelo princípio da casa dos pombos devem haver ao menos dois que estão na mesma semireta de ℓ com um extremo no pé da perpendicular P' de P à ℓ.

Sejam esses dois pontos B e C, com B mais próximo de P' do que C.



Então é fácil ver que a distância de B à B', o pé da perpendicular de B à PC, é menor que a distância de P à P', pois $\triangle CB'B$ é similar a $\triangle PP'C$ e está contido dentro deste triângulo.

Isso contradiz a minimalidade de (ℓ, P). Portanto toda reta ℓ passando por ao menos dois pontos de S deve na verdade passar por todos os pontos de S.

Logo, o número mínimo de aponetos a serem eliminados é: 12.

Resposta correta: Letra D

11 Questão 11 - 1ª Fase - N1

Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que quem está à sua frente é mentiroso. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

a) nenhuma

b) 1007

c) 1008

d) 2015

e) todas

Primeiro vamos entender a situação e raciocinar sobre como podemos calcular o número de mentirosos.

A primeira pessoa da fila, P_1, diz que todos os outros atrás dela são mentirosos.

Se P_1 fosse honesto, isso significaria que todas as pessoas atrás dele são mentirosas. No entanto, isso geraria uma contradição. Para entender por que isso ocorre, vamos analisar a segunda pessoa da fila, P_2.

P_2 diz que P_1 é mentiroso. Se P_2 for honesto, a afirmação de P_2 será verdadeira, e P_1 de fato é mentiroso.

Como P_1 deve ser mentiroso (já que sua afirmação de que todos atrás de si são mentirosos não pode ser verdadeira), a primeira pessoa não pode ser honesta.

Agora sabemos que P_1 é mentiroso e P_2 é honesto. Vamos verificar o que P_3 diz: P_3 afirma que P_2 é mentiroso.

Como P_2 é honesto, P_3 está mentindo, o que nos leva a concluir que P_3 deve ser mentiroso.

Observando os casos acima, vemos que, sempre que uma pessoa é honesta, a próxima na fila será mentirosa e vice-versa. Portanto, as pessoas se alternam entre ser honestas e mentirosas.

Como P_1 é mentiroso e a alternância é garantida pelas falas de cada pessoa, podemos concluir que as pessoas na fila se alternam entre mentirosos e honestos ao longo da fila.

Agora iremos calcular o número de mentirosos. Como a alternância começa com P_1 sendo mentiroso, todos os mentirosos estarão nas posições ímpares: P_1, P_3, P_5, $\ldots$, P_{2015}. Essas são as pessoas que mentem.

O total de mentirosos é o número de posições ímpares de 1 até 2016. Como a sequência de números ímpares de 1 até 2015 é uma progressão aritmética com razão 2 (1, 3, 5, ..., 2015), podemos contar quantos números ímpares existem até 2016.

O número de números ímpares entre 1 e 2016 pode ser calculado dividindo 2016 por 2. O número total de mentirosos será metade do total de pessoas, já que a alternância é exata. Logo:

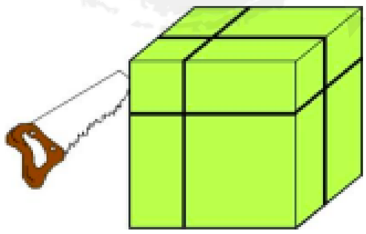
$$\text{Total de mentirosos} = \frac{2016}{2} = 1008$$

Portanto, existem 1008 mentirosos na fila.

Resposta correta: Letra C

12 Questão 12 - 1ª Fase - N1

Um cubo foi pintado de verde. Em seguida, foi cortado paralelamente às faces, obtendo-se oito blocos retangulares menores. As faces sem cor desses blocos foram pintadas de vermelho. Qual é a razão entre a área da superfície total verde e a área da superfície total vermelha?



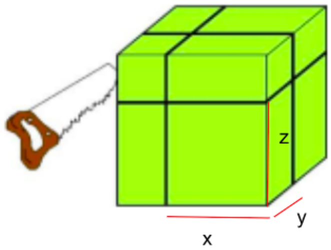
a) 1:1

b) 1:2

c) 1:3

d) 2:3

e) 3:4



Se calcularmos a surperfíce área em verde da figura retangular com as linhas vermelhas perceberemos que será igual a XY + XZ + ZY.

Agora, se calcularmos a superfíce da área em vermelha que não é visível. Veremos também será igual a XY + XZ + ZY pois a parte interna da figura têm as mesmas medidas da parte interna.

Isso é valido para todos os 8 blocos retangulares menores. Por esta razão a

$$\text{Razão entre área verde e área vermelha} = 1:1$$

Resposta correta: Letra A

13 Questão 13 - 1ª Fase - N1

Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

Sejam:

- P: quantidade de números pares na lista,

- I: quantidade de números ímpares na lista.

Sabemos que:

$$P + I = 10$$

- Par + Par = Par
- Ímpar + Ímpar = Par
- Par + Ímpar = Ímpar
- Número de somas pares:

$$\binom{P}{2} + \binom{I}{2}$$

- Número de somas ímpares:

$$P \times I$$

De acordo com o enunciado, o número de somas pares é 4 vezes o número de somas ímpares:

$$\binom{P}{2} + \binom{I}{2} = 4PI$$

Sabemos também que $I = 10 - P$. Se substituirmos isso na equação temos que

$$\binom{P}{2} + \binom{10-P}{2} = 4P(10-P)$$

$$\frac{P(P-1)}{2} + \frac{(10-P)(9-P)}{2} = 4P(10-P)$$

$$P(P-1) + (10-P)(9-P) = 8P(10-P)$$

$$P^2 - P + (90 - 19P + P^2) = 80P - 8P^2 \Rightarrow 2P^2 - 20P + 90 = 80P - 8P^2$$

$$2P^2 - 20P + 90 - 80P + 8P^2 = 0 \Rightarrow 10P^2 - 100P + 90 = 0$$

$$P^2 - 10P + 9 = 0$$

$$P = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$P = 9 \quad \text{ou} \quad P = 1$$

Como a pergunta é sobre a maior quantidade de números pares, a resposta é: 9

Resposta correta: Letra E

14 Questão 14 - 1ª Fase - N1

Numa escola, 20 alunos da sala A e 30 alunos da sala B fizeram a mesma prova de Matemática e a mesma de Português. As médias das notas obtidas nessas provas encontram-se no gráfico ao lado. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

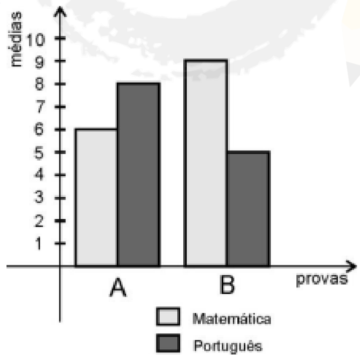
a) A média de Português dos alunos da sala A é maior do que a média de Matemática dos alunos da sala B.

b) A média de Português é maior do que a média de Matemática em ambas as salas.

c) A média de Matemática dos alunos das duas salas juntas é menor do que 7,5.

d) A média das notas das duas provas na sala A é menor do que a da sala B.

e) A média geral das notas de todos os alunos nas duas matérias é 7.



- **Sala A**:
  - Matemática: média $= 6$
  - Português: média $= 8$
  - Alunos: 20

- **Sala B**:
  - Matemática: média = 9
  - Português: média = 5
  - Alunos: 30

Cálculo da média geral de Matemática:

$$\text{Sala A: } 20 \times 6 = 120 \quad \text{Sala B: } 30 \times 9 = 270$$

$$\text{Total: } 120 + 270 = 390 \quad \Rightarrow \quad \text{Média de Matemática} = \frac{390}{50} = 7{,}8$$

Cálculo da média geral de Português:

$$\text{Sala A: } 20 \times 8 = 160 \quad \text{Sala B: } 30 \times 5 = 150$$

$$\text{Total: } 160 + 150 = 310 \quad \Rightarrow \quad \text{Média de Português} = \frac{310}{50} = 6{,}2$$

Cálculo da média geral total:

$$\text{Soma total das notas} = 390 + 310 = 700$$

$$\text{Total de provas} = 50 \text{ alunos} \times 2 \text{ matérias} = 100$$

$$\text{Média geral} = \frac{700}{100} = 7{,}0$$

- **a)** Falsa — A média de Português da sala A (8) é menor que a de Matemática da sala B (9).
- **b)** Falsa — Na sala B, a média de Português (5) é menor que a de Matemática (9).
- **c)** Falsa — A média geral de Matemática é 7,8, que é maior que 7,5.
- **d)** Falsa — A média individual da sala A é $(6 + 8)/2 = 7$, enquanto a da sala B é $(9 + 5)/2 = 7$ também, isto é, as médias são iguais.
- **e)** **Verdadeira** — A média geral das notas de todos os alunos nas duas matérias é de fato 7,0.

Resposta correta: Letra E

15 Questão 15 - 1ª Fase - N1

Cada uma das casas de um tabuleiro contém peças na forma de triângulo, quadrado, hexágono ou círculo. Um movimento consiste na troca de posições de duas peças. No mínimo, quantos movimentos serão necessários na configuração a seguir para que todas as linhas e colunas tenham quatro peças diferentes?

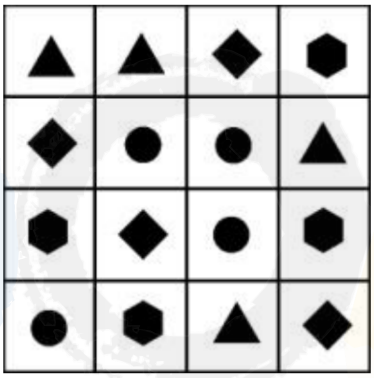
a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5



Resolveremos esse problema, por eliminação. Sabe-se que não seria possível com um movimento com que todas as linhas e colunas tenham quatro pessas diferentes pois tanto a primeira linha como a segunda e a terceira coluna têm peças iguais.

Para que cada coluna e linha tenham peças diferentes podemos trocar a segunda peça da primeira linha (triângulo) com a segunda peça da segunda linha (círculo) desta forma a primeira linha terá todas as peças diferentes. No entanto, a terceira coluna ainda possuí dois círculos. Para que cada linha e coluna tenha peças diferentes é necessário fazer um segundo movimento e trocar a terceira peça da terceira linha com a quarta peça da terceira linha. - Existem repetições nas colunas: em especial, a 3ª e 4ª colunas contêm figuras repetidas. Ou seja, com dois movimentos é possível ajustar a configuração para que todas as linhas e colunas contenham apenas peças diferentes.

Resposta correta: Letra B

16 Questão 16 - 1ª Fase - N1

Uma revista de 60 páginas é montada a partir de pilha de 15 folhas de papel dobradas ao meio. Por defeito, uma dessas revistas veio sem a página 7. Quais outras páginas também vieram faltando?

a) 8, 9 e 10

b) 8, 42 e 43

c) 8, 48 e 49

d) 8, 52 e 53

e) 8, 53 e 54

Uma folha de papel dobrada ao meio forma 4 páginas da revista: duas de cada lado.

A primeira folha (quando dobrada) formaria as seguintes páginas:

$$\text{Frente: } 1 \text{ e } 60, \quad \text{Verso: } 2 \text{ e } 59$$

A segunda folha:

$$\text{Frente: } 3 \text{ e } 58, \quad \text{Verso: } 4 \text{ e } 57$$

A terceira:

$$\text{Frente: } 5 \text{ e } 56, \quad \text{Verso: } 6 \text{ e } 55$$

A quarta folha, então, terá:

$$\text{Frente: } 7 \text{ e } 54, \quad \text{Verso: } 8 \text{ e } 53$$

Logo, se a página 7 está faltando, então toda essa folha está ausente.

Assim, as páginas faltantes são:

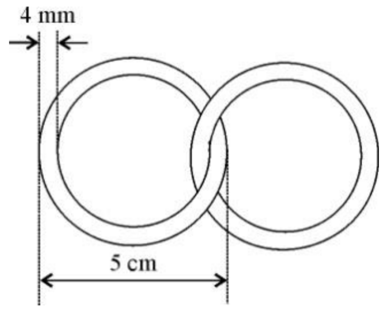
$$7, 8, 53, 54$$

Portanto, as páginas 8, 53 e 54 estão faltando junto com a 7.

Resposta correta: Letra E

17 Questão 17 - 1ª Fase - N1

Um joalheiro fabrica colares juntando argolas circulares com as medidas indicadas na figura. Qual é o compri-mento, em centímetros, de um colar com 20 argolas?



a) 84,8

b) 92

c) 96,6

d) 98,2

e) 100

Para determinar o comprimento total de um colar com 20 argolas, devemos considerar que:

- Cada argola tem diâmetro interno de 4,2 cm pois removemos 0,8 do diâmetro externo de 5.
- Quando as argolas são encaixadas, não somamos 0,4 cm por argola, pois elas compartilham parte de seu espaço com a argola seguinte.

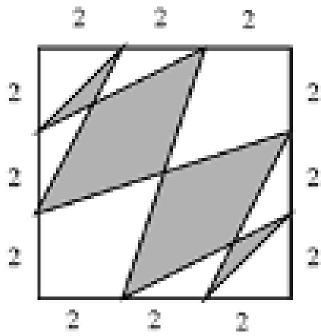
De acordo com o método indicado na figura (dividindo o colar em partes), o comprimento total pode ser calculado como:

$$\text{Comprimento total} = 20 \cdot 4{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 = 84{,}4$$

Resposta correta: Letra A

18 Questão 18 - 1ª Fase - N1

Na figura, as medidas são dadas em centímetros. Qual é a área da região cinzenta no interior do quadrado em centímetros quadrados?



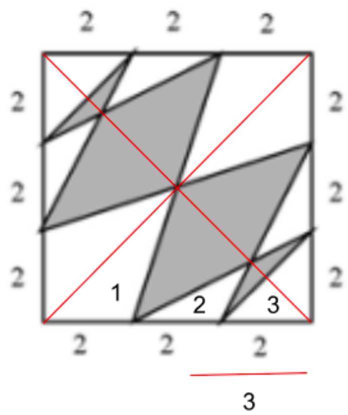
a) $\frac{56}{5}$

b) $\frac{44}{3}$

c) 22

d) $\frac{68}{3}$

e) 24



Para encontrarmos á area da figura cinza primeiro vamos calcular a area de um quarto de dessa figura e multiplicar por quatro. A área de um quarto dessa da images é dada por um triangulo de altura 3 e base 6. $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

Portanto, se calcularmos as áreas dos triangulos 1, 2 e 3 e subtrairmos de 9 encontraremos a área de um quarto da parte cinza.

Para encontrarmos a área do triangulo 1 basta multiplicarmos $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$.

Agora encontraremos a área do triangulo 2. Podemos colocar os pontos no plano cartesiano de modo que os vértices do quadrado sejam $(0,0)$, (6,0), (6,6) e (0,6). Assim o triângulo 2 terá vertices (2,0), $(4,0)$ e a intersecão da reta passando por (2,0) e $(6,2)$ e da reta passando por (0,6) e (6,0). As equações dessas retas são $y = \frac{x}{2} - 1$ e $y = -x + 6$. Assim encontramos que o terceiro vértice do triângulo 2 é $(\frac{14}{3}, \frac{4}{3})$, donde sua altura é $\frac{4}{3}$.

Dessa forma a área do triângulo 2 será $\frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3}$.

Por último encontraremos a área do triangulo 3: $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

A soma das áreas desses três triangulos é $3 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{16}{3}$.

Logo a área cinza será quatro vezes $9 - \frac{16}{3} = \frac{11}{3}$.

Isto é, a área cinza será $\frac{44}{3}$. Logo a resposta correta é: Letra B

19 Questão 19 - 1ª Fase - N1

Qual das equações abaixo resolve o problema a seguir? "Uma quantidade x de amigos resolveu fazer uma viagem juntos, dividindo igualmente suas despesas, no total de 6000 reais. Entretanto, na última hora, três dos amigos desistiram e cada um dos que foram viajar teve que arcar com uma despesa extra de 100 reais. Incluindo os que desistiram, quantos amigos eram?"

a) $x^2 - 12x = 0$

b) $x^2 - 3x - 180 = 0$

c) $x^2 = 144$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $x^2 - 100x + 6000 = 0$

O problema fala sobre uma situação onde a quantidade de amigos, x, divide as despesas igualmente de R\$6000,00. Após três amigos desistirem, cada um dos que viajaram teve que arcar com R\$100 a mais. E precisamos calcular quantos amigos estavam inicialmente no grupo.

A quantidade inicial de amigos era x, e a despesa inicial por amigo seria $\frac{6000}{x}$. Após a desistência de 3 amigos, o número de amigos que restaram foi $x - 3$, e a nova despesa por amigo foi $\frac{6000}{x-3}$. Portanto,

$$\frac{6000}{x-3} - \frac{6000}{x} = 100$$

Resolvendo a equação:

$$\frac{6000(x - x + 3)}{x(x-3)} = 100$$

$$\frac{6000 \times 3}{x(x-3)} = 100$$

$$\frac{18000}{x(x-3)} = 100$$

$$18000 = 100x(x-3)$$

$$18000 = 100x^2 - 300x$$

$$180 = x^2 - 3x$$

Reorganizando a equação:

$$x^2 - 3x - 180 = 0$$

A resposta é portanto: Letra B

Adicionalmente, vamos encontrar o valor de x.

Resolvendo a equação quadrática:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-180)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 720}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 27}{2}$$

As soluções são:

$$x = \frac{3+27}{2} = 15 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3-27}{2} = -12$$

Como o número de amigos não pode ser negativo, a solução é $x = 15$.

20 Questão 20 - 1ª Fase - N1

Na igualdade

$$\frac{D \times O \times Z \times E}{D \times O \times I \times S} = S \times E \times I \times S$$

letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto $S \times E \times I \times S$ pode ter?

a) 12

b) 18

c) 22

d) 28

e) 36

Cancelando $D \cdot O$, obtemos:

$$\frac{Z \cdot E}{I \cdot S} = S^2 \cdot E \cdot I$$

Multiplicando ambos os lados por $I \cdot S$:

$$Z \cdot E = S^3 \cdot E \cdot I^2 \Rightarrow Z = S^3 \cdot I^2$$

Como Z é um algarismo (entre 1 e 9), devemos ter:

$$S^3 \cdot I^2 \leq 9$$

Testamos valores possíveis para S:

- $S = 1 \Rightarrow Z = I^2 \Rightarrow I \in \{1{,}2{,}3\} \Rightarrow Z \in \{1{,}4{,}9\}$
- $S = 2 \Rightarrow Z = 8 \cdot I^2$
  - $I = 1 \Rightarrow Z = 8$
  - $I \geq 2 \Rightarrow Z \geq 32$ (inválido)
- $S \geq 3 \Rightarrow S^3 \geq 27$, logo $Z > 9$ (inválido)

Portanto, os únicos pares (S, I) possíveis com $Z = S^3 \cdot I^2 \leq 9$ e dígitos distintos são:

$$(1{,}2{,}4), \quad (1{,}3{,}9), \quad (2{,}1{,}8)$$

Para cada tripla (S, I, Z), escolhemos $E \in \{1, \ldots, 9\} \setminus \{S, I, Z\}$, ou seja, 6 valores possíveis para E distintos dos demais.

$$P = 1^2 \cdot E \cdot 2 = 2E, \quad E \in \{3{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9\} \Rightarrow P \in \{6, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$P = 1^2 \cdot E \cdot 3 = 3E, \quad E \in \{2{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8\} \Rightarrow P \in \{6, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

$$P = 2^2 \cdot E \cdot 1 = 4E, \quad E \in \{3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}9\} \Rightarrow P \in \{12, 16, 20, 24, 28, 36\}$$

Valores distintos obtidos:

$$\{6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 36\}$$

Total:

$$12 \text{ valores distintos de } P = S \cdot E \cdot I \cdot S$$

A resposta é portanto: Letra A