

Teste 1 da Seletiva Internacional para Cone Sul / OMCPLP / PAGMO 2024

Por Isabela Pires

Enunciado - Problema 1

Um programa de computador que trabalha apenas com números inteiros lê os números na tela, identifica os números selecionados, conforme comando do usuário, e realiza uma das seguintes ações:

- Se o botão A é apertado, o usuário seleciona 5 números e então cada número selecionado é alterado para o seu sucessor;
- Se o botão B é apertado, o usuário seleciona 5 números e então cada número selecionado é alterado para o seu triplo.

Bento possui esse programa em seu computador com os números $1, 3, 3^2, \dots, 3^{19}$ na tela, cada um aparecendo uma única vez.

- Apertando apenas o botão A diversas vezes, é possível Bento fazer a soma dos números na tela ser 2024^{2025} ?
- Qual é o número mínimo de vezes que Bento deve apertar o botão B para que todos os números na tela fiquem iguais, sem apertar o botão A nenhuma vez?

Resolução

Item (a)

Primeiramente, é importante ressaltar que os números exibidos inicialmente na tela são $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{19}$, totalizando 20 números.

Vamos analisar a operação do botão A. Cada vez que o botão A é apertado, 5 números da tela aumentam em 1 unidade. Isso implica que a soma total dos números aumenta em exatamente 5 a cada clique. Portanto, a **soma total é invariante módulo 5**. Isso significa que, se a soma inicial for congruente a $r \pmod{5}$, só será possível alcançar valores congruentes a $r \pmod{5}$ usando apenas o botão A.

A soma inicial dos números é dada por uma progressão geométrica:

$$S_0 = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{19} = \frac{3^{20} - 1}{2}$$

Vamos calcular $\frac{3^{20} - 1}{2} \pmod{5}$. Sabemos que $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$, então:

$$3^{20} = (3^4)^5 \equiv 1^5 = 1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{20} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3^{20} - 1}{2} \equiv 0 \pmod{5}$$

Para verificar se é possível alcançar 2024^{2025} com o botão A, basta verificar se esse número é congruente à soma inicial módulo 5. Sabemos que $2024 \equiv -1 \pmod{5}$, então:

$$2024^{2025} \equiv (-1)^{2025} \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}$$

Como a soma inicial é congruente a 0 módulo 5, e $2024^{2025} \equiv 4 \pmod{5}$, logo **não é possível** obter essa soma usando apenas o botão A.

Item (b)

Agora, queremos transformar todos os números em um único valor, utilizando apenas o botão B, que multiplica os números selecionados por 3. Como os números iniciais são potências de 3, isso equivale a aumentar o expoente de cada número em 1. Por exemplo, $3^4 \rightarrow 3^5$.

O objetivo é tornar todos os números iguais, e o menor valor possível a que todos podem ser elevados é 3^{19} , pois ele já está presente e é o maior.

Para isso, devemos calcular quantos aumentos de expoente são necessários para cada número virar 3^{19} . O número 3^0 precisa de 19 aumentos, 3^1 de 18, e assim por diante, até 3^{18} , que precisa de 1 aumento. O número 3^{19} já está pronto e não precisa de nada.

Somando todos os aumentos necessários:

$$\sum_{k=1}^{19} k = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

Como cada clique no botão B permite aumentar o expoente de 5 números em 1, o número mínimo de cliques é:

$$\frac{190}{5} = 38$$

E isso é de fato possível: basta sempre escolher os 5 números com menores expoentes em cada clique.



Enunciado - Problema 2

Seja ABC um triângulo com $AB < AC < BC$ e Γ a sua circunferência circunscrita, cujo centro é O .

Sejam ω_1 a circunferência de centro B e raio AC , e ω_2 a circunferência de centro C e raio AB . As circunferências ω_1 e ω_2 intersectam-se no ponto E , de modo que A e E estão em lados opostos em relação à reta BC .

As circunferências Γ e ω_1 intersectam-se no ponto F , e as circunferências Γ e ω_2 intersectam-se no ponto G , de forma que os pontos F e G estão do mesmo lado que E em relação à reta BC .

Sendo K o ponto tal que AK é diâmetro de Γ , prove que K é o circuncentro do triângulo EFG .

Resolução

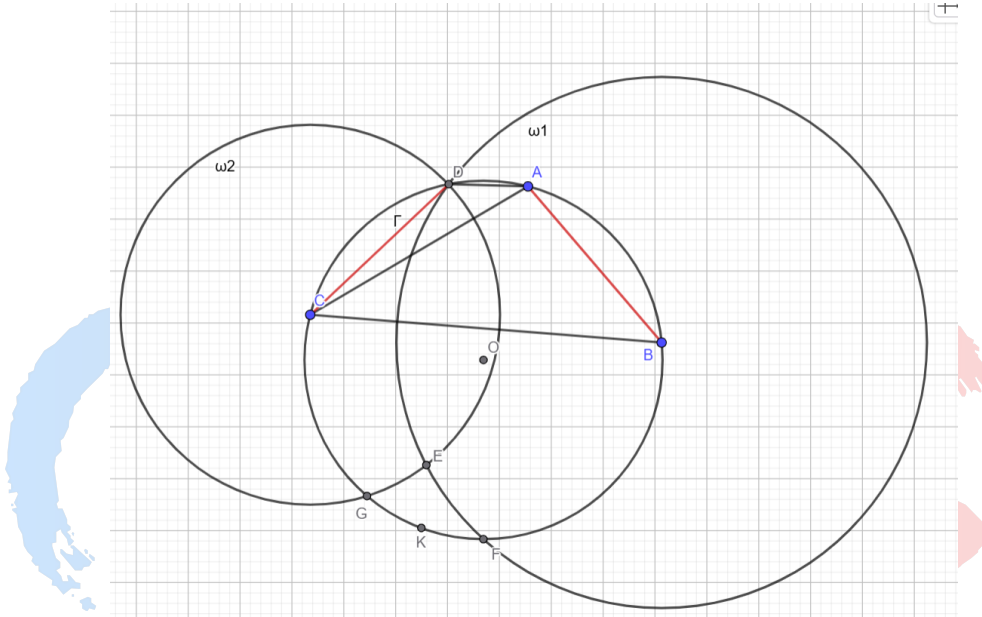


Figura 1: Ilustração do problema

Primeiramente, note que existe um ponto D tal que $ABCD$ é um trapézio isósceles com $AD \parallel BC$ e E' tal que $ABE'C$ é um paralelogramo. D e E' pertencem tanto a ω_1 quanto a ω_2 , portanto, eles são os pontos onde ω_1 intersecta ω_2 . Como D está do mesmo lado de A em relação a BC e E' está do lado oposto de A em relação a BC , concluímos que $E = E'$. De forma semelhante, $F \neq C$ é o ponto em Γ tal que $AB \parallel CF$ e $G \neq B$ é o ponto em Γ tal que $CA \parallel BG$ (pois nenhum deles pode ser D). Logo, D é o ponto de intersecção das três circunferências. Utilizando números complexos com Γ como o círculo unitário. Então,

$$e = b + c - a, \quad f = \frac{ab}{c}, \quad g = \frac{ca}{b} \quad \text{e} \quad k = -a.$$

Portanto,

$$e - k = b + c, \quad f - k = \frac{ab}{c} + a = \frac{a}{c}(b + c), \quad g - k = \frac{ca}{b} + a = \frac{a}{b}(b + c),$$

logo,

$$|e - k| = |f - k| = |g - k|,$$

pois todos são iguais a $|b + c|$. O que implica que K é o circuncetro, c.q.d.

Enunciado - Problema 3

Dado um inteiro positivo n , se define $\tau(n)$ como o número de divisores de n e $\sigma(n)$ como a soma desses divisores. Por exemplo, $\tau(12) = 6$ e $\sigma(12) = 28$. Encontre todos os inteiros positivos n que satisfazem:

$$\sigma(n) = \tau(n) \lceil \sqrt{n} \rceil$$

Obs.: Para um número x real, usa-se a notação $\lceil x \rceil$ para expressar o menor inteiro maior ou igual a x . Por exemplo, $\lceil 3 \rceil = 3$ e $\lceil \sqrt{2} \rceil = 2$.

Resolução

Sejam $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{\tau(n)} = n$ os divisores de n .

Observe que cada divisor d_i de n tem um “par” $d_{\tau(n)-i+1}$ tal que:

$$d_i \cdot d_{\tau(n)-i+1} = n.$$

Ou seja, para cada divisor menor que $\sqrt{n}$, existe um divisor maior que $\sqrt{n}$ tal que a multiplicação dos dois dá n . Como $\sqrt{n}$ é o ponto de simetria entre os divisores, o número de divisores menores ou iguais a $\sqrt{n}$ é no máximo $\sqrt{n}$. Como há uma correspondência um a um entre os divisores menores e os divisores maiores, o número total de divisores é no máximo $2\sqrt{n}$.

Assim,

$$\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$$

Por Desigualdades das Médias ($MA \geq MG$), para os divisores de n , temos que a soma de um divisor d_i e seu “par” $d_{\tau(n)-i+1}$, sempre maior ou igual ao dobro da raiz quadrada de n :

$$d_i + d_{\tau(n)-i+1} \geq 2\sqrt{n}.$$

Agora, multiplicamos essa desigualdade por $\tau(n) - 2$, que é o número de divisores “intermediários” entre os extremos d_1 e $d_{\tau(n)}$, e somamos $n+1$ (que é corresponde ao primeiro e ao último termo da soma dos divisores), chegamos na seguinte relação:

$$\sigma(n) \geq [\tau(n) - 2]\sqrt{n} + (n+1),$$

Agora, queremos verificar quando a igualdade

$$\sigma(n) = \tau(n) \lceil \sqrt{n} \rceil$$

é possível. Nosso objetivo agora é provar que, para $n \geq 16$, a desigualdade acima fornece um valor de $\sigma(n)$ maior do que $\tau(n) \lceil \sqrt{n} \rceil$, o que impossibilitaria a igualdade do enunciado.

Dessa forma, podemos assumir que $n \geq 16$. Como $\lceil \sqrt{n} \rceil \leq \sqrt{n} + 1$, temos:

$$\tau(n) \lceil \sqrt{n} \rceil \leq \tau(n)(\sqrt{n} + 1).$$

Então, para garantir que a igualdade do problema não ocorra, basta mostrar que:

$$[\tau(n) - 2]\sqrt{n} + (n+1) > \tau(n)(\sqrt{n} + 1).$$

Desenvolvendo o lado direito:

$$\tau(n)(\sqrt{n} + 1) = \tau(n)\sqrt{n} + \tau(n).$$

Agora, queremos:

$$[\tau(n) - 2]\sqrt{n} + n + 1 > \tau(n)\sqrt{n} + \tau(n).$$

Isolando os termos:

$$([\tau(n) - 2] - \tau(n))\sqrt{n} + (n + 1 - \tau(n)) > 0,$$

$$(-2)\sqrt{n} + (n + 1 - \tau(n)) > 0,$$

$$n + 1 - \tau(n) > 2\sqrt{n}.$$

Ou seja, se

$$n + 1 > \tau(n) + 2\sqrt{n},$$

então a igualdade do problema não pode ocorrer.

Mas sabemos que $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$, então é suficiente que:

$$n + 1 > 4\sqrt{n}.$$

Essa última desigualdade é satisfeita para $n \geq 16$. De fato, seja $f(n) = n + 1 - 4\sqrt{n}$. A função é crescente para $n \geq 0$, e temos:

$$f(16) = 16 + 1 - 4 \cdot 4 = 17 - 16 = 1 > 0.$$

Logo, para $n \geq 16$, temos $\sigma(n) > \tau(n)\lceil\sqrt{n}\rceil$, então a igualdade do enunciado não pode acontecer. Portanto, basta verificar os valores de $n \in \{1, 2, \dots, 15\}$ para os quais:

$$\sigma(n) = \tau(n)\lceil\sqrt{n}\rceil.$$

Vamos calcular $\tau(n)$, $\lceil\sqrt{n}\rceil$ e $\sigma(n)$ para $n = 1$ até 15:

n	$\tau(n)$	$\lceil\sqrt{n}\rceil$	$\sigma(n)$	$\tau(n) \cdot \lceil\sqrt{n}\rceil$
1	1	1	1	1
2	2	2	3	4
3	2	2	4	4
4	3	2	7	6
5	2	3	6	6
6	4	3	12	12
7	2	3	8	6
8	4	3	15	12
9	3	3	13	9
10	4	4	18	16
11	2	4	12	8
12	6	4	28	24
13	2	4	14	8
14	4	4	24	16
15	4	4	24	16

Logo, os únicos inteiros positivos n que satisfazem

$$\sigma(n) = \tau(n)\lceil\sqrt{n}\rceil$$

são:

$$\boxed{n = 1, 3, 5, 6}.$$

Enunciado - Problema 4

Uma sequência infinita de reais positivos $x_0, x_1, x_2, \dots$ é chamada *legal* se satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $x_0 = 1, x_1 = 3$; e
 (b) $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} \geq 3x_n - x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Encontre o maior real M tal que, para toda sequência legal, a desigualdade

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > M$$

é válida para todo $n \geq 0$.

Resolução

Queremos encontrar o maior número real M tal que, para toda sequência legal, sempre vale:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > M \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $M = 2$ funciona. Para isso, queremos garantir que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 2.$$

Logo, a partir a desigualdade dada no enunciado:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} \geq 3x_n - x_{n+1},$$

reorganizando:

$$x_{n+1} \geq 3x_n - (x_0 + \dots + x_{n-1}).$$

Se conseguirmos garantir que:

$$x_n > x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1},$$

então:

$$x_{n+1} > 3x_n - x_n = 2x_n,$$

ou seja:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 2.$$

Como queríamos. Dessa forma, vamos provar por indução de que $x_n > x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$ para $n \geq 1$

Passo base:

Para $n = 1$,

$$x_1 = 3 > x_0 = 1.$$

Para $n = 2$,

$$x_2 \geq 3x_1 - x_0 = 3 \cdot 3 - 1 = 8.$$

E:

$$x_0 + x_1 = 1 + 3 = 4 < 8 \leq x_2.$$

Passo indutivo: Suponha que $x_k > x_0 + \dots + x_{k-1}$ vale para algum $k \geq 2$. Vamos mostrar que então também vale:

$$x_{k+1} > x_0 + x_1 + \dots + x_k.$$

Da condição do enunciado, temos:

$$x_{k+1} \geq 3x_k - (x_0 + \dots + x_{k-1}).$$

Pela hipótese de indução, sabemos que $x_k > x_0 + \dots + x_{k-1}$, logo:

$$x_{k+1} > 3x_k - x_k = 2x_k.$$

Mas também:

$$x_0 + \dots + x_k < x_k + x_k = 2x_k < x_{k+1}.$$

Portanto, $x_{k+1} > x_0 + \dots + x_k$, e o passo indutivo está provado.

Podemos concluir que por indução, vale $x_n > x_0 + \dots + x_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. E assim,

$$x_{n+1} > 2x_n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 2.$$

Logo, $M = 2$ funciona.

Vamos agora mostrar que M não pode ser maior que 2. Para isso, vamos considerar o caso em que a desigualdade do enunciado seja uma **igualdade**:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 3x_n - x_{n+1}.$$

Isolando x_{n+1} :

$$x_{n+1} = 3x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}).$$

Seja $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$. Assim, a soma até x_{n-1} é S_{n-1} , logo temos:

$$x_{n+1} = 3x_n - S_{n-1}.$$

Note que $S_{n-1} = S_n - x_n$, logo:

$$x_{n+1} = 3x_n - (S_n - x_n) = 3x_n - S_n + x_n = 4x_n - S_n.$$

Ou seja, obtemos que:

$$x_{n+1} = 4x_n - S_n.$$

Vamos calcular os primeiros termos da sequência com as condições iniciais $x_0 = 1$, $x_1 = 3$.

- $S_1 = x_0 + x_1 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow x_2 = 4x_1 - S_1 = 4 \cdot 3 - 4 = 8.$
- $S_2 = 1 + 3 + 8 = 12 \Rightarrow x_3 = 4 \cdot 8 - 12 = 20.$
- $S_3 = 1 + 3 + 8 + 20 = 32 \Rightarrow x_4 = 4 \cdot 20 - 32 = 48.$

Observando os valores, é notório que:

$$x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}.$$

Vamos verificar:

- $x_2 = 4x_1 - 4x_0 = 12 - 4 = 8.$
- $x_3 = 4x_2 - 4x_1 = 32 - 12 = 20.$
- $x_4 = 4x_3 - 4x_2 = 80 - 32 = 48.$

Portanto, temos a seguinte recorrência:

$$x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}.$$

Dessa forma, vamos resolver a recorrência, a equação característica é:

$$r^2 = 4r - 4 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0.$$

A solução geral é:

$$x_n = (A + Bn) \cdot 2^n.$$

Com os dados iniciais:

$$x_0 = 1 \Rightarrow A = 1,$$

$$x_1 = 3 = (A + B) \cdot 2 = (1 + B) \cdot 2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução explícita é:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot 2^n = 2^{n-1}(n+2).$$

Desse modo, calculando a razão $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, com a fórmula $x_n = 2^{n-1}(n+2)$, temos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^n(n+3)}{2^{n-1}(n+2)} = 2 \cdot \frac{n+3}{n+2}.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n+3}{n+2} = 2.$$

Como existe uma sequência legal em que a razão $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ tende a 2 pelo limite, então nenhum valor $M > 2$ pode ser garantido como válido para todas as sequências legais. Assim, o maior valor possível que satisfaz a condição do problema é:

$$M = 2.$$

